Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με μέγιστο στοιχείο είναι επαγωγικός, δηλαδή κάθε αλυσίδα (ισοδύναμα κάθε υποσύνολό του) έχει supremum.

Λύση.

Έστω $S \subseteq U$. (Το S είναι φυσικά αλυσίδα γιατί ο $(U, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένος χώρος.) Θεωρούμε το σύνολο

$$UB = \{y \in U \mid (\forall x \in S)[x \leq y]\}$$

των άνω φραγμάτων (upper bounds) του συνόλου S. Το $\max U$, που υπάρχει από την υπόθεσή μας, ικανοποιεί $x \leq \max U$ για κάθε $x \in S$. Επομένως $\max U \in UB$ και $UB \neq \emptyset$.

Εφόσον ο U είναι καλά διατεταγμένος χώρος υπάρχει το $\min UB$, δηλαδή το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του S. Αυτό σημαίνει $\sup S = \min UB$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x7.1)**.** Δείξτε ότι κάθε γραμμική διάταξη ενός πεπερασμένου συνόλου είναι καλή διάταξη.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι κάθε μερική διάταξη σε ένα πεπερασμένο σύνολο έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο. (Άσκηση σε προηγούμενο φυλλάδιο.)

Λύση.

Έστω P πεπερασμένο σύνολο και $\leq$ μια γραμμική διάταξη στο P. Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq P$. Τότε το A είναι πεπερασμένο και με τον περιορισμό της $\leq$ στο A είναι ένας διατεταγμένος χώρος. Σύμφωνα με την υπόδειξη το A έχει ελαχιστικό στοιχείο x. Δηλαδή για κάθε $y \in A$ ισχύει $y \not< x$ και αφού η $\leq$ είναι γραμμική έχουμε $x \leq y$. Άρα $x = \min A$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$, $(V, \leq_V)$. Δείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $\pi : U \to V$ που ικανοποιεί:

$$\begin{aligned}
\pi(0_U) &= 0_V \\
\pi(S_U(x)) &= S_V(\pi(x)) && \text{αν } x \in U, \\
\pi(y) &= \sup\{\pi(x) \mid x <_U y\} && \text{αν } y \text{ οριακό σημείο.}
\end{aligned}$$

Λύση.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $\pi_1, \pi_2 : U \to V$ που ικανοποιούν τις προηγούμενες εξισώσεις και δείχνουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι για κάθε $y \in U$ ισχύει $\pi_1(y) = \pi_2(y)$.

Για $y = 0_U$ έχουμε $\pi_1(0_U) = 0_V = \pi_2(0_U)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $y \in U$ ισχύει

$$(\forall x <_U y)[\pi_1(x) = \pi_2(x)].$$

Δείχνουμε ότι $\pi_1(y) = \pi_2(y)$. Αν ο y είναι επόμενος, τότε υπάρχει $x \in U$ με $y = S_U(x)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\pi_1(y) &= \pi_1(S_U(x)) \\
&= S_V(\pi_1(x)) && \text{(ιδιότητες } \pi_1) \\
&= S_V(\pi_2(x)) && \text{(επαγωγική υπόθεση, } x <_U S_U(x) = y) \\
&= \pi_2(S_U(x)) && \text{(ιδιότητες } \pi_2) \\
&= \pi_2(y).
\end{aligned}$$

Αν το y είναι οριακό σημείο του U, τότε

$$\begin{aligned} \pi_1(y) &= \sup\{\pi_1(x) \mid x <_U y\} && \text{(ιδιότητες } \pi_1\text{)} \\ &= \sup\{\pi_2(x) \mid x <_U y\} && \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\ &= \pi_2(y) && \text{(ιδιότητες } \pi_2\text{).} \end{aligned}$$

Ορισμός: Το **άθροισμα** $P + Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ είναι το σύνολο

$$P + Q = (\{0\} \times P) \bigcup (\{1\} \times Q)$$

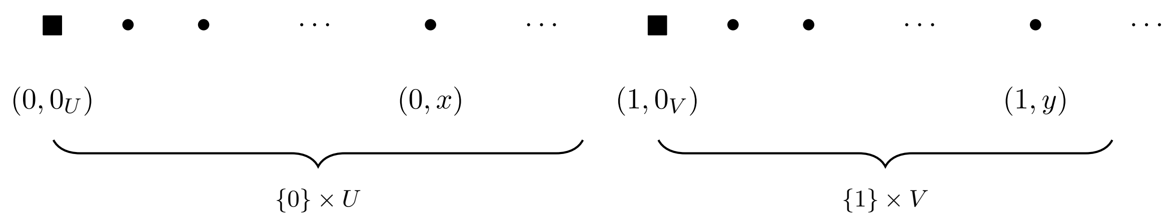
(όπου $0 = \emptyset$ και $1 = \{\emptyset\}$) μαζί με τη διάταξη

$$(i, x) \leq (j, y) \iff [i = j = 0 \;\&\; x \leq_P y] \;\vee\; [i = j = 1 \;\&\; x \leq_Q y] \;\vee\; [i = 0 \;\&\; j = 1]$$

όπου $(i, x), (j, y) \in P + Q$. Παρατηρήστε ότι αν $i = 0$ τότε $x \in P$ και αν $i = 1$ τότε $x \in Q$.

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίγραφα των P, Q (τα $\{0\} \times P$ και $\{1\} \times Q$ αντίστοιχα) και τοποθετούμε το αντίγραφο του P "πριν" από το αντίγραφο του Q (αυτό προκύπτει από το $(0, x) \leq (1, y)$).

Το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων U, V σχηματικά:



Άσκηση 4 (Προβλήματα x7.2-x7.6)**.** Δείξτε ή απαντήστε τα ακόλουθα όσον αφορά το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

(i) Αν $U =_o U'$ και $V =_o V'$ τότε $U + V =_o U' + V'$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, U', V, V'. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(ii) $U + (V + W) =_o (U + V) + W$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(iii) Αν U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος ποιος είναι ο χώρος $U + \{0\}$ ως προς τη σχέση ομοιότητας $=_o$; (Συνοπτική απάντηση.)

(iv) Αν U, V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι τότε το άθροισμα $U + V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

(v) Γιατί ισχύει $\{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} + \{0\}$; Συμπεράνετε ότι η πρόσθεση καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι μεταθετική πράξη.

Λύση.

(i) Έστω $\pi_1 : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow U'$ και $\pi_2 : V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V'$ ομοιότητες. Ορίζουμε

$$\pi : (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times V) \to (\{0\} \times U') \cup (\{1\} \times V')$$

με $\pi(0, x) = (0, \pi_1(x))$ και $\pi(1, y) = (1, \pi_2(y))$, όπου $x \in U$ και $y \in V$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η π είναι ομοιότητα.

(ii) Από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} U + (V + W) &= (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times (V + W)) = (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times [(\{0\} \times V) \cup (\{1\} \times W)]) \\ &= (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times \{0\} \times V) \cup (\{1\} \times \{1\} \times W). \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$(U + V) + W = (\{0\} \times \{0\} \times U) \cup (\{0\} \times \{1\} \times V) \cup (\{1\} \times W).$$

Οπότε ορίζουμε

$$\pi : U + (V + W) \to (U + V) + W : \pi(0, x) = (0, 0, x), \quad \pi(1, 0, y) = (0, 1, y), \quad \pi(1, 1, z) = (1, z)$$

όπου $x \in U$, $y \in V$ και $z \in W$.

(iii) Ο $U+\{0\} = (\{0\}\times U)\cup(\{1\}\times\{0\}) = (\{0\}\times U)\cup\{(1,0)\}$ είναι όμοιος με τον **επόμενο** $Succ(U)$ του U, δηλαδή τον χώρο που προκύπτει αν τοποθετήσουμε το στοιχείο $r(U) \notin U$ "μετά" από όλα τα στοιχεία του U. Η ομοιότητα από τον $U+\{0\}$ στον $Succ(U)$ απεικονίζει τα στοιχεία του συνόλου $(\{0\}\times U)\cup\{(1,0)\}$ ως εξής: $(0,x) \mapsto x$ και $(1,0) \mapsto r(U)$.

(iv) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $U + V = (\{0\} \times U) + (\{1\} \times V)$.

1η Περίπτωση: $A \cap (\{0\} \times U) \neq \emptyset$. Τότε για να βρούμε το ελάχιστο του A θα κοιτάξουμε μέσα στον U. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{x \in U \mid (0,x) \in A\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το B είναι ένα μη κενό υποσύνολο του U και συνεπώς υπάρχει το $\min B \in U$. Δείχνουμε ότι $(0,\min B) = \min A$, όπου το πρώτο minimum λαμβάνεται μέσα στον U ενώ το δεύτερο μέσα στον $U+V$. Για ευκολία συμβολίζουμε με $\trianglelefteq$ τη διάταξη στον $U+V$ και με $\triangleleft$ το αυστηρό της μέρος.

Επειδή $\min B \in B$ έχουμε $(0,\min B) \in A$. Έστω $(i,x) \in A$, αν $i = 0$ τότε $x \in B$, οπότε $\min B \leq x$ και $(0,\min B) \trianglelefteq (0,x) = (i,x)$. Αν $i = 1$ (και άρα $x \in V$) τότε $(0,\min B) \triangleleft (1,x) = (i,x)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $(0,\min B) \trianglelefteq (i,x)$ για κάθε $(i,x) \in A$. Καταλήγουμε ότι $(0,\min B) = \min A$.

2η Περίπτωση: $A \cap (\{0\} \times U) = \emptyset$. Τότε $A \subseteq \{1\} \times V$ και επομένως για να βρούμε το ελάχιστο του A θα πρέπει να κοιτάξουμε μέσα στον V. Θεωρούμε το σύνολο

$$C = \{y \in V \mid (1,y) \in A\}.$$

Αφού $\emptyset \neq A \subseteq \{1\}\times V$ έχουμε $C \neq \emptyset$. Επομένως υπάρχει το $\min C \in V$. Δείχνουμε ότι $(1,\min C) = \min A$. Επειδή $\min C \in C$ έχουμε $(1,\min C) \in A$. Έστω $(i,x) \in A$. Αν $i = 0$ τότε $x \in U$ οπότε $A\cap(\{0\}\times U) \neq \emptyset$, που είναι άτοπο γιατί είμαστε στη 2η Περίπτωση. Άρα $i = 1$ και $x \in V$. Αφού $(1,x) = (i,x) \in A$ έχουμε $x \in C$ και άρα $\min C \leq x$. Επομένως $(1,\min C) \leq (1,x)$. Καταλήγουμε ότι $(1,\min C) \leq (i,x)$ για κάθε $(i,x) \in A$ και άρα $(1,\min C) = \min A$.

(v) Ο χώρος $\{0\} + \mathbb{N} = (\{0\} \times \{0\}) \bigcup (\{1\} \times \mathbb{N}) = \{(0,0)\} \bigcup (\{1\} \times \mathbb{N})$ είναι όμοιος με τον $\mathbb{N}$. Στην ουσία προσθέτουμε ένα στοιχείο στα αριστερά του $\mathbb{N}$, τότε ο καινούργιος χώρος έχει τη μορφή:

$$\underset{(0,0)}{\square} \quad \underbrace{\blacksquare \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots}_{\{1\}\times\mathbb{N}}$$

Την ίδια μορφή έχει και ο $\mathbb{N}$. Αυστηρά ορίζουμε την απεικόνιση $\pi : \{(0,0)\} \bigcup (\{1\}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N} : \pi(0,0) = 0_{\mathbb{N}}$ και $\pi(1,n) = n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Τότε η π είναι η ζητούμενη ομοιότητα.

Από την άλλη ο χώρος $\mathbb{N} + \{0\} = (\{0\} \times \mathbb{N}) \bigcup (\{1\} \times \{0\}) = (\{0\} \times \mathbb{N}) \bigcup\{(1,0)\}$ έχει το $(1,0)$ ως οριακό σημείο:

$$\underbrace{\blacksquare \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots}_{\{0\}\times\mathbb{N}} \quad \underset{(1,0)}{\square}$$

Αυστηρά: αν $(i,n) < (1,0)$ τότε $i = 0$ και επομένως $(0,n) < (0, n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}) < (1,0)$, άρα το $(1,0)$ δεν μπορεί να είναι ο επόμενος του (i,n).

Ο δύο χώροι $\mathbb{N} + \{0\}$ και $\{0\} + \mathbb{N}$ δεν είναι όμοιοι γιατί αλλιώς θα είχαμε

$$\mathbb{N} + \{0\} =_o \{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N} =_o \{0\} \times \mathbb{N},$$

δηλαδή ο $\mathbb{N} + \{0\}$ θα ήταν όμοιος με το γνήσιο αρχικό τμήμα του $seg((1,0)) = \{0\} \times \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί ένας καλά διατεταγμένος χώρος δεν μπορεί να είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του (γνωστό Θεώρημα).

Άσκηση 5. Για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V δείξτε ότι

$$U <_o V \iff (\exists x \in V)[U =_o seg_V(x)],$$

όπου $seg_V(x)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $y \in V$ με $y <_V x$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι τα αρχικά τμήματα του V είναι είτε το V είτε σύνολα της μορφής $seg_V(x)$ όπου $x \in V$. (Γνωστό από προηγούμενη άσκηση.)

Λύση.
($\Longrightarrow$) Θεωρούμε μια αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$. Το σύνολο $\pi[U]$ είναι αρχικό τμήμα του V. Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε είτε $\pi[U] = V$ είτε $\pi[U] = seg_V(x)$ για κάποιο $x \in V$. Στην πρώτη περίπτωση η π θα ήταν επί και επομένως θα ήταν και ομοιότητα. Τότε θα είχαμε $U =_o V$ που είναι άτοπο. Άρα συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση. Προφανώς η π είναι ομοιότητα μεταξύ του U και του $\pi[U]$, άρα $U =_o \pi[U] = seg_V(x)$.

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $U =_o seg(x)$ για κάποιο $x \in V$. Κάθε ομοιότητα $\tau : U \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow seg_V(x)$ είναι αρχική ομοιότητα $\tau : U \rightarrowtail V$ γιατί η τ είναι $1-1$, σέβεται τις διατάξεις, και το σύνολο $\tau[U] = seg_V(x)$ είναι αρχικό τμήμα του V. Επομένως $U \leq_o V$. Αν είχαμε $U =_o V$ τότε θα είχαμε $V =_o U =_o seg_V(x)$ και επομένως ο V θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό του τμήμα που είναι άτοπο. Άρα $U \neq_o V$ και $U <_o V$.

Άσκηση 6 (7.28. Άσκηση)**.** Δείξτε ότι η σύνθεση αρχικών ομοιοτήτων είναι αρχική ομοιότητα.

Λύση.
Αν $\pi_1 : U \rightarrowtail V$ και $\pi_2 : V \rightarrowtail W$ είναι αρχικές ομοιότητες τότε η συνάρτηση $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : U \rightarrowtail W$ είναι $1-1$ και για κάθε $x', x \in U$ έχουμε

$$x' \leq_U x \iff \pi_1(x') \leq_V \pi_1(x) \iff \pi_2(\pi_1(x')) \leq_W \pi_2(\pi_1(x)) \iff \pi(x') \leq \pi(x).$$

Αυτό που χρειάζεται περισσότερη δουλειά είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\pi[U]$ είναι αρχικό τμήμα του W. Θεωρούμε $w \in \pi[U]$ και $w' \leq_W w$. Πρέπει να δείξουμε ότι $w' \in \pi[U]$.

Έχουμε $w = \pi_2(\pi_1(x))$ για κάποιο $x \in U$. Αφού η π_2 είναι αρχική ομοιότητα το σύνολο $\pi_2[V]$ είναι αρχικό τμήμα του W. Από τα $w' \leq_W w$ και $w \in \pi_2[\pi_1[U]] \subseteq \pi_2[V]$ προκύπτει $w' \in \pi_2[V]$ και άρα υπάρχει $y' \in V$ με $w' = \pi_2(y')$.

Παρατηρούμε ότι

$$w' \leq_W w \iff \pi_2(y') \leq_W \pi_2(\pi_1(x)) \iff y' \leq_V \pi_1(x).$$

Αφού η π_1 είναι αρχική ομοιότητα το σύνολο $\pi_1[U]$ είναι αρχικό τμήμα του V και αφού $y' \leq_V \pi_1(x) \in \pi_1[U]$ έχουμε $y' \in \pi_1[U]$. Άρα υπάρχει $x' \in U$ με $y' = \pi_1(x')$ και επομένως

$$w' = \pi_2(y') = \pi_2(\pi_1(x')) \in \pi_2[\pi_1[U]] = \pi[U].$$

Έχουμε δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x7.14)**.** Δείξτε ότι για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W έχουμε

$$U <_o V \,\&\, V \leq_o W \implies U <_o W$$
$$U \leq_o V \,\&\, V <_o W \implies U <_o W.$$

(Θεωρήστε γνωστή τη μεταβατική ιδιότητα.)

Λύση.
Έστω $U <_o V$ και $V \leq_o W$. Τότε $U \leq_o W$. Αν είχαμε $U =_o W$ τότε $V \leq_o W =_o U <_o V$ και άρα από την Άσκηση 5 ο V θα ήταν όμοιος με κάποιο $seg_V(x)$, $x \in V$, που είναι άτοπο. (Εδώ χρησιμοποιούμε ότι η σύνθεση ομοιοτήτων με αρχικές ομοιότητες είναι αρχική ομοιότητα, κάτι που είναι άμεσο από την Άσκηση 6 καθώς κάθε ομοιότητα είναι και αρχική ομοιότητα.)

Η δεύτερη συνεπαγωγή αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 8 (Πρόβλημα x7.15 - Παραλλαγή)**.** Δείξτε, *χωρίς τη χρήση* του Αξιώματος Επιλογής, ότι κάθε δύο καλά διατάξιμα σύνολα είναι συγκρίσιμα ως προς $\leq_c$.

Ένα σύνολο A είναι **καλά διατάξιμο** αν υπάρχει μια καλή διάταξη $\leq$ στο A.

Λύση.
Θεωρούμε δύο καλά διατάξιμα σύνολα A και B και δύο καλές διατάξεις $\leq_A, \leq_B$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A, B \neq \emptyset$ γιατί αν κάποιο από αυτά είναι το κενό σύνολο, ας πούμε το A, τότε $A = \emptyset \leq_c B$ και άρα τα A, B είναι συγκρίσιμα ως προς $\leq_c$. (Κάνουμε αυτή την υπόθεση για να θεωρήσουμε τους αντίστοιχους χώρους, που όπως είπαμε οι χώροι είναι πάντα μη κενοί.)

Από το Θεώρημα Συγκρισιμότητας καλά διατεταγμένων χώρων θα έχουμε είτε $(A, \leq_A) \leq_o (B, \leq_B)$ είτε $(B, \leq_B) \leq_o (A, \leq_A)$. Ειδικότερα θα έχουμε στην πρώτη περίπτωση $A \leq_c B$ και στη δεύτερη $B \leq_c A$.