



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών  
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

---

## Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

# Λυμένες Ασκήσεις

---

Επιμέλεια: [Αντώνης Αντωνόπουλος](#)

29 Οκτωβρίου 2016

### Περιεχόμενα

1	<a href="#">Αυτόματα &amp; Κανονικές Εκφράσεις</a>	2
2	<a href="#">Ελαχιστοποίηση Αυτομάτων</a>	9
3	<a href="#">Pumping Lemma</a>	13
4	<a href="#">Τυπικές Γραμματικές</a>	14
5	<a href="#">Αυτόματα για μη-κανονικές γλώσσες</a>	15

# 1 Αυτόματα & Κανονικές Εκφράσεις

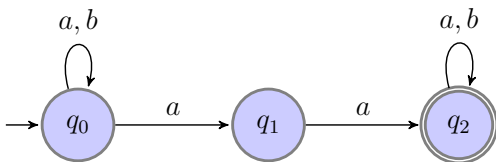
## Ασκηση 1.1

Κατασκευάστε NFA, DFA και κανονική έκφραση που να αναγνωρίζει την γλώσσα:

$$L_1 = \{x \in \{a, b\}^* \mid \eta \ x \ \text{περιέχει το } 'aa'\}$$

### Λύση

Για ευκολία, μπορούμε να κατασκευάσουμε πρώτα το NFA που αποδέχεται την  $L_1$ . Θέλουμε το NFA να αποδέχεται όταν υπάρχει το  $aa$  μέσα στην συμβολοσειρά που έχουμε ως είσοδο. Οπότε, κατασκευάζουμε τον "σκελετό" του NFA που αποτελείται από τις καταστάσεις  $q_0, q_1, q_2$ , όπου μεταβαίνουμε από την  $q_0$  στην  $q_1$  και από την  $q_1$  στην  $q_2$  με  $a$ . Η  $q_2$  είναι τελική, αφού όταν φτάσουμε σε αυτήν έχουμε δει το  $aa$ .

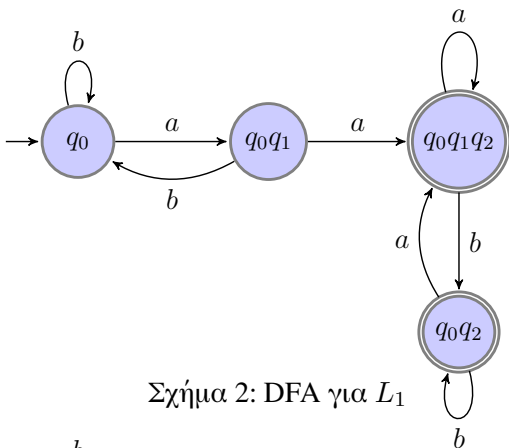


Σχήμα 1: NFA για  $L_1$

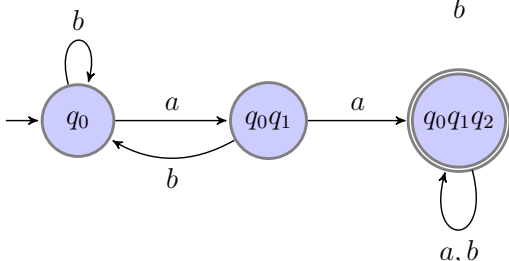
Μετά, πρέπει να προτυποποιήσουμε το γεγονός ότι το  $aa$  θα είναι υποσυμβολοσειρά της εισόδου, οπότε προσθέτουμε self-loops στις  $q_0$  και  $q_2$ , ώστε να παραμένει το αυτόματο στις καταστάσεις αυτές, μέχρι και αφού βρει το  $aa$  (waiting loops). Παρατηρούμε ότι το NFA αποδέχεται αν υπάρχει η συμβολοσειρά  $aa$  μέσα στην συμβολοσειρά της εισόδου, όπως επίσης και αν η είσοδος είναι μόνο το  $aa$ .

Όπως φαίνεται άμεσα από το NFA, η κανονική έκφραση για την  $L_1$  είναι η  $(a + b)^*aa(a + b)^*$ .

Για να κατασκευάσουμε το DFA για την  $L_1$ , θα μετατρέψουμε το NFA σε DFA σύμφωνα με τον αλγόριθμο της απόδειξης του θ. Rabin-Scott.



Σχήμα 2: DFA για  $L_1$



Σχήμα 3: Ελάχιστο DFA για  $L_1$

- Από την κατάσταση  $q_0$  του NFA, με  $a$  μεταβαίνουμε στις καταστάσεις  $q_0$  και  $q_1$ . Άρα στο DFA θα μεταβούμε στην  $q_0q_1$ . Με  $b$  μεταβαίνουμε πάλι στην  $q_0$  (self-loop), οπότε θα κάνουμε και στο DFA το ίδιο.
- Από την κατάσταση  $q_0q_1$  του DFA, με  $a$  η  $q_0$  του NFA οδηγεί στις  $q_0$  και  $q_1$ , και η  $q_1$  του NFA οδηγεί στην  $q_2$ . Άρα, στο DFA, η  $q_0q_1$  θα μεταβαίνει στην  $q_0q_1q_2$ . Με  $b$  η  $q_0$  του NFA οδηγεί στον εαυτό της, και η  $q_1$  του NFA δεν οδηγεί πουθενά. Άρα, στο DFA η  $q_0q_1$  θα οδηγήει στην  $q_0$ .
- Από την κατάσταση  $q_0q_1q_2$  του DFA, με  $a$  η  $q_0$  οδηγεί στις  $q_0$  και  $q_1$  στο NFA, η  $q_1$  οδηγεί στην  $q_2$ , και η  $q_2$  στον εαυτό της. Άρα, στο DFA, η  $q_0q_1q_2$  θα οδηγεί στον εαυτό της. Με  $b$ , η  $q_0$  του NFA οδηγεί στον εαυτό της, η  $q_1$  δεν οδηγεί πουθενά, και η  $q_2$  οδηγεί πάλι στον εαυτό της. Άρα, στο DFA η  $q_0q_1q_2$  θα οδηγεί στην  $q_0q_2$ .

- Από την κατάσταση  $q_0q_2$  του DFA, με  $a$  η  $q_0$  του NFA οδηγεί στις  $q_0$  και  $q_1$ , και η  $q_2$  στον εαυτό της, άρα η  $q_0q_2$  στο DFA θα οδηγεί στην  $q_0q_1q_2$ . Με  $b$ , οι  $q_0$  και  $q_2$  του NFA οδηγούν στον εαυτό τους, άρα και η  $q_0q_2$  του DFA θα οδηγεί στον εαυτό της.

Τελικές καταστάσεις στο DFA θα είναι αυτές που περιέχουν τουλάχιστον μία τελική του NFA. Άρα οι τελικές καταστάσεις θα είναι οι  $q_0q_1q_2$  και  $q_0q_2$ , αφού μόνο η  $q_2$  είναι τελική στο NFA. Το DFA φαίνεται στο σχήμα 2.

Παρατηρήστε ότι στο DFA που κατασκευάσαμε, οι (τελικές) καταστάσεις  $q_0q_1q_2$  και  $q_0q_2$  δεν έχουν ουσιαστική διαφορά για την λειτουργία του αυτομάτου, αφού αν βρεθούμε στην  $q_0q_1q_2$ , δεν υπάρχει τρόπος να μεταβούμε πίσω σε κατάσταση απόρριψης. Οπότε, μπορούμε να συγχωνεύσουμε τις δύο αυτές καταστάσεις σε μία. Προφανώς, αν ελαχιστοποιούσαμε αυτό το DFA χρησιμοποιώντας την γνωστή μέθοδο/αλγόριθμο, οι καταστάσεις  $q_0q_1q_2$  και  $q_0q_2$  θα ήταν μη-διακρίσιμες, άρα θα συγχωνεύονταν. Το τελικό DFA φαίνεται στο σχήμα 3.  $\square$

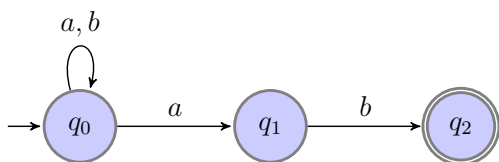
**Προσοχή:** Η μετατροπή του NFA σε DFA, στην χειρότερη περίπτωση, οδηγεί σε εκθετική αύξηση του πλήθους των καταστάσεων. Κατά την μετατροπή, δεν ασχολούμαστε με μη-προσβάσιμες καταστάσεις (καταστάσεις στις οποίες δεν φτάνουμε ποτέ από την αρχική), αλλά στην χειρότερη περίπτωση όλες οι καταστάσεις του δυναμοσυνόλου θα είναι προσβάσιμες, οπότε ένα NFA με  $n$  καταστάσεις μετατρέπεται σε DFA με το πολύ  $2^n$  καταστάσεις.

### Άσκηση 1.2

Κατασκευάστε NFA, DFA και κανονική έκφραση που να αναγνωρίζει την γλώσσα:

$$L_2 = \{x \in \{a, b\}^* \mid \eta \ x \ \text{τελειώνει σε } 'ab'\}$$

### Λύση



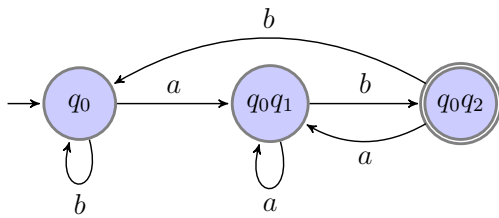
Σχήμα 4: NFA για  $L_2$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θα κατασκευάσουμε τον "σκελετό" του NFA, δηλαδή τις καταστάσεις  $q_0, q_1, q_2$ , με τελική την  $q_2$ , που αποδέχονται το  $'ab'$ . Όμως, αυτό το NFA θέλουμε να αποδέχεται τις συμβολοσειρές που τελειώνουν σε  $ab$ , οπότε θα προσθέσουμε waiting loop μόνο στην  $q_0$ , ώστε το NFA μας να διαβάζει την συμβολοσειρά εισόδου και να περιμένει μέχρι να "δει" το  $ab$  στο τέλος της συμβολοσειράς.

Αν η συμβολοσειρά εισόδου τελειώνει σε  $ab$ , θα υπάρχει ένα μονοπάτι στο δέντρο υπολογισμού του NFA που να οδηγεί στην  $q_2$ . Αν δεν τελειώνει σε  $ab$  ή το περιέχει σε άλλο σημείο, κανένα μονοπάτι του δέντρου υπολογισμού δεν θα οδηγεί στην  $q_2$ .

Όπως φαίνεται από το NFA που κατασκευάσαμε (σχήμα 4), μια κανονική έκφραση για την γλώσσα  $L_2$  είναι η  $(a + b)^*ab$ .

Θα κατασκευάσουμε DFA όπως στην προηγούμενη Άσκηση 1.1:



Σχήμα 5: DFA για  $L_2$

- Από την κατάσταση  $q_0$  το NFA με  $a$  μεταβαίνει στις  $q_0$  και  $q_1$ . Άρα το DFA θα μεταβαίνει στην  $q_0q_1$ . Με  $b$  το NFA μεταβαίνει πάλι στην  $q_0$  (self-loop), άρα το DFA θα κάνει το ίδιο.
- Από την κατάσταση  $q_0q_1$  του DFA, με  $a$  η  $q_0$  του NFA μεταβαίνει στις  $q_0, q_1$ , και η  $q_1$  δεν μεταβαίνει πουθενά, άρα στο DFA η  $q_0q_1$  θα μεταβαίνει στον εαυτό της. Με  $b$ , η  $q_0$  του NFA μεταβαίνει στον εαυτό της, και η  $q_1$  στην  $q_2$ , άρα στο DFA η  $q_0q_1$  θα μεταβαίνει στην  $q_0q_2$ .

- Από την κατάσταση  $q_0q_2$  του DFA, με  $a$  η  $q_0$  του NFA μεταβαίνει στις  $q_0, q_1$ , και η  $q_2$  δεν μεταβαίνει πουθενά, άρα στο DFA η  $q_0q_2$  μεταβαίνει στην  $q_0q_1$ . Με  $b$ , η  $q_0$  του NFA μεταβαίνει στον εαυτό της, και η  $q_2$  δεν μεταβαίνει πουθενά, άρα στο DFA η  $q_0q_2$  θα μεταβαίνει πίσω στην  $q_0$ .

Τελικές καταστάσεις στο DFA θα είναι αυτές που περιέχουν τουλάχιστον μία τελική του NFA, άρα η  $q_0q_2$  θα είναι η μόνη τελική στο DFA, που φαίνεται στο σχήμα 5.  $\square$

### Άσκηση 1.3

Κατασκευάστε DFA που να αποδέχεται την γλώσσα:

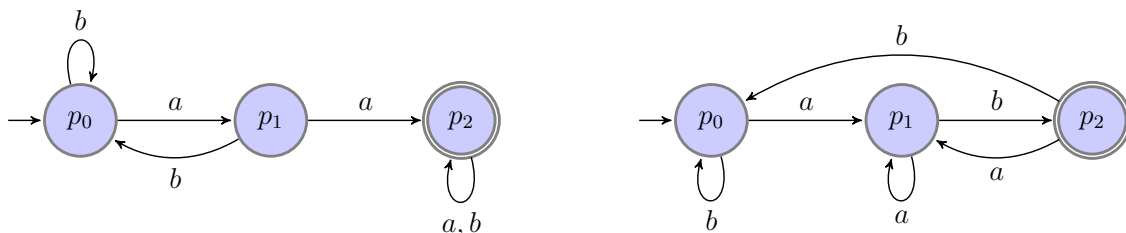
$$L_3 = \{x \in \{a, b\}^* \mid \eta \text{ περιέχει το 'aa' ή τελειώνει σε 'ab'}\}$$

### Λύση

Το ζητούμενο DFA αναγνωρίζει την ένωση των γλωσσών των Ασκήσεων 1.1 και 1.2, αφού μία συμβολοσειρά γίνεται αποδεκτή αν την αποδέχεται το αυτόματο του σχήματος 3 ή το αυτόματο του σχήματος 5. Υπάρχουν 2 τρόποι για να βρούμε αυτόματο για την ένωση δύο κανονικών γλωσσών.

#### 1ος τρόπος επίλυσης

Θα συνδυάσουμε αυτά τα δύο αυτόματα κατασκευάζοντας το γινόμενο τους (δείτε το ένθετο στην επόμενη σελίδα), που θα πρέπει να αποδέχεται αν τουλάχιστον ένα από τα δύο αυτόματα αποδέχεται. Για ευκολία, θα μετονομάσουμε τις καταστάσεις των δύο αυτομάτων σε  $p_0, p_1$  και  $p_2$ . Παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης στις καταστάσεις, αφού στο γινόμενο κάθε "συντεταγμένη" του διατεταγμένου ζεύγους θα αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο αυτόματο. Θέλουμε, λοιπόν, να κατασκευάσουμε το γινόμενο των δύο ακόλουθων αυτομάτων (σχήματα 3, 5 με αλλαγμένα τα ονόματα των καταστάσεων):



Η αρχική κατάσταση του γινομένου θα είναι η  $p_0p_0$  (θυμηθείτε ότι γράφουμε ως  $p_i p_j$  το διατεταγμένο ζεύγος  $(p_i, p_j)$  του γινομένου).

- Από την κατάσταση  $p_0p_0$  του γινομένου, με  $a$  ή  $p_0$  του πρώτου DFA οδηγεί στην  $p_1$  και η  $p_0$  του δεύτερου στην  $p_1$ , άρα η  $p_0p_0$  οδηγεί στην  $p_1p_1$ . Με  $b$ , η  $p_0$  του πρώτου και του δεύτερου DFA έχουν self-loops, άρα στο γινόμενο η  $p_0p_0$  θα έχει self-loop.
- Από την κατάσταση  $p_1p_1$  του γινομένου, με  $a$  ή  $p_1$  του πρώτου DFA οδηγεί στην  $p_2$  και η  $p_1$  του δεύτερου στον εαυτό της, άρα η  $p_1p_1$  οδηγεί στην  $p_2p_1$ . Με  $b$ , η  $p_1$  του πρώτου οδηγεί στην  $p_0$  και η  $p_1$  του δεύτερου στην  $p_2$ , οπότε η  $p_1p_1$  οδηγεί στην  $p_0p_2$ .
- Από την κατάσταση  $p_2p_1$  του γινομένου, με  $a$  ή  $p_2$  του πρώτου DFA και η  $p_1$  του δεύτερου οδηγούν στον εαυτό τους, οπότε η  $p_2p_1$  θα έχει self-loop. Με  $b$ , η  $p_2$  του πρώτου οδηγεί στον εαυτό της και η  $p_1$  του δεύτερου στην  $p_2$ , οπότε η  $p_2p_1$  οδηγεί στην  $p_2p_2$ .
- Από την κατάσταση  $p_0p_2$  του γινομένου, με  $a$  ή  $p_0$  του πρώτου DFA οδηγεί στην  $p_1$  και η  $p_2$  του δεύτερου οδηγεί στην  $p_1$ , άρα η  $p_0p_2$  οδηγεί στην  $p_1p_1$ . Με  $b$ , η  $p_0$  του πρώτου έχει self-loop, και η  $p_2$  του δεύτερου οδηγεί στην  $p_0$ , οπότε η  $p_0p_2$  μεταβαίνει στην  $p_0p_0$ .
- Από την κατάσταση  $p_2p_2$  του γινομένου, με  $a$  ή  $p_2$  του πρώτου DFA οδηγεί στον εαυτό της και η  $p_2$  του δεύτερου στην  $p_1$ , άρα η  $p_2p_2$  οδηγεί στην  $p_2p_1$ . Με  $b$ , η  $p_2$  του πρώτου έχει self-loop και η  $p_2$  του δεύτερου μεταβαίνει στην  $p_0$ , οπότε η  $p_2p_2$  οδηγεί στην  $p_2p_0$ .
- Από την κατάσταση  $p_2p_0$  του γινομένου, με  $a$  ή  $p_2$  του πρώτου DFA οδηγεί στον εαυτό της και η  $p_0$  του δεύτερου στην  $p_1$ , άρα η  $p_2p_0$  οδηγεί στην  $p_2p_1$ . Με  $b$ , η  $p_2$  του πρώτου και η  $p_0$  του δεύτερου έχουν self-loops, οπότε η  $p_2p_0$  θα έχει και αυτή self-loop.

Τώρα, πρέπει να ορίσουμε το σύνολο των αποδεκτών καταστάσεων. Αφού θέλουμε το γινόμενο να αποδέχεται όταν αποδέχεται τουλάχιστον ένα από τα δύο DFAs, αποδεκτές καταστάσεις θα είναι αυτές που περιέχουν αποδεκτή κατάσταση σε μία τουλάχιστον από τις δύο συντεταγμένες του διατεταγμένου ζεύγους, άρα στην δική μας περίπτωση οι  $p_0p_2$ ,  $p_2p_1$ ,  $p_2p_0$  και  $p_2p_2$ .

### Γινόμενο Αυτομάτων

Μπορούμε να κατασκευάσουμε το γινόμενο δύο (ή περισσότερων) ντετερμινιστικών αυτομάτων, που θα προσομοιώνει παράλληλα την λειτουργία τους. Ουσιαστικά, το γινόμενο αυτομάτων είναι ένα DFA που "τρέχει" ταυτόχρονα τα DFAs του γινομένου, και αποδέχεται αν ισχύει μία λογική συνθήκη που εξαρτάται από την αποδοχή τους.

Τυπικά:

Έστω  $M_1, M_2$  DFAs. Το γινόμενό τους  $M = M_1 \times M_2$  είναι ένα DFA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

- $Q = Q_1 \times Q_2$  (γράφουμε  $q_iq_j$  την  $(q_i, q_j)$ )  
Διατεταγμένο ζεύγος:  $q_iq_j \in Q$  αν  $q_i \in Q_1$  και  $q_j \in Q_2$ .
- Κοινό αλφάβητο  $\Sigma$
- Αρχική κατάσταση  $q_0q_0$
- $\delta(q_iq_j, a) = (\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a))$
- Σύνολο τελικών καταστάσεων  $F \subseteq Q$ .

Τι θα ορίσουμε ως σύνολο τελικών καταστάσεων; Εξαρτάται από το πότε θέλουμε να αποδέχεται το γινόμενο:

- Αν, πχ, θέλουμε το γινόμενο να αποδέχεται όταν αποδέχεται και το  $M_1$  και το  $M_2$  τότε ορίζουμε ως  $F$ :

$$F = \{q_iq_j \mid q_i \in F_1 \text{ και } q_j \in F_2\}$$

$$= F_1 \times F_2$$

- Αν θέλουμε το γινόμενο να αποδέχεται όταν αποδέχεται είτε το  $M_1$  ή το  $M_2$ , ορίζουμε:

$$F = \{q_iq_j \mid q_i \in F_1 \text{ ή } q_j \in F_2\}$$

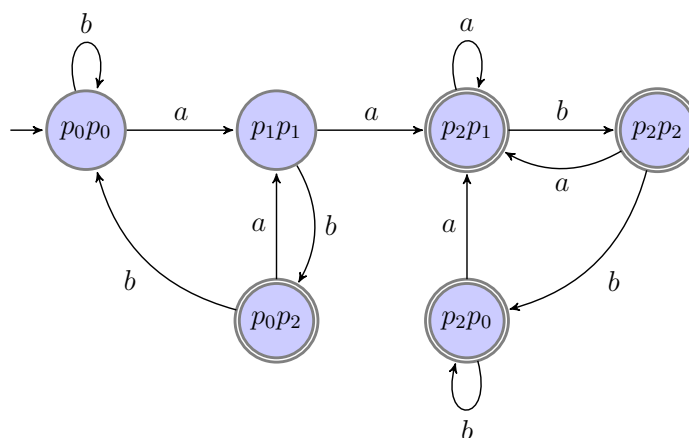
$$= (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$$

- Αν θέλουμε να αποδέχεται όταν αποδέχεται το  $M_1$  και όχι το  $M_2$ , ορίζουμε:

$$F = \{q_iq_j \mid q_i \in F_1 \text{ και } q_j \notin F_2\}$$

$$= F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$$

Το γινόμενο που κατασκευάσαμε φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

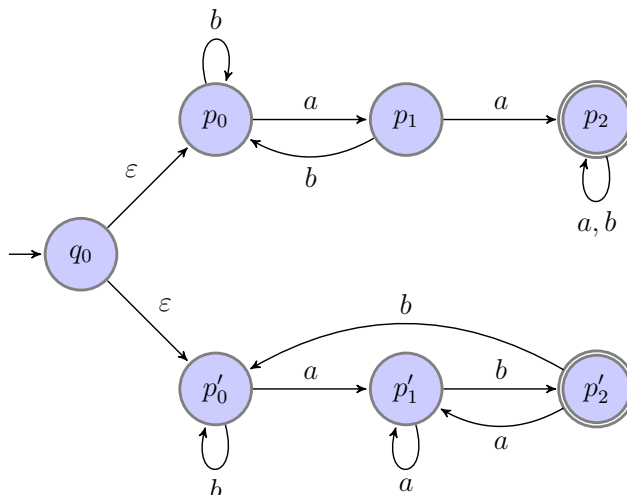


Σχήμα 6: Γινόμενο DFA για την ένωση των  $L_1$  και  $L_2$

Παρατηρήστε ότι αυτό το DFA δεν είναι ελάχιστο. Θα βρούμε το ελάχιστο στην επόμενη ενότητα.

### 2ος τρόπος επίλυσης

Αυτόματο DFA για την ένωση δύο γλωσσών για τις οποίες έχουμε ήδη DFA (ή NFA, ή και  $NFA_\varepsilon$ ) μπορεί να προκύψει και με τον εξής τρόπο: δημιουργούμε μία νέα αρχική κατάσταση την οποία ενώνουμε με  $\varepsilon$ -κινήσεις με τις αρχικές καταστάσεις των δύο γνωστών FA. Έτσι, κατασκευάζουμε το εξής  $NFA_\varepsilon$ :



Στη συνέχεια μετατρέπουμε σε DFA με κάποιον από τους γνωστούς τρόπους. Εφαρμόζοντας την μέθοδο απευθείας μετατροπής σε DFA (σελ. 37 των διαφανειών) η αρχική κατάσταση του DFA θα είναι η  $q_0p_0p'_0$ , δηλαδή το  $\varepsilon$ -κλείσιμο της  $q_0$ .

Η  $q_0p_0p'_0$  με  $a$  οδηγεί στην  $p_1p'_1$  και με  $b$  οδηγεί στην  $p_0p'_0$ . Οι υπόλοιπες μεταβάσεις ορίζονται όπως στη μετατροπή από NFA σε DFA καθώς το  $NFA_\varepsilon$  δεν επιστρέφει ποτέ στην κατάσταση  $q_0$  και δεν υπάρχουν  $\varepsilon$ -κινήσεις στις υπόλοιπες καταστάσεις.

Τελικά, προκύπτει ένα DFA πανομοιότυπο με αυτό του σχήματος 6 με μία επιπλέον αρχική κατάσταση, την  $q_0p_0p'_0$  με τις μεταβάσεις που ορίστηκαν παραπάνω. Αν μάλιστα συγχωνεύσουμε τις  $q_0p_0p'_0$  και  $p_0p'_0$ , δεδομένου ότι με κάθε σύμβολο οδηγούν σε ίδιες καταστάσεις, τότε θα προκύψει ακριβώς το αυτόματο του σχήματος 6.  $\square$

**Προσοχή:** Μερικές φορές η ένωση αυτομάτων μπορεί να γίνει απλά ταυτίζοντας τις αρχικές καταστάσεις τους (αυτό δίνει NFA, αν τα αρχικά αυτόματα είναι NFA) -- έτσι μπορεί να πάρουμε ένα απλούστερο αυτόματο. Το αποτέλεσμα όμως δεν είναι πάντοτε σωστό: είναι δυνατόν η εκτέλεση σε ένα τέτοιο αυτόματο να περάσει αρχικά από κάποιες καταστάσεις του ενός αυτομάτου, να επιστρέψει στην κοινή αρχική και να συνεχίσει σε καταστάσεις του άλλου, γεγονός που μπορεί να έχει `παρενέργειες'. Χρησιμοποιήστε αυτή την `συντόμευση' με ιδιαίτερη προσοχή.

### Άσκηση 1.4

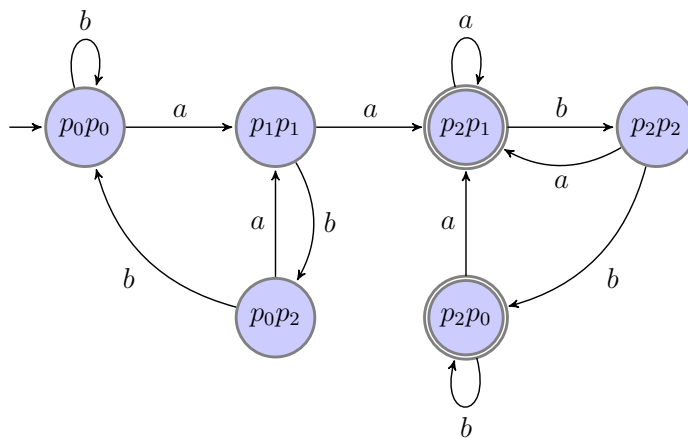
Κατασκευάστε DFA που να αποδέχεται την γλώσσα:

$$L_4 = \{x \in \{a, b\}^* \mid \eta \ x \ \text{περιέχει το } 'aa' \ \text{και δεν τελειώνει σε } 'ab'\}$$

### Λύση

Το ζητούμενο αυτόματο αναγνωρίζει την *διαφορά* των γλωσσών των Ασκήσεων 1.1 και 1.2, δηλαδή τις συμβολοσειρές που αποδέχεται το αυτόματο του σχήματος 3, αλλά απορρίπτει το αυτόματο του σχήματος 5, οπότε είναι και πάλι το γινόμενο τους, αλλά με τις αντίστοιχες τελικές καταστάσεις.

Έχουμε βρει το γινόμενο τους στην προηγούμενη άσκηση (σχήμα 6). Οι τελικές καταστάσεις τώρα θα είναι αυτές που έχουν κατάσταση αποδοχής για το πρώτο αυτόματο (δηλαδή την  $p_2$ ), αλλά κατάσταση απόρριψης για το δεύτερο (δηλαδή τις  $p_0, p_1$ ), άρα θα είναι οι  $p_2p_0$  και  $p_2p_1$ :



Σχήμα 7: Γινόμενο DFA για την διαφορά των  $L_1$  και  $L_2$

□



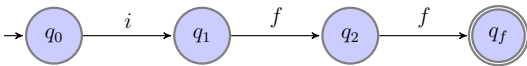
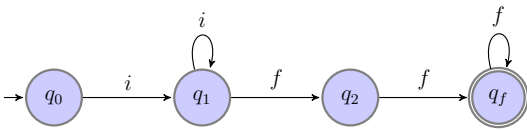
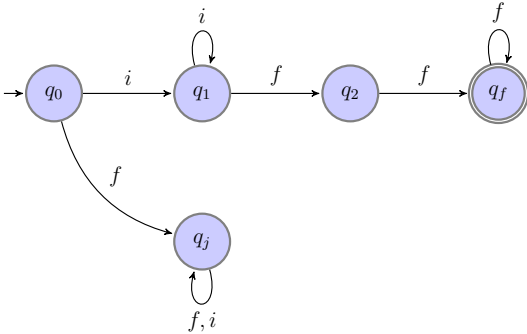
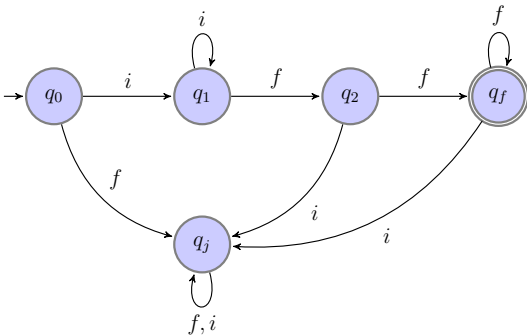
**Άσκηση 1.5**

Κατασκευάστε DFA και κανονική έκφραση για την γλώσσα:

$$L_5 = \{w \in \{f, i\} \mid \eta \text{ } w \text{ περιέχει το } 'iff' \text{ αλλά όχι το } 'fi'\}$$

**Λύση**

Για την κατασκευή του DFA θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τα δύο απλά αυτόματα (ένα που να αποδέχεται το  $iff$  και ένα που να αποδέχεται το  $fi$ ), και μετά να κατασκευάσουμε το γινόμενο τους, με αποδεκτές καταστάσεις αυτές στις οποίες αποδέχεται το πρώτο και δεν αποδέχεται το δεύτερο. Εναλλακτικά, εδώ, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε το DFA κατευθείαν:

Σχήμα 8α: DFA για  $L_5$ Σχήμα 8β: DFA για  $L_5$ Σχήμα 8γ: DFA για  $L_5$ Σχήμα 8δ: DFA για  $L_5$ 

- Αρχικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 8α, κατασκευάζουμε τον "σκελετό" του DFA, δηλαδή 4 καταστάσεις  $q_0, q_1, q_2, q_f$  που να αποδέχονται την συμβολοσειρά  $iff$ .
- Σίγουρα μπορούμε να αποδεχόμαστε συμβολοσειρές της μορφής  $ii^*fff^*$ , αφού δεν περιέχουν το  $fi$ , οπότε προσθέτουμε self-loops στις καταστάσεις  $q_1$  και  $q_f$ , με τα σύμβολα  $i$  και  $f$  αντίστοιχα (σχήμα 8β). Προσοχή, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα  $i$  στην αρχή της κάθε αποδεκτής συμβολοσειράς, και τουλάχιστον δύο  $f$  στο τέλος της, οπότε οι μεταβάσεις  $q_0 \xrightarrow{i} q_1$  και  $q_1 \xrightarrow{f} q_2 \xrightarrow{f} q_f$  δεν μπορούν να συγχωνευτούν.
- Τώρα, πρέπει να προσέξουμε την *μη* αποδοχή του  $fi$ . Σίγουρα, αν το DFA βρίσκεται στην  $q_0$  και διαβάσει σύμβολο  $f$ , πρέπει να απορρίψει, μιας και συμβολοσειρές που αρχίζουν από  $f$  δεν έχουν ελπίδα να γίνουν αποδεκτές, αφού ο μόνος τρόπος να υπάρξει το  $iff$  στην συμβολοσειρά είναι μετά από κάποιο  $f$ , άρα θα εμφανιστεί το  $fi$ . Οπότε, από την  $q_0$  με  $f$  πρέπει να μεταβούμε σε κατάσταση απόρριψης (junk state,  $q_j$ ), όπως φαίνεται στο σχήμα 8γ.
- Το ίδιο ισχύει και για τις καταστάσεις  $q_2, q_f$ . Αν το επόμενο σύμβολο είναι το  $i$ , θα προηγείται ένα  $f$  (αφού με  $f$  μεταβαίνει στις  $q_2, q_f$ ), οπότε θα εμφανιστεί το  $fi$ , και το DFA θα πρέπει να απορρίπτει. Άρα, από τις  $q_2, q_f$  με  $i$  μεταβαίνει στην  $q_j$  (σχήμα 8δ).
- Παρατηρούμε ότι έχουμε συμπληρώσει όλες τις δυνατές μεταβάσεις, οπότε η κατασκευή του DFA ολοκληρώθηκε. Το τελικό DFA φαίνεται στο σχήμα 8δ.



Πως μπορούμε να βρούμε μια κανονική έκφραση για την γλώσσα  $L_5$ ; Πρέπει να εντοπίσουμε όλα τα δυνατά μονοπάτια του DFA που οδηγούν σε κατάσταση αποδοχής: στο αυτόματο του σχήματος 8δ, το μόνο μονοπάτι είναι το  $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_f$ , οπότε μια κανονική έκφραση για την  $L_5$  είναι η  $ii^*fff^*$ , ή ισοδύναμα  $i^+ff^+$ .

Προσπαθήστε να δείτε ότι το DFA που βρήκαμε είναι το ελάχιστο DFA που αναγνωρίζει την γλώσσα  $L_5$ . Θα το αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα.  $\square$

## 2 Ελαχιστοποίηση Αυτομάτων

### Άσκηση 2.1

Ελαχιστοποιήστε το αυτόματο του σχήματος 6.

### Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των καταστάσεων (για ευκολία, κυκλώνουμε τις τελικές καταστάσεις). Παρατηρήστε ότι ασχολούμαστε μόνο με το μέρος του πίνακα κάτω από την κύρια διαγώνιο, αφού η σχέση της διακρισιμότητας των καταστάσεων είναι συμμετρική και ανακλαστική, οπότε δεν έχει νόημα να συγκρίνουμε ξανά δύο καταστάσεις ή μια κατάσταση με τον εαυτό της. Αρχικά, βάζουμε  $X_0$  στις καταστάσεις που διακρίνονται επειδή η μία είναι τελική και η άλλη δεν είναι.

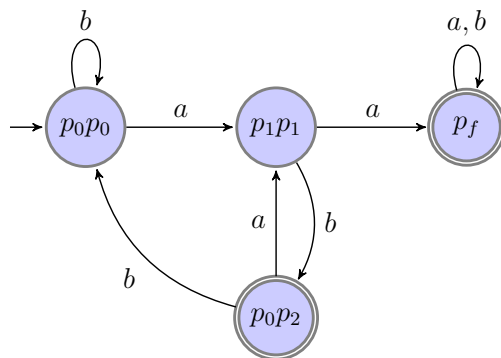
Στην επόμενη φάση, βάζουμε  $X_1$  στις καταστάσεις που με ένα σύμβολο ( $a$  ή  $b$ ) οδηγούν σε διακρίσιμες καταστάσεις, δηλαδή σε ένα ζεύγος καταστάσεων που ήδη έχουμε διακρίνει με  $X_0$ :

- Έχουμε ότι  $p_0p_0 \xrightarrow{a} p_1p_1$  και  $p_1p_1 \xrightarrow{a} p_2p_1$ , και οι  $p_1p_1$  και  $p_2p_1$  είναι διακρίσιμες (αφού η μία είναι τελική και η άλλη δεν είναι), οπότε τις διακρίνουμε με  $X_1$ .
- Ομοίως,  $p_0p_2 \xrightarrow{b} p_0p_0$  και  $p_2p_2 \xrightarrow{b} p_2p_0$ , άρα  $p_0p_2$  και  $p_2p_2$  διακρίσιμες.
- $p_0p_2 \xrightarrow{a} p_1p_1$  και  $p_2p_0 \xrightarrow{a} p_2p_1$ , άρα  $p_0p_2$  και  $p_2p_0$  διακρίσιμες.
- $p_0p_2 \xrightarrow{b} p_0p_0$  και  $p_2p_1 \xrightarrow{b} p_2p_2$ , άρα  $p_0p_2$  και  $p_2p_1$  διακρίσιμες.

$p_1p_1$					
$p_0p_2$	$X_0$	$X_0$			
$p_2p_1$	$X_0$	$X_0$			
$p_2p_0$	$X_0$	$X_0$			
$p_2p_2$	$X_0$	$X_0$			
$p_0p_0$	$p_1p_1$	$p_0p_2$	$p_2p_1$	$p_2p_0$	

$p_1p_1$	$X_1$				
$p_0p_2$	$X_0$	$X_0$			
$p_2p_1$	$X_0$	$X_0$	$X_1$		
$p_2p_0$	$X_0$	$X_0$	$X_1$		
$p_2p_2$	$X_0$	$X_0$	$X_1$		
$p_0p_0$	$p_1p_1$	$p_0p_2$	$p_2p_1$	$p_2p_0$	

Δεν μπορούμε να διακρίνουμε άλλες καταστάσεις με κάποιο σύμβολο, οπότε καταλήγουμε στον παραπάνω πίνακα, όπου οι καταστάσεις  $p_2p_1$ ,  $p_2p_2$  και  $p_2p_0$  συγχωνεύονται σε μία, έστω  $p_f$ . Το ελάχιστο αυτόματο φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 9: Ελάχιστο DFA για την ένωση των  $L_1$  και  $L_2$

□

## Άσκηση 2.2

Ελαχιστοποιήστε το αυτόματο του σχήματος 7.

### Λύση

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, κατασκευάζουμε τον πίνακα των καταστάσεων.

Αρχικά, βάζουμε  $X_0$  στις καταστάσεις που διακρίνονται επειδή η μία είναι τελική και η άλλη δεν είναι.

Στην επόμενη φάση, βάζουμε  $X_1$  στις καταστάσεις που με ένα σύμβολο ( $a$  ή  $b$ ) οδηγούν σε διακρίσιμες καταστάσεις, δηλαδή σε ένα ζεύγος καταστάσεων που ήδη έχουμε διακρίνει με  $X_0$ :

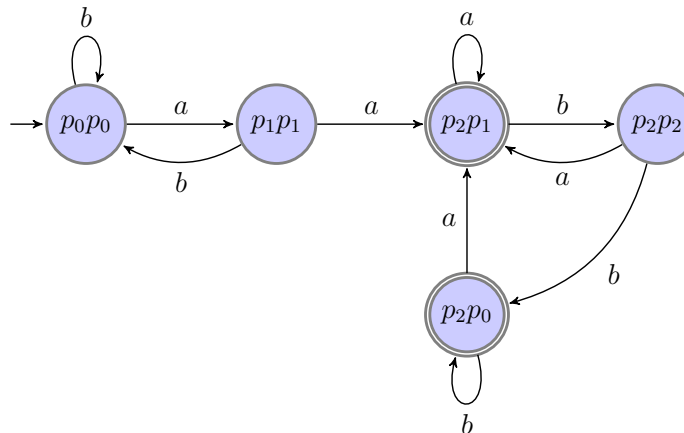
- Έχουμε ότι  $p_0p_0 \xrightarrow{a} p_1p_1$  και  $p_1p_1 \xrightarrow{a} p_2p_1$ , και οι  $p_1p_1$  και  $p_2p_1$  είναι διακρίσιμες (αφού η μία είναι τελική και η άλλη δεν είναι), οπότε τις διακρίνουμε με  $X_1$ .
- Ομοίως,  $p_0p_2 \xrightarrow{a} p_1p_1$  και  $p_1p_1 \xrightarrow{a} p_2p_1$ , άρα  $p_0p_2$  και  $p_1p_1$  διακρίσιμες.
- $p_0p_0 \xrightarrow{a} p_1p_1$  και  $p_2p_2 \xrightarrow{a} p_2p_1$ , άρα  $p_0p_0$  και  $p_2p_2$  διακρίσιμες.
- $p_2p_2 \xrightarrow{b} p_2p_0$  και  $p_1p_1 \xrightarrow{b} p_0p_2$ , άρα  $p_2p_2$  και  $p_1p_1$  διακρίσιμες.

$p_1p_1$					
$p_0p_2$					
$p_2p_1$	$X_0$	$X_0$	$X_0$		
$p_2p_0$	$X_0$	$X_0$	$X_0$		
$p_2p_2$				$X_0$	$X_0$
$p_0p_0$	$p_1p_1$	$p_0p_2$	$p_2p_1$	$p_2p_0$	

$p_1p_1$	$X_1$				
$p_0p_2$		$X_1$			
$p_2p_1$	$X_0$	$X_0$	$X_0$		
$p_2p_0$	$X_0$	$X_0$	$X_0$	$X_1$	
$p_2p_2$	$X_1$	$X_1$	$X_1$	$X_0$	$X_0$
$p_0p_0$	$p_1p_1$	$p_0p_2$	$p_2p_1$	$p_2p_0$	

- $p_2p_2 \xrightarrow{a} p_2p_1$  και  $p_0p_2 \xrightarrow{a} p_1p_1$ , άρα  $p_2p_2$  και  $p_0p_2$  διακρίσιμες.
- $p_2p_1 \xrightarrow{b} p_2p_2$  και  $p_2p_0 \xrightarrow{b} p_2p_0$ , άρα  $p_2p_1$  και  $p_2p_0$  διακρίσιμες.

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να διακρίνουμε τις  $p_0p_2$  και  $p_0p_0$ , αφού με  $a$  οδηγούν στην ίδια κατάσταση, και με  $b$  η  $p_0p_0$  οδηγεί στον εαυτό της και η  $p_0p_2$  στην  $p_0p_0$ , οπότε οι καταστάσεις αυτές συγχωνεύονται. Το ελάχιστο DFA φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 10: Ελάχιστο DFA για την διαφορά των  $L_1$  και  $L_2$

□

Παρατηρήστε ότι παρόλο που στις δύο προηγούμενες ασκήσεις ελαχιστοποιήσαμε το γινόμενο των αυτομάτων με μόνη διαφορά τις τελικές καταστάσεις, τα ελάχιστα DFAs είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους.

### Άσκηση 2.3

Ελαχιστοποιήστε το αυτόματο του σχήματος 8δ.

### Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των καταστάσεων του αυτομάτου.

Αρχικά, βάζουμε  $X_0$  στις καταστάσεις που διακρίνονται επειδή η μία είναι τελική και η άλλη δεν είναι.

Στην επόμενη φάση, βάζουμε  $X_1$  στις καταστάσεις που με ένα σύμβολο ( $i$  ή  $f$ ) οδηγούν σε διακρίσιμες καταστάσεις, δηλαδή σε ένα ζεύγος καταστάσεων που ήδη έχουμε διακρίνει με  $X_0$ :

$q_1$				
$q_2$				
$q_f$	$X_0$	$X_0$	$X_0$	
$q_j$				$X_0$
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_f$

- Έχουμε ότι  $q_2 \xrightarrow{f} q_f$  και  $q_j \xrightarrow{f} q_j$ , και οι  $q_f$  και  $q_j$  είναι διακρίσιμες (αφού η μία είναι τελική και η άλλη δεν είναι), οπότε τις διακρίνουμε με  $X_1$ .

- Ομοίως,  $q_2 \xrightarrow{f} q_f$  και  $q_1 \xrightarrow{f} q_2$ , άρα  $q_1$  και  $q_2$  διακρίσιμες.
- $q_0 \xrightarrow{f} q_j$  και  $q_2 \xrightarrow{f} q_f$ , άρα  $q_0$  και  $q_2$  διακρίσιμες.
  - Έχουμε ότι  $q_0 \xrightarrow{f} q_j$  και  $q_1 \xrightarrow{f} q_2$ , και έχουμε ήδη διακρίνει τις  $q_2$  και  $q_j$  με  $X_1$ , άρα διακρίνουμε τις  $q_0$  και  $q_1$  με  $X_2$ .
  - Ομοίως,  $q_1 \xrightarrow{f} q_2$  και  $q_j \xrightarrow{f} q_f$ , και έχουμε ήδη διακρίνει τις  $q_2$  και  $q_j$  με  $X_1$ , άρα διακρίνουμε τις  $q_1$  και  $q_j$  με  $X_2$ .
  - Τέλος,  $q_0 \xrightarrow{i} q_1$  και  $q_j \xrightarrow{i} q_f$ , και έχουμε ήδη διακρίνει τις  $q_1$  και  $q_j$  με  $X_2$ , άρα διακρίνουμε τις  $q_0$  και  $q_f$  με  $X_3$ .

$q_1$	$X_2$			
$q_2$	$X_1$	$X_1$		
$q_f$	$X_0$	$X_0$	$X_0$	
$q_j$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X_0$
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_f$

Παρατηρούμε ότι όλος ο πίνακας έχει συμπληρωθεί, οπότε το αυτόματο του σχήματος 8δ είναι ελάχιστο. □

### 3 Pumping Lemma

#### Άσκηση 3.1

Δείξτε ότι η γλώσσα  $L_1 = \{0^{k^2} \mid k > 0\}$  δεν είναι κανονική.

#### Λύση

Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, πως η  $L_1$  είναι κανονική, άρα ισχύει το pumping lemma, που σημαίνει ότι υπάρχει ένα  $n \in \mathbb{N}$  για το οποίο για κάθε  $z \in L_1, |z| \geq n$ , να υπάρχουν  $u, v, w \in \Sigma^*$  ("σπάσιμο" της  $z$ ) τέτοια ώστε:  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$  και για κάθε  $i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L_1$ .

Έστω λοιπόν το  $n \in \mathbb{N}$ . Επιλέγουμε  $z = 0^{n^2}$ , που σίγουρα υπάρχει, αφού η  $L_1$  είναι άπειρη γλώσσα, και  $|z| = n^2 \geq n$ . Το pumping lemma μας βεβαιώνει ότι υπάρχουν  $u, v, w \in \Sigma^*$ , τέτοια ώστε  $z = 0^{n^2} = uvw$ , και αφού  $|v| \geq 1, v = 0^m$ , για  $1 \leq m \leq n$ .

Αφού έχουμε για κάθε  $i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L_1$ , επιλέγουμε  $i = 2$ : Τότε  $uv^2w \in L$ , και  $|uv^2w| = |uuvw| = n^2 + m$ , αλλά το  $n^2 + m$  δεν είναι τέλειο τετράγωνο, αφού  $n^2 < n^2 + m \leq n^2 + n = n(n+1) < (n+1)^2$ , άρα καταλήξαμε σε άτοπο, ενώ είχαμε υποθέσει ότι η  $L_1$  είναι κανονική, άρα η  $L_1$  δεν είναι κανονική.  $\square$

#### Άσκηση 3.2

Δείξτε ότι η γλώσσα  $L_2 = \{0^p \mid p \text{ πρώτος}\}$  δεν είναι κανονική.

#### Λύση

Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, πως η  $L_2$  είναι κανονική. Έστω  $z = 0^p \in L_2$ , για κάποιον πρώτο  $p$ , με  $|z| \geq n$  (σίγουρα υπάρχει τέτοιο  $p$ , αφού οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος). Τότε, σύμφωνα με το pumping lemma, θα υπάρχουν  $u, v, w$  τέτοια ώστε  $z = 0^p = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , και  $uv^i w \in L_2$ , για κάθε  $i \in \mathbb{N}$ .

Έστω  $|u| + |w| = k$  και  $|v| = \ell \geq 1$ . Τότε, αφού  $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L_2$ , τότε και  $0^{k+i\ell} \in L_2$  για κάθε  $i \in \mathbb{N}$ . Για  $i = 0$ :  $0^k \in L_2 \Rightarrow k$  πρώτος. Αν θέσουμε  $i = k$ , τότε  $0^{k+k\ell} = 0^{k(1+\ell)} \in L_2$ , άρα  $k(1+\ell)$  πρώτος. Όμως  $\ell \geq 1 \Rightarrow 1+\ell \geq 2$ , άρα το  $1+\ell$  είναι μη-τετριμμένος παράγοντας του  $k(1+\ell)$ , άρα δεν είναι πρώτος. Άτοπο.  $\square$

#### Υπενθύμιση: Pumping Lemma

Αν η  $L$  είναι κανονική, τότε:

$\exists n \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε:

$\forall z \in L, |z| \geq n$ :

$\exists u, v, w \in \Sigma^*$ , τέτοια ώστε:

$z = uvw$  και  $|uv| \leq n$  και  $|v| \geq 1$  και  $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$ .

#### Μεθοδολογία

- Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η γλώσσα  $L$  δεν είναι κανονική.
- Υποθέτουμε ότι είναι κανονική, για να καταλήξουμε σε άτοπο, και εφαρμόζουμε το pumping lemma (PL).
- Το PL μας βεβαιώνει ότι υπάρχει ένα  $n \in \mathbb{N}$  για το οποίο να ισχύει το συμπέρασμά του.
- Επιλέγουμε  $z \in L$ , με  $|z| \geq n$ .
- Το PL μας βεβαιώνει ότι υπάρχει "σπάσιμο" της  $z$  στα  $u, v, w$ , που όμως ικανοποιούν τα  $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ .
- Αφού  $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$ , διαλέγουμε ένα  $i$  για το οποίο η συμβολοσειρά  $uv^i w$  να μην ανήκει στην  $L$ , και καταλήγουμε σε άτοπο.
- Το άτοπο του προηγούμενου βήματος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η  $L$  δεν είναι κανονική.

## 4 Τυπικές Γραμματικές

### Άσκηση 4.1

Βρείτε γραμματική που να αναγνωρίζει την γλώσσα του αυτομάτου του σχήματος 8δ.

#### Λύση

Μπορούμε να κατασκευάσουμε δεξιογραμμική κανονική γραμματική, ακολουθώντας τις μεταβάσεις του αυτομάτου. Ονομάζουμε με μη-τερματικά σύμβολα τις καταστάσεις του DFA:  $S \equiv q_0$ ,  $A \equiv q_1$ ,  $B \equiv q_2$ ,  $C \equiv q_f$ ,  $D \equiv q_j$ . Οι κανόνες θα είναι οι εξής:

$$S \rightarrow iA|fD$$

$$A \rightarrow iA|fB$$

$$B \rightarrow iD|fC$$

$$C \rightarrow fC|iD|\varepsilon$$

$$D \rightarrow iD|fD$$

(το  $\varepsilon$  προστίθεται γιατί η  $q_f$  είναι τελική κατάσταση.)

Μπορούμε να έχουμε γραμματική με λιγότερους κανόνες; Αρχικά, παρατηρούμε ότι αφού το μη-τερματικό  $D$  αντιπροσωπεύει την junk state, οπότε το  $D$ , όπως φαίνεται και από τους κανόνες, δεν πρόκειται ποτέ να καταλήξει σε τελική συμβολοσειρά (δηλαδή μόνο με τερματικά σύμβολα). Άρα, οι κανόνες που οδηγούν στην  $D$  μπορούν να παραλειφθούν. Επίσης, μπορούμε να συγχωνεύσουμε τους κανόνες του  $A$  και του  $B$  ως εξής:

$$S \rightarrow iS|iffC \quad C \rightarrow fC|\varepsilon$$

Η τελική γραμματική θα είναι η  $G = (\{S, C\}, \{i, f\}, \{S \rightarrow iS|iffC, C \rightarrow fC|\varepsilon\}, S)$ . □

### Άσκηση 4.2

Βρείτε γραμματική που να αναγνωρίζει την γλώσσα:

$$L_2 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x = x^R\}$$

(όπου  $x^R$  η ανάστροφη συμβολοσειρά, π.χ. αν  $x = abc$ , τότε  $x^R = cba$ )

#### Λύση

Για να βρούμε μια τέτοια γραμματική, πρέπει να σκεφτούμε αναδρομικά: μια συμβολοσειρά μήκους  $k$ ,  $k \geq 3$ , θα ανήκει στην γλώσσα αν μπορεί να γραφεί ως  $0y0$  ή  $1y1$ , για κάποιο  $y \in L_2$  μήκους  $k - 2$ . Άρα, χρειαζόμαστε τους κανόνες  $S \rightarrow 0S0$  και  $S \rightarrow 1S1$  για να παράγουμε τις συμβολοσειρές της γλώσσας αναδρομικά. Επίσης, προσθέτουμε τον κανόνα  $S \rightarrow \varepsilon$  για να καταλήγουμε σε τελική συμβολοσειρά, αλλά τώρα η γλώσσα μας περιορίζεται στις συμβολοσειρές άρτιου μήκους. Για να συμπεριλάβουμε και αυτές με περιττό μήκος, προσθέτουμε τους κανόνες  $S \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow 1$ . Η γραμματική θα είναι η:

$$G = (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \rightarrow \varepsilon|0|1|0S0|1S1\}, S)$$

□

**Άσκηση 4.3**

Έστω η γραμματική  $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$  με σύνολο κανόνων  $P$ :

$$S \rightarrow 0S11|\varepsilon$$

Ποια γλώσσα αναγνωρίζει η  $G$ ;

**Λύση**

Παρατηρούμε ότι εφαρμόζοντας συνεχώς τον κανόνα παραγωγής:

$$S \rightarrow 0S11 \rightarrow 00S1111 \rightarrow 000S111111 \rightarrow \dots \rightarrow 0^n S 1^{2n} \rightarrow 0^n \varepsilon 1^{2n} \rightarrow 0^n 1^{2n}$$

Επίσης υπάρχει και ο κανόνας  $S \rightarrow \varepsilon$ , άρα  $\varepsilon \in L(G)$ . Η γλώσσα που αναγνωρίζεται είναι η:

$$L(G) = \{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$$

□

**5 Αυτόματα για μη-κανονικές γλώσσες****Άσκηση 5.1**

Περιγράψτε αυτόματο LBA για την context-sensitive γλώσσα  $L = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Λύση**

Αντί για LBA Θα περιγράψουμε ένα 2-PDA (PDA με 2 στοίβες) που δεν χρησιμοποιεί περισσότερα σύμβολα στις 2 στοίβες συνολικά από όσα υπάρχουν στην είσοδο.

Αποδεικνύεται ότι η ταινία μίας μηχανής Turing μπορεί να προσομοιωθεί πλήρως χρησιμοποιώντας δύο στοίβες (μπορείτε να σκεφτείτε πώς;) και αντίστροφα. Επομένως, ένα 2-PDA που χρησιμοποιεί συνολικό χώρο (μέγεθος στοιβών) γραμμικό, δηλαδή το πολύ μια σταθερά επί το μέγεθος της εισόδου, είναι ισοδύναμο με LBA.

Η περιγραφή του 2-PDA σε γλώσσα υψηλού επιπέδου είναι η εξής:

- Όσο διαβάζεις  $a$  βάζε (push) 0 στην 1η στοίβα.
- Όσο διαβάζεις  $b$  βάζε (push) 1 στην 2η στοίβα.
- Όσο διαβάζεις  $a$  βγάξε (pop) ένα 0 από την 1η στοίβα και ένα 1 από τη 2η στοίβα (αν κάποια από τις 2 στοίβες είναι κενή προτού βγάλεις το αντίστοιχο 0 ή 1 απόρριψε).
- Αν η είσοδος τελείωσε και οι 2 στοίβες είναι κενές αποδέξου.



Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το αυτόματο αποδέχεται αν και μόνο αν η συμβολοσειρά εισόδου ανήκει στη γλώσσα  $L$ .

*Σημείωση:* προφανώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διαφορετικά σύμβολα στις στοίβες, π.χ.  $a$  και  $b$  αντίστοιχα.  $\square$