Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με μέγιστο στοιχείο είναι επαγωγικός, δηλαδή κάθε αλυσίδα (ισοδύναμα κάθε υποσύνολό του) έχει supremum.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x7.1)**.** Δείξτε ότι κάθε γραμμική διάταξη ενός πεπερασμένου συνόλου είναι καλή διάταξη.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι κάθε μερική διάταξη σε ένα πεπερασμένο σύνολο έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο. (Άσκηση σε προηγούμενο φυλλάδιο.)

Άσκηση 3. Θεωρούμε δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$, $(V, \leq_V)$. Δείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $\pi : U \to V$ που ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \pi(0_U) &= 0_V \\ \pi(S_U(x)) &= S_V(\pi(x)) && \text{αν } x \in U, \\ \pi(y) &= \sup\{\pi(x) \mid x <_U y\} && \text{αν } y \text{ οριακό σημείο.} \end{aligned}$$

Ορισμός: Το **άθροισμα** $P + Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ είναι το σύνολο

$$P + Q = (\{0\} \times P) \bigcup (\{1\} \times Q)$$

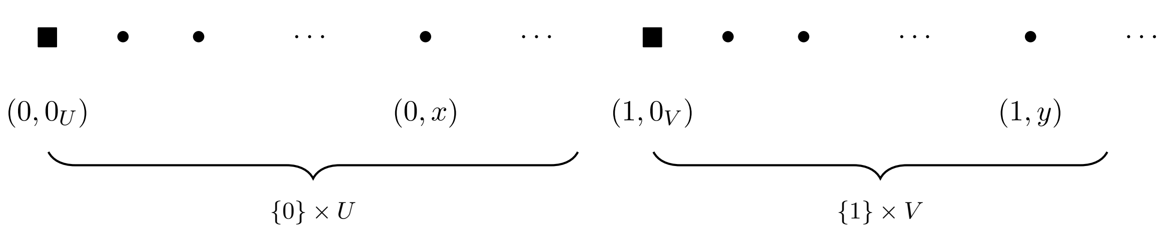
(όπου $0 = \emptyset$ και $1 = \{\emptyset\}$) μαζί με τη διάταξη

$$(i, x) \leq (j, y) \iff [i = j = 0 \;\&\; x \leq_P y] \vee [i = j = 1 \;\&\; x \leq_Q y] \vee [i = 0 \;\&\; j = 1]$$

όπου $(i, x), (j, y) \in P + Q$. Παρατηρήστε ότι αν $i = 0$ τότε $x \in P$ και αν $i = 1$ τότε $x \in Q$.

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίγραφα των P, Q (τα $\{0\} \times P$ και $\{1\} \times Q$ αντίστοιχα) και τοποθετούμε το αντίγραφο του P "πριν" από το αντίγραφο του Q (αυτό προκύπτει από το $(0, x) \leq (1, y)$).

Το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων U, V σχηματικά:



Άσκηση 4 (Προβλήματα x7.2-x7.6)**.** Δείξτε ή απαντήστε τα ακόλουθα όσον αφορά το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

(i) Αν $U =_o U'$ και $V =_o V'$ τότε $U + V =_o U' + V'$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, U', V, V'. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(ii) $U + (V + W) =_o (U + V) + W$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(iii) Αν U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος ποιος είναι ο χώρος $U + \{0\}$ ως προς τη σχέση ομοιότητας $=_o$; (Συνοπτική απάντηση.)

(iv) Αν U, V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι τότε το άθροισμα $U + V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

(v) Γιατί ισχύει $\{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} + \{0\}$; Συμπεράνετε ότι η πρόσθεση καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι μεταθετική πράξη.

Άσκηση 5. Για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V δείξτε ότι

$$U <_o V \iff (\exists x \in V)[U =_o seg_V(x)],$$

όπου $seg_V(x)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $y \in V$ με $y <_V x$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι τα αρχικά τμήματα του V είναι είτε το V είτε σύνολα της μορφής $seg_V(x)$ όπου $x \in V$. (Γνωστό από προηγούμενη άσκηση.)

Άσκηση 6 (7.28. Άσκηση)**.** Δείξτε ότι η σύνθεση αρχικών ομοιοτήτων είναι αρχική ομοιότητα.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x7.14)**.** Δείξτε ότι για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W έχουμε

$$U <_o V \ \&\ V \leq_o W \implies U <_o W$$
$$U \leq_o V \ \&\ V <_o W \implies U <_o W.$$

(Θεωρήστε γνωστή τη μεταβατική ιδιότητα.)

Άσκηση 8 (Πρόβλημα x7.15 - Παραλλαγή)**.** Δείξτε, *χωρίς τη χρήση* του Αξιώματος Επιλογής, ότι κάθε δύο καλά διατάξιμα σύνολα είναι συγκρίσιμα ως προς $\leq_c$.

Ένα σύνολο A είναι **καλά διατάξιμο** αν υπάρχει μια καλή διάταξη $\leq$ στο A.