ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ BOURBAKI-WITT-ZERMELO

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ

Θεώρημα 1 (Σταθερού Σημείου, Bourbaki - Witt - Zermelo)**.** *Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο* $(\mathbb{P}, \leq)$*,* $a \in \mathbb{P}$ *και υποθέτουμε ότι κάθε μη κενό ολικά διατεταγμένο* $L \subseteq \mathbb{P}$ *έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο* $\mathbb{P}$*. Τότε κάθε συνάρτηση* $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *που ικανοποιεί* $x \leq \pi(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{P}$ *έχει σταθερό σημείο που είναι* $\geq a$*, δηλαδή υπάρχει* $x \in \mathbb{P}$ *με* $a \leq x$ *και* $\pi(x) = x$*.*

Δίνουμε *λίγα λόγια για την ιδέα της απόδειξης*. Αρχικά παίρνουμε το σημείο $a \in \mathbb{P}$ και εφαρμόζουμε διαδοχικά τη συνάρτηση π, οπότε παίρνουμε

$$a \leq \pi(a) \leq \pi(\pi(a)) \leq \cdots \leq \pi^{(n)}(a) \leq \ldots.$$

Αν έχουμε ισότητα σε κάποια από τα παραπάνω τότε έχουμε και ένα σταθερό σημείο που είναι $\geq a$. Αν όλες οι ανισότητες πιο πάνω είναι αυστηρές τότε θεωρούμε το σύνολο S_0 όλων των πιο πάνω σημείων. Αυτό είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, επομένως υπάρχει το $\sup S_0$. Εφαρμόζουμε διαδοχικά την π και παίρνουμε

$$a \leq \pi(a) \leq \pi(\pi(a)) \leq \cdots \leq \pi^{(n)}(a) \leq \cdots \leq \sup S_0 \leq \pi(\sup S_0) \leq \ldots \pi^{(n)}(\sup S_0) \leq \ldots.$$

Αν έχουμε ισότητα σε κάποια από τα παραπάνω τότε έχουμε ένα ζητούμενο σταθερό σημείο. Αλλιώς συνεχίζουμε όπως με πριν θεωρώντας το σύνολο S_1 όλων των πιο πάνω σημείων. Αυτό το σύνολο είναι ολικά διατεταγμένο και επομένως υπάρχει το $\sup S_1$. Εφαρμόζουμε διαδοχικά την π όπως με πριν.

Αποδεικνύεται με τη μέθοδο της υπεπερασμένης επαγωγής ότι η προηγούμενη διαδικασία κάποια στιγμή θα τερματίσει, δηλαδή σε κάποιο σημείο θα έχουμε ισότητα, απ' όπου προκύπτει ένα σταθερό σημείο.

Από την άλλη προτιμάμε να αποδείξουμε το θεώρημα με ποιο στοιχειώδη εργαλεία. Η ιδέα είναι ότι όταν η πιο πάνω διαδικασία τερματίσει θα έχουμε δημιουργήσει το *ελάχιστο σύνολο* $M \subseteq P$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(1) $a \in M$,
(2) $\forall x \in M\ (\pi(x) \in M)$,
(3) για κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο $L \subseteq M$ έχουμε $\sup L \in M$.

Αποδεικνύεται ότι αυτό το M είναι ολικά διατεταγμένο και πως to $\sup M$ είναι σταθερό σημείο της π. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι στην ουσία λεπτομερής επεξεργασία αυτής της ιδέας και δίνεται στο σύγγραμμα του Lang «Άλγεβρα». Την παρουσιάζουμε πιο κάτω.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι έχουμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(\mathbb{P}, \leq)$ με την ιδιότητα κάθε μη κενό ολικά διατεταγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα, ένα $a \in \mathbb{P}$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ που ικανοποιεί $x \leq \pi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{P}$. Πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο $x_0 \in \mathbb{P}$ με $\pi(x_0) = x_0$ και $x_0 \geq a$.

Ένα $A \subseteq \mathbb{P}$ λέγεται **αποδεκτό** (admissible) αν

(i) $a \in A$,
(ii) $\pi[A] \subseteq A$,
(iii) για κάθε μη κενό ολικά διατεταγμένο $L \subseteq A$ ισχύει $\sup L \in A$.

Θέτουμε

$$M = \bigcap \{A \subseteq \mathbb{P} \mid \text{το } A \text{ είναι αποδεκτό}\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το M είναι αποδεκτό, επομένως είναι το ελάχιστο αποδεκτό υποσύνολο του $\mathbb{P}$. Το σύνολο $\{x \in M \mid a \leq x\}$ είναι ένα αποδεκτό υποσύνολο του M, επομένως $M = \{x \in M \mid a \leq x\}$, δηλαδή για κάθε $x \in M$ έχουμε $x \geq a$.

Θα δείξουμε ότι το M είναι ολικά διατεταγμένο. Αφού $M \neq \emptyset$ προκύπτει ότι υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $\sup M$ του M. Επειδή το M είναι αποδεκτό έχουμε $\sup M \in M$, $\pi(\sup M) \in M$, $\sup M \geq a$, και $\pi(\sup M) \leq \sup M$. Από την άλλη ισχύει $\sup M \leq \pi(\sup M)$ από την ιδιότητα της π. Άρα $\pi(\sup M) = \sup M$ και το $\sup M$ είναι ένα σταθερό σημείο της π που είναι $\geq a$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το M είναι ολικά διατεταγμένο. Λέμε ότι ένα $c \in M$ είναι **ακραίο σημείο** (extreme point) αν: για κάθε $x \in M$ αν $x < c$ τότε $\pi(x) \leq c$, δηλαδή

$$\text{το είναι } c \text{ ακραίο σημείο} \iff \forall x \in M\ (x \not< c \text{ ή } \pi(x) \leq c).$$

Επειδή $a = \min M$ έχουμε ειδικότερα ότι $x \not< a$ για κάθε $x \in M$, επομένως το $a \in M$ είναι ακραίο σημείο. Θα δείξουμε ότι κάθε $c \in M$ είναι ακραίο σημείο. Αρχικά για κάθε $c \in M$ θέτουμε

$$M_c = \{x \in M \mid x \leq c \text{ ή } \pi(c) \leq x\}$$

και αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

Ισχυρισμός 1. Για κάθε ακραίο σημείο $c \in M$ έχουμε $M_c = M$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα ακραίο σημείο $c \in M$. Αρκεί να δείξουμε ότι το M_c είναι αποδεκτό. Επειδή $a = \min M$ έχουμε ότι το a ανήκει στο M_c.

Για να δείξουμε την κλειστότητα ως προς π, θεωρούμε $x \in M_c$. Αν $x < c$ τότε αφού το c είναι ακραίο έχουμε $\pi(x) \leq c$ άρα $\pi(x) \in M_c$. Αν $x = c$ τότε προφανώς $\pi(c) \leq \pi(x)$ και $\pi(x) \in M_c$. Αν $x \not\leq c$ τότε αφού $x \in M_c$ έχουμε $\pi(c) \leq x \leq \pi(x)$, άρα $\pi(x) \in M_c$.

Τέλος θεωρούμε ένα μη κενό ολικά διατεταγμένο $L \subseteq M_c$. Επειδή το M είναι αποδεκτό έχουμε $\sup L \in M$. Αν για κάθε $x \in L$ έχουμε $x \leq c$ τότε το c είναι άνω φράγμα του L. Τότε $\sup L \leq c$ και $\sup L \in M_c$. Αν υπάρχει $x \in L$ με $x \not\leq c$, τότε για ένα τέτοιο x θα έχουμε $\pi(c) \leq x$ (αφού $L \subseteq M_c$). Άρα $\pi(c) \leq x \leq \sup L$ και $\sup L \in M_c$. □

Ισχυρισμός 2. Για κάθε $c \in M$ το c είναι ακραίο σημείο.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με E το σύνολο όλων των ακραίων σημείων $c \in M$ και δείχνουμε ότι το E είναι αποδεκτό. Πιο πάνω αναφέραμε ότι το a είναι ακραίο σημείο, άρα $a \in E$.

Θεωρούμε $c \in E$ και δείχνουμε ότι $\pi(c) \in E$, δηλαδή ότι το $\pi(c)$ είναι ακραίο σημείο. Έστω $x < \pi(c)$, δείχνουμε ότι $\pi(x) \leq \pi(c)$. Αφού το c είναι ακραίο σημείο έχουμε από τον προηγούμενο Ισχυρισμό ότι $M = M_c$. Επειδή $x \in M = M_c$ ισχύει $x \leq c$ ή $\pi(c) \leq x$. Η τελευταία περίπτωση δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί τότε $\pi(c) \leq x < \pi(c)$ που είναι άτοπο, επομένως ισχύει η προτελευταία περίπτωση, δηλαδή $x \leq c$. Τότε έχουμε είτε $x < c$ και άρα $\pi(x) \leq \pi(c)$ αφού το c είναι ακραίο σημείο, είτε $x = c$ οπότε τετριμμένα $\pi(x) \leq \pi(c)$.

Τέλος θεωρούμε ένα μη κενό ολικά διατεταγμένο $L \subseteq E$ και δείχνουμε ότι $\sup L \in E$, δηλαδή ότι το $\sup L$ είναι ακραίο σημείο. Έστω $x \in M$ με $x < \sup L$, δείχνουμε ότι $\pi(x) \leq \sup L$. Αν για κάθε $c \in L$ ισχύει $\pi(c) \leq x$ τότε για κάθε $c \in L$ έχουμε $c \leq \pi(c) \leq x$. Επομένως το x είναι άνω φράγμα του L και άρα $\sup L \leq x$ που είναι άτοπο γιατί $x < \sup L$. Άρα υπάρχει $c \in L$ με $\pi(c) \not\leq x$. Αφού το c είναι ακραίο σημείο έχουμε από τον προηγούμενο Ισχυρισμό ότι $M = M_c$. Άρα $x \in M_c$ και επειδή $\pi(c) \not\leq x$ έχουμε $x \leq c$. Αν $x < c$ επειδή $c \in L \subseteq E$ έχουμε από τον ορισμό του ακραίου σημείου ότι $\pi(x) \leq c \leq \sup L$. Υποθέτουμε ότι $x = c$ και δείχνουμε ότι $\pi(c) \leq \sup L$. Αφού $L \subseteq E \subseteq M$ και το M είναι αποδεκτό έχουμε $\sup L \in M = M_c$ επομένως $\sup L \leq c$ ή $\pi(c) \leq \sup L$. Η προτελευταία περίπτωση οδηγεί σε άτοπο γιατί τότε θα έχουμε $\sup L \leq c \leq \sup L$, άρα $\sup L = c = x < \sup L$. Άρα $\pi(c) \leq \sup L$.

Ισχυρισμός 3. Το M είναι ολικά διατεταγμένο.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in M$. Αφού το x είναι ακραίο σημείο έχουμε $y \in M = M_x$ και άρα $y \leq x$ ή $x \leq \pi(x) \leq y$. $\square$