Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (Χρήση του συμβολισμού Σ)**.** Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$
\begin{aligned}
17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{\dots}^{\dots} \ \dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{\dots}^{\dots} \ \dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots} \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}
$$

Λύση.

$$
\begin{aligned}
17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k &= 17 \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = 17 \cdot a_1 + \cdots + 17 \cdot a_n = \sum_{k=1}^{n} \ 17 \cdot a_k \\
\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = \ (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \\
\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + \cdots + a_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \\
(a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \cdots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.
\end{aligned}
$$

Σχόλιο: Είναι επίσης σωστό ότι $(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \ \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$, απλά τότε ο πρώτος όρος θα είναι ο $\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^n$.

Άσκηση 2 (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Δείξτε από τα αξιώματα του μαθήματος ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Λύση.

Η ακολουθία $a_n = -b_n$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα γιατί για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$b_n \geq b_{n+1} \iff -a_n \geq -a_{n+1} \iff a_{n+1} \geq a_n.$$

Επιπλεόν επειδή η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι κάτω φραγμένη υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $b_n \geq M$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως

$$-a_n \geq M \iff a_n \leq -M$$

για κάθε $n \geq 1$ και άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι άνω φραγμένη. Από το αξιώματα του μαθήματος (Αξίωμα Μονότονης Φραγμένης Ακολουθίας) η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό a. Άρα

$$b_n = -a_n \to -a$$

και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 3 (Κριτήρια Λόγου - Ρίζας)**.** Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2+n+1}{7n^4+1}\right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$.

Λύση.

Έχουμε

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot (1+0) = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο Λόγου ισχύει $a_n \to 0$.

Προχωράμε στην επόμενη ακολουθία:

$$\begin{aligned}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

Επομένως πάλι από το Κριτήριο Λόγου έχουμε $b_n \to 0$.

Στις επόμενες δύο ακολουθίες εφαρμόζουμε το Κριτήριο Ρίζας.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{3n^2+n+1}{7n^4+1} = \frac{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{0}{7} = 0 < 1.$$

Επομένως από το Κριτήριο Ρίζας έχουμε $c_n \to 0$. Τέλος

$$\sqrt[n]{|d_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1.$$

Από το Κριτήριο Ρίζας προκύπτει $d_n \to 0$.

Άσκηση 4 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Υπόδειξη. Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής.

Λύση.

(i) Προφανώς ισχύει $0 < a_1 < 2$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $0 < a_n < 2$ και δείχνουμε ότι $0 < a_{n+1} < 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &> \sqrt{1+0} \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &< \sqrt{1+2} \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Επομένως $0 < a_{n+1} < 2$ και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για $n = 1$ ισχύει

$$a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$ και δείχνουμε ότι $a_{n+1} < a_{n+2}$. Έχουμε

$$a_n < a_{n+1} \iff 1+a_n < 1+a_{n+1} \iff \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+a_{n+1}} \iff a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Επομένως $a_{n+1} < a_{n+2}$ και από την Αρχή Επαγωγής προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Εφόσον η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε κάποιο αριθμό a. (*Προσοχή*: Μην ξεχνάτε να το αναφέρετε αυτό, γιατί αν δεν αιτιολογήσετε την ύπαρξη του ορίου τότε δεν μπορείτε να πάρετε τα όρια στις δύο πλευρές της ισότητας όπως κάνουμε πιο κάτω.)

Αφού $a_n \to a$ έχουμε επίσης $a_{n+1} \to a$. Παίρνοντας όρια και στις δύο πλευρές της ισότητας $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ προκύπτει η εξίσωση

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Λύνουμε

$$a^2 = 1+a \iff a^2 - a - 1 = 0 \iff a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Εφόσον $a_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Επομένως η λύση $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ απορρίπτεται και άρα $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Έχουμε δηλαδή $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 5 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to 2$.

Λύση.

(i) Για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 1 \in [1, 2]$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε $1 \leq a_n \leq 2$. Δείχνουμε ότι $1 \leq a_{n+1} \leq 2$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \geq 1 \quad &\iff \quad 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \geq 1 \\
&\iff \quad 6 + 6a_n \geq 7 + a_n \quad \text{(παρατηρήστε ότι από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει} \\
&\qquad\qquad 7 + a_n \geq 8 > 0\text{, επομένως η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει} \\
&\qquad\qquad \text{όταν πολλαπλασιάζουμε με } 7 + a_n) \\
&\iff \quad 5a_n \geq 1 \\
&\iff \quad a_n \geq \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $a_n \geq 1$. Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει $a_{n+1} \geq 1$. Δείχνουμε όμοια ότι $a_{n+1} \leq 2$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \leq 2 \quad &\iff \quad 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \leq 2 \\
&\iff \quad 6 + 6a_n \leq 14 + 2a_n \qquad \text{(πάλι από την Επαγωγική Υπόθεση } 7 + a_n > 0) \\
&\iff \quad 4a_n \leq 8 \\
&\iff \quad a_n \leq 2
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την Επαγωγική Υπόθεση, επομένως $a_{n+1} \leq 2$. Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \\
&\geq 6 \cdot \frac{1+a_n}{9} \qquad \text{(από το (i) αφού } 7 + a_n \leq 7 + 2 \leq 9) \\
&= \frac{2}{3} \cdot (1 + a_n) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2a_n}{3} \\
&\geq \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{3} \quad \text{(πάλι από το (i) αφού έχουμε } 2 \geq a_n) \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

(iii) Από τα (i) και (ii) η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, επομένως συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $a = 2$. Αφού $a_n \to a$ τότε $a_{n+1} \to a$. Θεωρούμε τη σχέση

$$a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n}$$

και παίρνουμε το όριο και στις δύο πλευρές. Καταλήγουμε

$$a = 6 \cdot \frac{1 + a}{7 + a}$$

Λύνοντας την εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε το a,

$$\begin{aligned} a = 6 \cdot \frac{1+a}{7+a} \quad &\iff \quad 7a + a^2 = 6 + 6a \\ &\iff \quad a^2 + a - 6 = 0 \\ &\iff \quad (a+3)(a-2) = 0 \\ &\iff \quad a = -3 \quad \text{ή} \quad a = 2. \end{aligned}$$

Αφού $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$, τότε και το όριο a θα ικανοποιεί $1 \leq a \leq 2$. Επομένως η λύση $a = -3$ απορρίπτεται και προκύπτει $a = 2$.

Άσκηση 6 (Ακολουθίες με μεταβλητό πλήθος προσθετέων)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\ .$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Λύση.

(i) Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ &\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+n} \\ &= \qquad\qquad \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots\cdots\cdots\cdots - \frac{1}{2n} \\ &= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $2n + 1 < 2n + 2$.

(ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1}$ επομένως

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

για κάθε $n \geq 1$. (Στον ορισμό του x_n έχουμε n προσθετέους.)

Εφόσον η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη προκύπτει ότι είναι και συγκλίνουσα.

Σχόλιο: Μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα ότι $x_n \to \ln(2)$.

Άσκηση 7 (Η ακολουθία του αριθμού e)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

(iii) Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Λύση.

i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το } (n+1)/n\text{)} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}
\end{aligned}$$

(ii) Αφού $-\dfrac{1}{(n+1)^2} > -1$ έχουμε από την ανισότητα Bernoulli και το (i)

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{n+1}{n}\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\\ &\geq \frac{n+1}{n}\cdot\left[1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right]\\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(iii) Υπολογίζουμε

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}} = x_{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

και

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} = (x_{2n})^{1/2} = \sqrt{x_{2n}}$$

για κάθε $n \geq 1$.

Εφόσον $x_n \to e$ ισχύει $x_{n+1} \to e$ και $x_{2n} \to e$. Άρα

$$a_n = x_{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} \longrightarrow e\cdot 1 = e$$

και

$$b_n = \sqrt{x_{2n}} \longrightarrow \sqrt{e}.$$