Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

12ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x7.23)**.** Δείξτε ότι $\chi([0,n)) =_o [0,n+1)$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Με $\chi(A)$ εννοούμε τον χώρο Hartogs του συνόλου A.

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι $W = [0,n+1) \nleq_c [0,n)$ επομένως από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του χώρου Hartogs προκύπτει $\chi([0,n)) \leq_o [0,n+1)$. (Θεωρούμε τα διαστήματα $[0,k)$ με τη φυσική τους διάταξη.)

Αν είχαμε $\chi([0,n)) <_o [0,n+1)$ τότε ο $\chi([0,n))$ θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $[0,n+1)$. Δηλαδή θα υπήρχε $m \in [0,n+1)$ με $\chi([0,n)) =_o [0,m)$. Αλλά τότε $m \leq n$ και επομένως

$$\chi([0,n)) =_c [0,m) \leq_c [0,n),$$

που αντιτίθεται στην ιδιότητα $\chi(A) \leq_c A$ του χώρου Hartogs. Επομένως $\chi([0,n)) \nless_o [0,n+1)$ και άρα $\chi([0,n)) =_o [0,n+1)$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το Αξίωμα Επιλογής: για κάθε συνόλα A, B, P με $P \subseteq A \times B$,

αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ με $(x,y) \in P$, τότε υπάρχει $f : A \to B$ με $(x, f(x)) \in P$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Για κάθε μη κενό σύνολο A υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow A$ με $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε μη κενό $X \in \mathcal{P}(A)$.

(iii) Για κάθε μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ το γινόμενο $\prod\limits_{i \in I} A_i$ είναι μη κενό.

Λύση.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Έστω A μη κενό σύνολο. Ορίζουμε $P \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}) \times A$ ως εξής

$$(X, x) \in P \iff x \in X.$$

Τότε για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ υπάρχει $x \in A$ με $(X,x) \in P$. Από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει μια συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow A$ με $(X, \varepsilon(X)) \in P$, δηλαδή $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Από τον ορισμό της οικογένειας συνόλων υπάρχει σύνολο E και μια συνάρτηση $\pi : I \to \mathcal{P}(E)$ με $\pi(i) = A_i$. Από το (ii) υπάρχει μια συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow E$ με $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε μη κενό $X \in \mathcal{P}(E)$. Επειδή κάθε $A_i = \pi(i)$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$, ορίζεται η σύνθεση

$$f : I \to E : f(i) = (\varepsilon \circ \pi)(i).$$

Τότε για κάθε $i \in I$ έχουμε $f(i) = \varepsilon(\pi(i)) \in \pi(i) = A_i$, δηλαδή $f(i) \in A_i$ για κάθε $i \in I$ ή αλλιώς $f \in \prod\limits_{i \in I} A_i$.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Θεωρούμε σύνολα A, B, P με $P \subseteq A \times B$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ με $(x,y) \in P$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι μη κενό σύνολο αλλιώς τότε παίρνουμε $f = \varnothing$ και έχουμε το ζητούμενο.

Θέτουμε $P_x = \{y \in B \mid (x,y) \in P\}$, για $x \in A$. Τότε $P_x \neq \varnothing$ για κάθε $x \in A$ και μάλιστα η συνάρτηση

$$\pi : A \to \mathcal{P}(B) : \pi(x) = P_x$$

ορίζει την μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων $(P_x)_{x \in A}$. Από την υπόθεση το σύνολο $\prod_{x \in A} P_x$ είναι μη κενό. Έστω $f \in \prod_{x \in A} P_x$, τότε $f : A \to B$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x) \in P_x$, δηλαδή $(x, f(x)) \in P$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε μη κενά σύνολα A, B και μια συνάρτηση $f : A \to B$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μεγιστικό μη κενό σύνολο $C \subseteq A$ πάνω στο οποίο η f είναι 1-1, δηλαδή ο περιορισμός $f \restriction C$ είναι 1-1 και για κάθε $D \subseteq A$ για το οποίο η $f \restriction D$ είναι 1-1, το C δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του D.

Λύση.

Θεωρούμε το σύνολο $P = \{C \in \mathcal{P}(A) \mid f \restriction C : \ 1-1\}$, μαζί με τη σχέση $\subseteq$. Τότε ο $(P, \subseteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος και μάλιστα μη κενός: αν $a \in A$ τότε $\{a\} \in P$. (Μπορούμε επίσης να πούμε $\varnothing \in P$.) Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Zorn στον χώρο $(P, \subseteq)$.

Έστω $\mathcal{D}$ μια αλυσίδα στον $(P, \subseteq)$. Θεωρούμε το σύνολο $S = \bigcup \mathcal{D}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $S \in P$, δηλαδή ότι ο περιορισμός $f \restriction S$ είναι 1-1 συνάρτηση. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in S = \bigcup \mathcal{D}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Δείχνουμε $x_1 = x_2$. Υπάρχουν $C_1, C_2 \in \mathcal{D}$ με $x_1 \in C_1$ και $x_2 \in C_2$. Αφού το $\mathcal{D}$ είναι $\subseteq$-αλυσίδα θα έχουμε είτε $C_1 \subseteq C_2$ είτε $C_2 \subseteq C_1$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $C \in \mathcal{D}$ με $x_1, x_2 \in C$. Αφού η αλυσίδα $\mathcal{D}$ αποτελείται από στοιχεία του P έχουμε $C \in P$, δηλαδή η συνάρτηση $f \restriction C$ είναι 1-1. Με βάση τα $x_1, x_2 \in C$ και $f(x_1) = f(x_2)$ καταλήγουμε $x_1 = x_2$.

Άρα $S \in P$. Προφανώς $C \subseteq S$ για κάθε $C \in \mathcal{D}$. Επομένως το $S = \bigcup \mathcal{D}$ είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\mathcal{D}$ στο P.

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε αλυσίδα στον $(P, \subseteq)$ έχει άνω φράγμα. Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο C του P. Αν το C ήταν κενό τότε παίρνοντας ένα $a \in A$ θα είχαμε $\{a\} \in P$ και το $C = \varnothing$ θα ήταν γνήσιο υποσύνολο του $\{a\}$, που αντιτίθεται στη μεγιστικότητα του C. Επομένως $C \neq \varnothing$. Τέλος αν $C \subseteq D$ και η $f \restriction D$ είναι 1-1, τότε $D \in P$ και αφού το C είναι μεγιστικό έχουμε $C = D$.