Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,99 < a_n < 1,01\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 0,999\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n > 1,1\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,9999 < a_n\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση.

Το σύνολο A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Για να το δούμε παίρνουμε $\varepsilon = 0,01 > 0$, εφόσον $a_n \to 1$ έχουμε ότι $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $a_n \in (0,99, 1,01)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Το σύνολο B είναι πεπερασμένο. Για $\varepsilon = 0,001 > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,999, 1,001)$. Ειδικότερα έχουμε $a_n > 0,999$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως αν $a_n \leq 0,999$ τότε $n < n_0$. Δηλαδή $B \subseteq \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο C είναι επίσης πεπερασμένο. Παίρνουμε $\varepsilon = 0,1 > 0$. Τότε υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,9, 1,1)$. Ειδικότερα έχουμε $a_n < 1,1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως αν $a_n > 1,1$ τότε $n < n_0$. Δηλαδή $C \subseteq \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο D περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Για $\varepsilon = 0,0001 > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Ειδικότερα έχουμε $a_n > 1-\varepsilon = 0,9999$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άσκηση 2 (Επαλήθευση με βάση τον ορισμό)**.** Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ συκλίνει στο 0.

Λύση.

Δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

[*Πρόχειρο:* Θέλουμε $|a_n - 0| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Αν $n \geq n_0$ τότε $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n_0}}$ επομένως αρκεί να έχουμε $\dfrac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$. Ισοδύναμα $\sqrt{n_0} > 1/\varepsilon$ ή αλλιώς $n_0 > 1/\varepsilon^2$.]

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 \geq 1$ με $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

Έστω $n \geq n_0$.

Τότε

$$|a_n - 0| = |\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

Άσκηση 3 (Θεωρία Σύγκλισης)**.** Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση.

(i) Η πρόταση είναι αληθής. Εφόσον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|a_n| \leq M$, δηλαδή $-M \leq a_n \leq M$ για όλα τα $n \geq 1$. Επομένως

$$-\frac{M}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{M}{n}$$

Αφού $\dfrac{M}{n} \to 0$ και $-\dfrac{M}{n} \to 0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει $\dfrac{a_n}{n} \to 0$.

(ii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε $a_n = (-1)^n$ and $b_n = 1$, $n \geq 1$. Τότε $|a_n| \leq 1$ για κάθε $n \geq 1$ και άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη. Προφανώς η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο 1. Από την άλλη $a_n \cdot b_n = a_n = (-1)^n$ για κάθε $n \geq 1$ και όπως δείξαμε αυτή δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

(iii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $b_n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1) \cdot a_n = -a_n$ και άρα $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. (Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για n: άρτιος, όπως επίσης $a_n = -1$ και $b_n = 1$ για n: περιττός. Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε $a_n + b_n = 0$.)

Αφού $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ είναι σαφές ότι η ακολουθία $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο 0. Από την άλλη οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσες. Αυτό το έχουμε δείξει στο μάθημα για την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Με όμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα. Αλλιώς: αν είχαμε $b_n \to b$ τότε και $-b_n \to -b$ δηλαδή $a_n \to -b$ (αφού $a_n + b_n = 0$), οπότε και η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα ήταν συγκλίνουσα που είναι άτοπο.

(iv) Η πρόταση είναι αληθής. Προφανώς $b_n = a_n + b_n + -a_n$ για κάθε $n \geq 1$. Από την υπόθεσή μας $a_n \to a$ και $a_n + b_n \to c$ για κάποια $a, c \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$b_n = a_n + b_n - a_n \to c - a.$$

Άρα η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 4 (Όριο ρητών παραστάσεων)**.**

(i) Δείξτε ότι $\dfrac{1}{2n^2 - 1} \to 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n.

Λύση.

(i) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^2 και έχουμε

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\to\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0.$$

(ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^3 και έχουμε

$$\frac{n^3-2n+1}{5n^3+n^2+1}=\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\to\frac{1-2\cdot 0+0}{5+0+0}=\frac{1}{5}\,.$$

(iii) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p(x)=a_kx^k+\cdots+a_0$ και $q(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$ με $a_k,b_m\neq 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^m και έχουμε

$$\frac{p(n)}{q(n)}=\frac{\frac{a_k}{n^{m-k}}+\cdots+\frac{a_0}{n^m}}{b_m+\cdots+\frac{b_0}{n^m}}\,.$$

Είναι σαφές ότι ο παρονομαστής συγκλίνει στον αριθμό

$$b_m+\cdots+b_0\cdot 0=b_m.$$

Αν $k=m$ τότε στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος έχουμε $n^{m-k}=1$ ενώ όλοι οι άλλοι εκθέτες του n είναι θετικοί. Επομένως ο αριθμητής του κλάσματος συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k+\cdots+a_0\cdot 0=a_k,$$

Άρα $\frac{p(n)}{q(n)}\to\frac{a_k}{b_m}$.

Αν $k<m$ τότε $n^{m-k}\geq n$ και άρα όλοι οι εκθέτες του n στον αριθμητή του πιο πάνω κλάσματος είναι θετικοί. Προκύπτει ότι ο αριθμητής συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k\cdot 0+\cdots+a_0\cdot 0=0.$$

Συνεπώς $\frac{p(n)}{q(n)}\to\frac{0}{b_m}=0$.

Άσκηση 5 (Υπολογισμός ορίων). Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n=\left(-\frac{7}{8}\right)^n+\sqrt[n]{n},\quad n\geq 1.$

(ii) $b_n=\frac{(-1)^n}{n},\quad n\geq 1.$

(iii) $c_n=\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1},\quad n\geq 1.$ **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n=\dfrac{n^2+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{n^3-\sqrt[n]{n}+1},\quad n\geq 1.$

(v) $e_n=\sqrt[2n]{2n},\quad n\geq 1.$ **Υπόδειξη:** Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με την $x_n=\sqrt[n]{n}, n\geq 1$;

(vi) $f_n=\sqrt[2n]{n},\quad n\geq 1.$

Λύση.

(i) Αφού $\left|-\frac{7}{8}\right|<1$ έχουμε $\left(-\frac{7}{8}\right)^n\to 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\sqrt[n]{n}\to 1$. Συνεπώς

$$a_n=\left(-\frac{7}{8}\right)^n+\sqrt[n]{n}\to 0+1=1.$$

(ii) Προφανώς $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ και άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Αφού $\frac{1}{n} \to 0$ και $-\frac{1}{n} \to 0$ έχουμε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

(iii) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) \cdot (\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{(n^2+2) - (n^2+1)}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} \quad (\text{γιατί } n^2 \leq n^2+1 \leq n^2+2) \\ &= \frac{1}{n+n} \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Αφού $n^2 + 1 \leq n^2 + 2$ έχουμε $c_n \geq 0$ και άρα

$$0 \leq c_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $c_n \to 0$.

(iv) Διαιρούμε αριθμητή-παρονομαστή με το n^3 και έχουμε

$$d_n = \frac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{0 + 0 \cdot 0 + 0}{1 - 0 \cdot 1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

(v) Θέτουμε $x_n = \sqrt[n]{n}, n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $e_n = \sqrt[2n]{2n} = x_{2n}$. Γνωρίζουμε ότι $x_n \to 1$ και επομένως $x_{2n} \to 1$. Άρα $\sqrt[2n]{2n} \to 1$.

(vii) Θέτουμε όπως και πριν $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[2n]{n} = n^{\frac{1}{2n}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_n}.$$

Αφού $x_n \to 1$ έχουμε $\sqrt{x_n} \to 1$, δηλαδή $\sqrt[2n]{n} \to 1$.

Άσκηση 6 (Διερεύνηση σύγκλισης)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Λύση.

Έχουμε

$$a_{2n} = \frac{1+1\cdot(2n)^2}{2+3\cdot(2n)+(2n)^2} = \frac{4n^2+1}{4n^2+6n+2} = \frac{4+\dfrac{1}{n^2}}{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^2}} \longrightarrow \frac{4+0}{4+0+0} = 1.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{1-1\cdot(2n+1)^2}{2+3\cdot(2n+1)+(2n+1)^2} \\ &= \frac{1-4n^2-4n-1}{2+6n+3+4n^2+4n+1} \\ &= \frac{-4n^2-4n}{4n^2+10n+6} \\ &= \frac{-4-\dfrac{4}{n}}{4+\dfrac{10}{n}+\dfrac{6}{n^2}} \\ &\longrightarrow \frac{-4-0}{4+0+0} = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

Τέλος δείχνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε τότε θα είχαμε $a_{2n+1}-a_{2n}\to 0$. Από την άλλη όμως $a_{2n+1}-a_{2n}\to -1-1=-2$, το οποίο είναι άτοπο (μοναδικότητα ορίου).