

# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις  
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών



## 4ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:  
B. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1** (Ασκήσεις 3.13 και 3.16).

- (i) Δείξτε ότι  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  και  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .  
(ii) Δείξτε ότι  $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$ .

**Λύση.**

(i) Για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$x \in \mathcal{P}(\emptyset) \iff x \subseteq \emptyset \iff x = \emptyset \iff x \in \{\emptyset\}$$

για κάθε  $x$ , επομένως από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ . Για τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$x \in \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \iff x \subseteq \{\emptyset\} \iff x = \emptyset \vee x = \{\emptyset\} \iff x \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

για κάθε  $x$ . Πάλι από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

(ii) Αν υπήρχε  $x \in \bigcup \emptyset$  τότε θα υπήρχε ένα σύνολο  $A$  με τις ιδιότητες  $A \in \emptyset$  και  $x \in A$ . Αυτό είναι άτοπο γιατί το κενό σύνολο  $\emptyset$  δεν περιέχει στοιχεία. Άρα  $\bigcup \emptyset = \emptyset$ .

Αν υπήρχε  $x \in \bigcup \{\emptyset\}$  τότε θα υπήρχε ένα σύνολο  $A$  με τις ιδιότητες  $A \in \{\emptyset\}$  και  $x \in A$ . Εφόσον  $A \in \{\emptyset\}$  θα ίσχυε  $A = \emptyset$  το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το  $x \in A$ . Άρα  $\bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$ .

**Άσκηση 2.** Διατυπώστε αυστηρά τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και της Ένωσης.

**Λύση.**

**Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου:**

$$(\forall z)(\exists w) [ \text{set}(z) \longrightarrow \{ \text{set}(w) \ \& \ (\forall y)[ y \in w \iff (\forall t)[ t \in y \longrightarrow t \in z ] ] \} ].$$

Εξήγηση: Αν έχουμε ένα σύνολο  $z$  τότε υπάρχει ένα σύνολο  $w$  (το δυναμοσύνολο του  $z$ ) με την ιδιότητα τα στοιχεία του  $w$  να είναι ακριβώς όλα τα  $y$  που ικανοποιούν  $y \subseteq z$ . Με άλλα λόγια το  $w$  είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του  $z$ .

**Αξίωμα της Ένωσης:**

$$(\forall z)(\exists w) [ \text{set}(z) \longrightarrow \{ \text{set}(w) \ \& \ (\forall x)[ x \in w \iff (\exists y)[ y \in z \ \& \ x \in y ] ] \} ].$$

Εξήγηση: Αν έχουμε ένα σύνολο  $z$  τότε υπάρχει ένα σύνολο  $w$  (η ένωση του  $z$ ) με την ιδιότητα τα στοιχεία του  $w$  να είναι ακριβώς όλα τα  $x$  που ικανοποιούν  $x \in y$  για κάποιο  $y \in z$ .

**Άσκηση 3.** Δίνονται αντικείμενα  $x, y, a, b$ . Αποδείξτε με βάση τα αξιώματα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα  $x, y, a, b$ .

**Λύση.**

Από το Αξίωμα του Ζεύγους υπάρχουν τα σύνολα  $\{x, y\}$  και  $\{a, b\}$ . Με μία ακόμα εφαρμογή του Αξιώματος του Ζεύγους υπάρχει το σύνολο  $\mathcal{E} = \{\{x, y\}, \{a, b\}\}$  και από το Αξίωμα της Ένωσης υπάρχει το σύνολο  $\bigcup \mathcal{E}$ .

Τότε για κάθε  $t$ ,

$$\begin{aligned} t \in \bigcup \mathcal{E} &\iff (\exists z)[ z \in \mathcal{E} \ \& \ t \in z ] \\ &\iff t \in \{x, y\} \vee t \in \{a, b\} \\ &\iff t = x \vee t = y \vee t = a \vee t = b. \end{aligned}$$

Δηλαδή τα στοιχεία του  $\bigcup \mathcal{E}$  είναι ακριβώς τα αντικείμενα  $x, y, a, b$ . Από το Αξίωμα της Έκτασης το  $\bigcup \mathcal{E}$  είναι το μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς αυτά τα αντικείμενα.

**Άσκηση 4** (Πρόβλημα x3.2). Δίνονται σύνολα  $A$  και  $B$ . Εξετάστε με βάση τα αξιώματα αν υπάρχουν σύνολα  $X_1, X_2, X_3$  και  $X_4$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} z \in X_1 &\iff (\exists x \in A)[z = \{\emptyset, x\}] \\ z \in X_2 &\iff \text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset \\ z \in X_3 &\iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \{x, y\}] \\ z \in X_4 &\iff (\exists X)[X \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(X)] \end{aligned}$$

όπου το  $z$  είναι αντικείμενο του κόσμου  $\mathcal{W}$ .

**Υπόδειξη:** Όπου δείχνετε ότι ορίζεται σύνολο εφαρμόστε το Αξίωμα Διαχωρισμού σε κατάλληλο σύνολο  $Y$  και κατάλληλη οριστική συνθήκη  $P$ .

**Λύση.**

Υπάρχει τέτοιο σύνολο  $X_1$ . Παρατηρούμε πως αν  $x \in A$  τότε  $\{\emptyset, x\} \subseteq A \cup \{\emptyset\}$  και άρα  $\{\emptyset, x\} \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$ . Άρα πρέπει να πάρουμε το σύνολο όλων των  $z \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$  με την ιδιότητα  $z = \{\emptyset, x\}$  για κάποιο  $x \in A$ , δηλαδή

$$X_1 = \{z \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\}) \mid \exists x \in A(z = \{\emptyset, x\})\}.$$

(Σχόλιο: Η συνθήκη  $P(z) \iff \exists x \in A(z = \{\emptyset, x\})$  είναι οριστική, καθώς

$$P(z) \iff \exists x \forall t (t \in z \iff t = \emptyset \vee t = x).$$

Θα αποφεύγουμε όμως να αναλύουμε σε τόσο βάθος ότι μια συνθήκη είναι οριστική.)

Αφού τα  $A, \{\emptyset\}$  είναι σύνολα, τότε από τα Αξιώματα της Ένωσης και του Δυναμοσυνόλου το  $\mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$  είναι επίσης σύνολο. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού το  $X_1$  είναι σύνολο. Σύμφωνα με τα πιο πάνω το  $X_1$  ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο  $X_2$ . Αν υπήρχε, τότε από το Αξίωμα του Ζεύγους θα είχαμε το σύνολο  $\mathcal{E} = \{X_2, \{\emptyset\}\}$  και από το Αξίωμα της Ένωσης θα είχαμε το σύνολο  $X_2 \cup \{\emptyset\}$ . Τότε θα ίσχυε

$$\text{set}(z) \iff [\text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset] \vee z = \emptyset \iff z \in X_2 \vee z = \emptyset \iff z \in X_2 \cup \{\emptyset\}$$

για κάθε  $z$ . Επομένως το  $X_2 \cup \{\emptyset\}$  θα ήταν το σύνολο όλων των συνόλων, που όπως ξέρουμε από το μάθημα αυτό είναι άτοπο.

Υπάρχει τέτοιο σύνολο  $X_3$ . Όπως και στο  $X_1$  η παρατήρηση είναι πως αν  $x \in A$  και  $y \in B$  τότε  $\{x, y\} \subseteq A \cup B$ , δηλαδή  $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ . Άρα από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$X_3 = \{z \in \mathcal{P}(A \cup B) \mid \exists x \exists y (x \in A \ \& \ y \in B \ \& \ z = \{x, y\})\}.$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω παρατήρηση το  $X_3$  ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Τέλος υπάρχει τέτοιο σύνολο  $X_4$ . Παρατηρούμε πως αν  $z = \mathcal{P}(X)$  για κάποιο  $X \subseteq A$ , τότε  $z = \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(A)$  και άρα  $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ . Εφαρμόζοντας δύο φορές το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου το  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  είναι σύνολο. Επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$X_4 = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid \exists x (x \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(x))\}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε το σύνολο  $X_4$  ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

**Άσκηση 5** (Πρόβλημα x3.1 - Παραλλαγή). Δείξτε από τα αξιώματα ότι για κάθε σύνολο  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  υπάρχει ένα σύνολο  $I$  έτσι ώστε για κάθε  $x$ ,

$$x \in I \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Δηλαδή τα στοιχεία του  $I$  είναι τα αντικείμενα που είναι στοιχεία κάθε μέλους του  $\mathcal{E}$ . Εξηγήστε γιατί το  $I$  είναι μοναδικό.

**Σχόλιο:** Αυτό το μοναδικό σύνολο  $I$  ονομάζεται *τομή του  $\mathcal{E}$*  και συμβολίζεται με  $\bigcap \mathcal{E}$ . Στην περίπτωση όπου  $\mathcal{E} = \{A, B\}$  για κάποια σύνολα  $A, B$  συμβολίζουμε την τομή  $\bigcap \mathcal{E}$  με  $A \cap B$ .

Σε απόμεινη άσκηση δείχνουμε ότι είναι ουσιαστικό να θεωρήσουμε πως  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  για να ορίσουμε την τομή  $\bigcap \mathcal{E}$ .

**Υπόδειξη:** Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τομής του  $\mathcal{E}$  πρέπει να ανήκει και στην ένωση του  $\mathcal{E}$  που γνωρίζουμε ότι είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης.

**Λύση.**

Πρώτα παρατηρούμε ότι το  $\bigcup \mathcal{E}$  είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης. Επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού το

$$I = \{x \in \bigcup \mathcal{E} \mid (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]\}$$

είναι επίσης σύνολο.

Δείχνουμε ότι το  $I$  ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία. Έστω  $x \in I$ , από τον ορισμό του  $I$  έχουμε ειδικότερα ότι  $(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$ .

Αντίστροφα θεωρούμε ένα  $x$  που ικανοποιεί  $(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$ . Από τον ορισμό του  $I$  αρκεί να δείξουμε ότι  $x \in \bigcup \mathcal{E}$ . Εφόσον  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  υπάρχει  $A \in \mathcal{E}$ , και επειδή  $x \in I$  θα έχουμε ειδικότερα  $x \in A$ . Είναι προφανές ότι  $A \subseteq \bigcup \mathcal{E}$  επομένως  $x \in \bigcup \mathcal{E}$ .

Τέλος εξηγούμε γιατί ένα τέτοιο σύνολο  $I$  είναι μοναδικό. Αν έχουμε ένα άλλο σύνολο  $I'$  που ικανοποιεί την ιδιότητα  $x \in I' \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$  για κάθε  $x$ , τότε προφανώς  $x \in I \iff x \in I'$  για κάθε  $x$ , δηλαδή τα  $I$  και  $I'$  έχουν τα ίδια στοιχεία. Από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει  $I = I'$ .

**Άσκηση 6.**

- (i) Δείξτε ότι ο κόσμος  $\mathcal{W}$  δεν είναι σύνολο.
- (ii) Υπάρχει σύνολο  $I$  με την ιδιότητα  $x \in I$  για κάθε  $x$ ;
- (iii) Υπάρχει ένα σύνολο  $I$  με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[x \in A];$$

**Λύση.**

(i) Αν ο κόσμος  $\mathcal{W}$  ήταν σύνολο τότε από το Αξίωμα Διαχωρισμού θα υπήρχε το σύνολο

$$V = \{x \in \mathcal{W} \mid \text{set}(x)\}$$

δηλαδή θα υπήρχε το σύνολο όλων των συνόλων, άτοπο.

Αλλιώς μπορεί κανείς να δείξει το ζητούμενο κατευθείαν ως εξής. Αν ο κόσμος  $\mathcal{W}$  ήταν σύνολο τότε από το Αξίωμα Διαχωρισμού θα υπήρχε το σύνολο

$$r(\mathcal{W}) = \{x \in \mathcal{W} \mid x \notin x\}.$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι  $r(A) \notin A$  για κάθε σύνολο  $A$ , επομένως θα είχαμε  $r(\mathcal{W}) \notin \mathcal{W}$  που είναι άτοπο γιατί το  $r(\mathcal{W})$  -ως σύνολο- θα ήταν αντικείμενο του κόσμου  $\mathcal{W}$ .

(ii) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει σύνολο  $I$  με την ιδιότητα  $x \in I$  για κάθε  $x$ . (Προσοχή: Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το Αξίωμα της Έκτασης ότι  $\mathcal{W} = I$  γιατί αυτό το αξίωμα αναφέρεται σε σύνολα και ο κόσμος  $\mathcal{W}$  δεν είναι σύνολο.)

Θεωρούμε το σύνολο  $r(I) = \{y \in I \mid y \notin y\}$ . Τότε το  $x = r(I)$  ανήκει στον κόσμο  $\mathcal{W}$  αλλά όπως έχουμε αποδείξει δεν ανήκει στο  $I$ , κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεσή μας για το  $I$ .

(iii) Αν  $\mathcal{E} = \emptyset$  ισχυριζόμαστε ότι για κάθε  $x$  ισχύει

$$(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την άρνηση της προηγούμενης πρότασης,

$$(\exists A \in \mathcal{E})[x \notin A],$$

η οποία δεν ισχύει για κανένα  $x$  αφού το  $\mathcal{E} = \emptyset$  δεν περιέχει στοιχεία. Εφόσον η άρνηση της πρότασης δεν ισχύει για κανένα  $x$ , η πρόταση θα ισχύει για όλα τα  $x$ .

Τώρα αν υπήρχε σύνολο  $I$  με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[x \in A]$$

για κάθε  $x$ , τότε αφού το δεύτερο μέρος της ισοδυναμίας ισχύει πάντα, θα είχαμε  $x \in I$  για κάθε  $x$ , που αντιβαίνει στο (ii).