Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Δεδομένα. Θεωρούμε γνωστούς τους κανόνες

$$\infty + x = x + \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$-\infty + x = x - \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$
$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

όπως επίσης και **όλους τους υπόλοιπους κανόνες** πράξεων με το άπειρο που έχουν αναφερθεί στις διαφάνειες.

Θεωρούμε ακόμα γνωστά τα εξής: α) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θετικών πραγματικών αριθμών έχουμε

$$x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$

(Η απόδειξη αυτού γίνεται με βάση τον ορισμό της σύγκλισης). Όμοια β) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ αρνητικών πραγματικών αριθμών έχουμε

$$x_n \to -\infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0.$$

Με βάση αυτά και την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x = 0$.

Για τις ανάγκες του φυλλαδίου θεωρούμε γνωστή την εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Η f είναι συνεχής, διαφορίσιμη με $f' = f$, θετική και γνησίως αύξουσα με $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό της εκθετικής συνάρτησης στο επόμενο μάθημα.

Άσκηση 1.

(i) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε το πολυώνυμο ως γινόμενο $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$.

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι περιττός τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

Λύση.

(i) Έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+1)=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\cdot(1-3/x+1/x^3)\right]=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}(1-3/x+1/x^3)$$
$$=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot(1-3\cdot 0+0)=\lim_{x\to\infty}x^3=\infty,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}1/x^k=0$ για κάθε $k\geq 1$.

Σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x)=x^k\cdot\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right).$$

Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right)=a_k+0+\cdots+0=a_k.$$

Άρα από τους γνωστούς κανόνες

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}x^k\cdot\lim_{x\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right)=a_k\cdot\lim_{x\to\infty}x^k.$$

(ii) Από τον κανόνα $\infty\cdot\infty=\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=\infty$ και από τα προηγούμενα έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=a_k\cdot\lim_{x\to\infty}x^k=a_k\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k>0\\ -\infty, & \text{αν } a_k<0.\end{cases}$$

(iii) Από τον κανόνα $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=\infty$ για θετικό άρτιο αριθμό k, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=a_k\cdot\lim_{x\to-\infty}x^k=a_k\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k>0\\ -\infty, & \text{αν } a_k<0.\end{cases}$$

(iii) Από τους κανόνες $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$ και $(-\infty)\cdot\infty=-\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=-\infty$ για περιττό αριθμό k. Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=a_k\cdot\lim_{x\to-\infty}x^k=a_k\cdot(-\infty)=\begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k<0\\ -\infty, & \text{αν } a_k>0.\end{cases}$$

Άσκηση 2 (Κανόνας de L' Hospital)**.** Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{5x^2+4x}$$
$$\ell_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{x^2+1}$$
$$\ell_3=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$
$$\ell_4=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$$

Λύση.

Στο πρώτο όριο έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞ (Άσκηση 1). Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες. Ελέγχουμε $(5x^2+4x)'=10x+4\neq 0$ για κάθε $x>0$. (Είναι αναγκαίο η παράγωγος του παρονομαστή να μην μηδενίζεται στο διάστημα I που παίρνουμε το όριο.) Επομένως από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_1=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{10x+4}.$$

Αυτό οδηγεί πάλι σε μια απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Επειδή $(10x+4)' = 10 \neq 0$ έχουμε ξανά με εφαρμογή του Κανόνα de L' Hospital,

$$\ell_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{5x^2+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{10x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\,.$$

Στο ℓ_2 παρατηρούμε ότι πάλι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $-\infty/\infty$. Ελέγχουμε τις παραγώγους $(x^2+1)' = 2x \neq 0$ για κάθε $x > 0$, $(2x)' = 2 \neq 0$ (τη δεύτερη παράγωγο την παίρνουμε γιατί θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε δύο φορές τον Κανόνα de L' Hospital). Έχουμε

$$\ell_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-6x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x-6}{2} = \lim_{x\to-\infty} (3x-3) = -\infty.$$

Στην τρίτη ισότητα εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα de L' Hospital γιατί το όριο οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\infty/(-\infty)$

Σχόλιο. Τα ℓ_1 και ℓ_2 μπορούν να υπολογιστούν και με πιο στοιχειώδεις μεθόδους. Όπως στις ακολουθίες μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του x και να χρησιμοποιήσουμε ότι $\lim_{x\to\infty} 1/x^k = \lim_{x\to-\infty} 1/x^k = 0$.

Στο ℓ_3 επειδή η συνάρτηση sin είναι συνεχής στο 0 έχουμε $\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ και επομένως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0/0$. Επειδή η παράγωγος στον παρονομαστή είναι σταθερή και ίση με $1 \neq 0$ έχουμε από τον Κανόνα de L' Hospital,

$$\ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

(Το πιο πάνω όριο μπορεί επίσης να υπολογιστεί και με γεωμετρικά επιχειρήματα.)

Στο ℓ_4 έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Η παράγωγος του παρονομαστή είναι $e^x \neq 0$ για κάθε x. Από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_4 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 2\cdot 0 = 0,$$

όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόσαμε πάλι τον Κανόνα de L' Hospital γιατί έχουμε την απροσδιοριστία ∞/∞.

Σχόλια σχετικά με το όριο $\ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Στον υπολογισμό του ορίου θεωρήσαμε δεδομένο ότι $(\sin x)' = \cos x$ και εφαρμόσαμε τον Κανόνα de L' Hospital. Πρώτα απ' όλα ξεκαθαρίζουμε ότι χρησιμοποιούμε την ισότητα $(\sin x)' = \cos x$ για όλα τα x γύρω από το 0 με $x \neq 0$ (αυτό αρκεί για την εφαρμογή του Κανόνα de L' Hospital). Δεν χρησιμοποιούμε την ισότητα $(\sin 0)' = \cos 0$ επειδή αυτή είναι προφανώς ισοδύναμη με το $\ell_3 = 1$ που είναι και το ζητούμενο.

Μία από τις αποδείξεις του $(\sin x)' = \cos x$ για $x \neq 0$ χρησιμοποιεί πως $\ell_3 = 1$, δηλαδή αυτό που θέλουμε να δείξουμε. Οπότε τίθεται θέμα καλής θεμελίωσης: προφανώς δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποδείξαμε μια μαθηματική πρόταση P αν πήραμε ως δεδομένο μια άλλη μαθηματική πρόταση Q, η απόδειξη της οποίας χρειάζεται την P ("κυκλική λογική").

Εδώ όμως δεν υπάρχει πρόβλημα επειδή η Q μπορεί να αποδειχθεί και **χωρίς τη χρήση** της P. Αναλυτικότερα:

Η ισότητα $(\sin x)' = \cos x$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2), x \neq 0$ μπορεί να αποδειχθεί και με γεωμετρικά επιχειρήματα χωρίς προηγούμενη γνώση του ορίου ℓ_3. Αφού λοιπόν εξασφαλίσουμε την ισότητα $(\sin x)' = \cos x$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2), x \neq 0$, με τη βοήθεια του Κανόνα de l ' Hospital μπορούμε να δείξουμε ότι $\ell_3 = 1$ όπως πιο πάνω.

Επίσης το θέμα σχετίζεται προφανώς με τον τρόπο που ορίζουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Για διδακτικούς λόγους δεχόμαστε τις έννοιες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με βάση όσων ξέρουμε από τη Γεωμετρία, π.χ. ημίτονο γωνίας = απέναντι πλευρά / υποτείνουσα ή γενικότερα το ημίτονο γωνίας είναι η τεταγμένη με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο. Αυτοί οι ορισμοί όμως προαπαιτούν την έννοια του **μήκους τόξου** (δηλαδή του μέτρου γωνίας) η οποία θεμελιώνεται με βάση αυτή του ορίου ακολουθίας, και που μπορεί επίσης να εκφραστεί με τη βοήθεια της έννοιας του ολοκληρώματος.

Για τον αυστηρό ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων υπάρχουν (τουλάχιστον) οι ακόλουθες δύο προσεγγίσεις.

α) Ορίζουμε τις συναρτήσεις sin και cos με χρήση **ολοκληρωμάτων**. Τότε μπορεί να αποδειχθεί πως $(\sin x)' = \cos x$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2), x \neq 0$ χωρίς προηγούμενη γνώση του $\ell_3 = 1$.

β) Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με βάση τις δυναμοσειρές. Με αυτόν τον ορισμό η ιδιότητα $(\sin x)' = \cos x$ είναι άμεση.

Τονίζουμε ότι η μέθοδος με τον Κανόνα de L' Hospital δεν είναι ο μόνος τρόπος υπολογισμού του ορίου ℓ_3 και μάλλον ούτε και ο "καλύτερος". Η ισότητα $(\sin 0)' = \cos 0$, δηλαδή $\ell_3 = 1$, **προκύπτει με πιο στοιχειώδη** μέσα, ανεξάρτητα από τον τρόπο που έχουμε ορίσει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Άσκηση 3 (Κριτήριο Παρεμβολής για όρια συναρτήσεων)**.** Έστω I ένα διάστημα και $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ που είναι άκρο του I ή ανήκει στο I. Αν οι συναρτήσεις $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{για κάθε } x \in I$$

και αν $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \ell$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για ακολουθίες.

Λύση.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του I με $x_n \to c$ και $x_n \neq c$ για κάθε $n \geq 1$.

Έχουμε $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια και την υπόθεση $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$ έχουμε $\ell = \lim\limits_{x_n\to c} f(x_n) = \lim\limits_{x_n\to c} g(x_n)$.

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής για τις ακολουθίες έχουμε $\lim\limits_{x_n\to c} h(x_n) = \ell$. Με άλλα λόγια δείξαμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του I με $x_n \to c$ και $x_n \neq c$ για όλα τα $n \geq 1$, έχουμε $h(x_n) \to c$. Από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια προκύπτει $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \ell$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1) \text{ και } \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \pi/2) \to (-1, 1) : f(t) = \cos t$. Η f είναι 1-1, επί και $\arccos = f^{-1}$. Έστω $x \in (-1, 1)$, τότε $x = f(t) = \cos t$ για κάποιο $t \in (0, \pi/2)$. Έχουμε $f'(t) = -\sin t \neq 0$ επειδή $t \in (0, \pi/2)$. Άρα από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η arccos είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\arccos'(x) = \frac{1}{f'(t)} = -\frac{1}{\sin t}\ .$$

Εκφράζουμε την ποσότητα $\sin t$ συναρτήσει του $x = \cos t$. Από τον τύπο $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ έχουμε

$$\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Αφού $t \in (0, \pi/2)$ έχουμε $\sin t > 0$ άρα $t = \sqrt{1-x^2}$ και επομένως

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Για το επόμενο θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} : g(t) = \tan t$. Η g είναι 1-1, επί και $\arctan = g^{-1}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε $x = g(t) = \tan t$ για κάποιο $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Έχουμε

$$g'(t) = \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η arccos είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\arctan'(x) = \frac{1}{g'(t)} = \cos^2 t.$$

Εκφράζουμε την ποσότητα $\cos^2 t$ συναρτήσει του $x = \tan t$. Παίρνουμε τον τύπο $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, διαιρούμε με το $\cos^2 t$ και λαμβάνουμε

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}\ ,$$

άρα $x^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ και $\cos^2 t = 1/(1+x^2)$. Καταλήγουμε

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Άσκηση 5 (Ιδιάζουσες Συναρτήσεις)**.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$.

Υπόδειξη. Βρείτε δύο κατάλληλες ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που συγκλίνουν στο 0 με $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Υπόδειξη. Για την μη παραγωγισιμότητα θεωρήστε το λόγο $\dfrac{f_2(x) - f_2(x)}{x - 0}$ για $x \neq 0$.

(iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_3 είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος f_3' δίνεται ως εξής:

$$f_3'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η f_3' συνεχής;

Υπόδειξη. Στα $x \neq 0$ μπορείτε να παραγωγίσετε την f_3 με τον συνήθη τρόπο.

Λύση.

(i) Ορίζουμε $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$ για κάθε $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ και $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Επιπλέον

$$f_1(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

και

$$f_1(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ και από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f_1 όταν το x τείνει στο 0.

(ii) Για να δείξουμε ότι η f_2 είναι συνεχής στο 0 εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$. Δείχνουμε ότι $f_2(x_n) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $|f_1(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$|f_2(x_n)| = |x_n \cdot f_1(x_n)| \leq |x_n| \longrightarrow 0.$$

Άρα $f_2(x_n) \to 0 = f_2(0)$.

Για να δείξουμε ότι η f_2 δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 θεωρούμε $x \neq 0$ και τον λόγο

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot f_1(x) - 0}{x} = f_1(x).$$

Επομένως, αν υπήρχε η παράγωγος της f_2 στο 0, δηλαδή αν υπήρχε το όριο του πιο πάνω λόγου όταν το x τείνει στο 0, θα υπήρχε και το όριο της f_1 όταν το x τείνει στο 0, που είναι άτοπο από το (i).

(iii) Με τους συνήθεις κανόνες παραγώγισης βρίσκουμε στα $x \neq 0$,

$$f_3'(x) = (x^2 \cdot \sin(1/x))' = 2x\sin(1/x) + x^2 \cdot (-1/x^2)\cos(1/x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Στο 0 έχουμε για $x \neq 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot f_1(x) - 0}{x - 0} = x \cdot f_1(x) = f_2(x).$$

Άρα

$$f_3'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f_2(x) = f_2(0) = 0 \cdot f_1(0) = 0,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η f_2 είναι συνεχής στο 0.

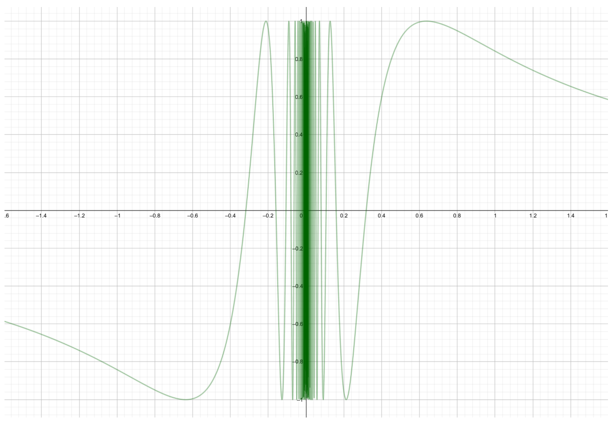
Τέλος η f_3' δεν είναι συνεχής στο 0. Για να το δείξουμε θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$ αλλά

$$f_3'(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = 0 - 1 = -1$$

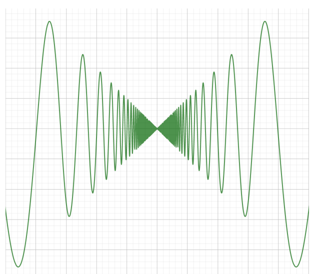
για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $f_3'(x_n) \not\to 0 = f_3'(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς η f_3' δεν είναι συνεχής στο 0.

Δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2, f_3, ο οποίες κοντά στο $x = 0$ μπορούν να κατασκευαστούν μόνο κατά προσέγγιση.

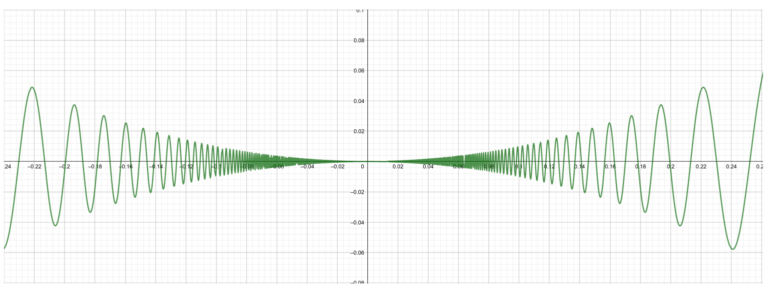
f_1 :



f_2 :



f_3 :



Άσκηση 6 (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital)**.**

(i) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;

(ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της f'/g' ούτε είναι $\pm\infty$ όταν το x τείνει στο ∞. (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)

Λύση.

(i) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1.$$

(Παρατηρήστε ότι $x > 0$ στα πιο πάνω όρια γιατί οι συναρτήσεις ορίζονται στο $(0,1)$.)

Άρα τα δύο όρια διαφέρουν. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital γιατί ενώ το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ είναι 0, το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ **δεν είναι** 0, είναι 1. Άρα δεν είμαστε σε κάποια από τις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται ο κανόνας.

(iii) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x + \sin x \geq x - 1$. Επειδή $\lim_{x\to\infty} x - 1 = \infty$ έχουμε επίσης $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

και παίρνοντας το όριο $x \to \infty$ έχουμε $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Από την άλλη $f'(x) = 1 + \cos x$ και $g'(x) = 1$, άρα $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $1 + \cos x$ όταν το x τείνει στο ∞. Προς αυτό βρίσκουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ και $\lim_{n\to\infty} 1 + \cos x_n \neq \lim_{n\to\infty} 1 + \cos y_n$.

Παίρνουμε $x_n = 2\pi \cdot n$ και $y_n = 2\pi n + \pi/2$. Τότε $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, $1 + \cos x_n = 1 + \cos(2\pi n) = 1 + 1 = 2$ για κάθε $n \geq 1$, ενώ $1 + \cos y_n = 1 + \cos(2\pi n + \pi/2) = 1 + 0 = 1$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $1 + \cos x$ όταν το x τείνει στο ∞.