Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Συμβολισμός. Με $[0, n)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $k \in \mathbb{N}$ με $k < n$. Υπενθυμίζεται ότι ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, n)$. Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο $n \in \mathbb{N}$ είναι μοναδικό. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A θέτουμε

$$\#A = \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ με } A =_c [0, n).$$

Άσκηση 1. Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \subseteq [0, n)$ το A είναι πεπερασμένο και $\#A \leq n$.

(ii) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο B και κάθε $A \leq_c B$ το A είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#A \leq \#B$.

Λύση.

(i) Με επαγωγή στο n. Αν $n = 0$ τότε $A \subseteq [0, 0) = \emptyset$ και άρα $A = \emptyset = [0, 0)$. Συνεπώς το A είναι πεπερασμένο και $\#A = 0$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι κάθε $A \subseteq [0, n)$ είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#A \leq n$. Δείχνουμε ότι ισχύει το ίδιο για το Sn στη θέση του n.

Έστω $A \subseteq [0, Sn)$. Αφού $[0, Sn) = [0, n) \cup \{n\}$ (γνωστή άσκηση) έχουμε

$$A = (A \cap [0, n)) \cup (A \cap \{n\}).$$

Το σύνολο $A \cap [0, n)$ είναι υποσύνολο του $[0, n)$. Επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#(A \cap [0, n)) \leq n$. Θέτουμε $m = \#(A \cap [0, n)) \leq n$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f : [0, m) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A \cap [0, n)$ που είναι $1-1$ και επί.

Αν $n \notin A$ τότε $A = A \cap [0, n)$, επομένως το A είναι πεπερασμένο και $\#A = \#(A \cap [0, n)) = m \leq n < Sn$.

Αν $n \in A$ τότε ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g : [0, Sm) = [0, m) \cup \{m\} \longrightarrow A = (A \cap [0, n)) \cup \{n\} : g(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [0, m), \\ n, & k = m. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια επεκτείνουμε την f στο σύνολο $[0, m) \cup \{m\}$ δίνοντας την τιμή n στο m. Είναι σαφές ότι η g είναι $1-1$ και επί. Άρα το A είναι πεπερασμένο και $\#A = m + 1 \leq n + 1 = Sn$.

(ii) Το ζητούμενο είναι άμεσο από το (i). Αν $A \leq_c B$ και $B =_c [0, n)$ τότε το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο C του $[0, n)$. Τότε το C είναι πεπερασμένο και $\#C \leq n$. Αφού το A είναι ισοπληθικό με το πεπερασμένο σύνολο C είναι άμεσο ότι το A είναι και αυτό πεπερασμένο. Επιπλέον $\#A = \#C \leq n = \#B$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε δύο **ξένα** πεπερασμένα σύνολα A, B και $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$. Δείξτε με επαγωγή στο $\mathbb{N}$ ότι $[0, m + n) =_c A \cup B$.

Λύση.

Σταθεροποιούμε τα A, m και δείχνουμε ότι για κάθε B, n με $B =_c [0, n)$ και $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Για $n = 0$, αφού $B =_c [0, n)$ έχουμε $B = \emptyset$. Άρα $[0, m + n) = [0, m)$ και $A \cup B = A$. Αφού $A =_c [0, m)$ προκύπτει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο B με $B =_c [0, n)$ και $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο B με $B =_c [0, Sn)$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση

$$g : [0, Sn) = [0, n) \cup \{n\} \longrightarrow B.$$

Η ιδέα είναι να αφαιρέσουμε ένα στοιχείο από το B και να εφαρμόσουμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Ορίζουμε $B' = g[[0, n)]$. Τότε $B' =_c [0, n)$ και άρα από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχει μια $1-1$ και επί συνάρτηση

$$f : [0, m+n) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A \cup B'.$$

Έχουμε $B = B' \cup \{g(n)\}$, $g(n) \notin B'$ (αφού η g είναι $1-1$) και $g(n) \notin A$ (αφού τα A, B είναι ξένα). Επιπλέον

$$[0, m + Sn) = [0, S(m+n)) = [0, m+n) \cup \{m+n\}.$$

Ορίζουμε

$$h : [0, m+Sn) \longrightarrow A \cup B : h(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [0, m+n), \\ g(n), & k = m+n. \end{cases}$$

Τότε η h είναι $1-1$ και επί. Επομένως $A \cup B =_c [0, m + Sn)$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων A και B είναι πεπερασμένο σύνολο και πως

$$\#(A \cup B) \leq \#A + \#B.$$

Λύση.

Αν τα A, B είναι ξένα πεπερασμένα σύνολα, αφού $A = [0, \#A)$ και $B = [0, \#B)$ έχουμε από την Άσκηση 2 ότι $A \cup B =_c [0, \#A + \#B)$. Επομένως το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Αν τα A, B είναι τυχαία σύνολα (δηλαδή όχι απαραίτητα ξένα) τότε

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \leq_c (\{\emptyset\} \times A) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times B) = A \uplus B.$$

Είναι προφανές ότι $\{\emptyset\} \times A =_c A =_c [0, \#A)$ και επομένως $\#\left(\{\emptyset\} \times A\right) = \#A$. Ομοίως $\#\left(\{\{\emptyset\}\} \times B\right) = \#B$.

Αφού τα σύνολα $\{\emptyset\} \times A$ και $\{\{\emptyset\}\} \times B$ είναι ξένα έχουμε από πιο πάνω ότι η ξένη ένωση $A \uplus B$ είναι πεπερασμένο σύνολο και

$$\#\left(A \uplus B\right) = \#A + \#B.$$

Επιπλέον αφού $A \cup B \leq_c A \uplus B$ προκύπτει από την Άσκηση 1 ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι πεπερασμένο και ότι

$$\#(A \cup B) \leq \#\left(A \uplus B\right) = \#A + \#B.$$