Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$)**.** Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid 1234567890 < a_n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 17\} \\ C &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n > 1,1\} \\ D &= \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n < -9876543210\} \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 (Σύγκλιση στα $\pm\infty$ με βάση τον ορισμό)**.**

(i) Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = -n^3$ συγκλίνει στο $-\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα **όχι** κάτω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $-\infty$.

Άσκηση 3 (Άλγεβρα Σειρών)**.**

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c \neq 0$ και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 4 (Διερεύνηση Σύγκλισης)**.** Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right].$$

Άσκηση 5. Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \ .$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε $(1-x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \ldots.$

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς)**.** Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \ .$$