10ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών (υπενθύμιση).

Θεωρούμε ότι η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ συγκλίνει για όλα τα x μέσα σε ένα ανοικτό διάστημα I. Τότε η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη σε όλο το I και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1} \quad x \in I.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να παραγωγίσουμε τη δυναμοσειρά **όρο προς όρο**

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' &= \big(a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-c)^n + \dots\big)' \\ &= a_1 + 2a_2 \cdot (x-c) + \cdots + na_n \cdot (x-c)^{n-1} + \dots \qquad x \in I.\end{aligned}$$

Άσκηση 1 (Ερωτήσεις Κατανόησης)**.** Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x σε ένα διάστημα I με άκρα τους αριθμούς 3 και 8, αλλά δεν συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Λύση.

(i) Είναι **Σωστό** γιατί από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών η παράγωγος μιας δυναμοσειράς σε ένα ανοικτό διάστημα I είναι επίσης δυναμοσειρά στο I και επομένως παραγωγίζεται ξανά.

(ii) Είναι **Σωστό** γιατί οι δύο δυναμοσειρές διαφέρουν κατά ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, συγκεκριμένα διαφέρουν κατά $\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό s_x τότε η σειρά $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $s_x - \sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Ισχύει και το αντίστροφο: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό t_x τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $t_x + \sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$.

Επομένως οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$ και ειδικότερα έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

(iii) Όχι απαραίτητα. Ας πάρουμε τις δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$. Η πρώτη συγκλίνει ακριβώς για κάθε $x \in (-1,1)$ ενώ η δεύτερη ακριβώς για κάθε $x \in [-1,1)$. (Την εξήγηση την είδαμε στο μάθημα.) Άρα οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης $r=1$ αλλά για $x=-1$ η μία συγκλίνει ενώ η άλλη όχι.

(iv) Το κέντρο της δυναμοσειράς είναι ο αριθμός $\frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$ και η ακτίνα σύγκλισης ο αριθμός $r = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$.

Εξήγηση: μια δυναμοσειρά είτε (i) θα συγκλίνει ακριβώς για ένα x (το κέντρο της δυναμοσειράς), είτε (ii) θα συγκλίνει για τα x σε ένα διάστημα της μορφής $(c-r, c+r)$ και θα αποκλίνει για τα $x \notin [c-r, c+r]$ ενώ για τα $x = c-r, c+r$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, είτε (iii) θα συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Από τα δεδομένα μας δεν βρισκόμαστε στις περιπτώσεις (i) και (iii). Επομένως είμαστε στη (ii). Τότε το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το μέσο του διαστήματος ενώ η ακτίνα σύγκλισης το μισό του μήκους του. Δηλαδή $c-r=3$ και $c+r=8$.

Άσκηση 2 (Αναγνώριση δυναμοσειράς)**.** Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές a_n, $n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Λύση.

Στην πρώτη δυναμοσειρά έχουμε $a_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$ και $c=0$.

Στη δεύτερη: $a_n = \frac{1}{n!}$ και $c=1$.

Σχετικά με την τρίτη δυναμοσειρά πρέπει να φέρουμε τους όρους μέσα στο άθροισμα στη μορφή $a_n \cdot (x-c)^n$. Υπολογίζουμε

$$2^{-n} \cdot (7x-1)^n = 2^{-n} \cdot 7^n \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n = \frac{7^n}{2^n} \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n.$$

Άρα $a_n = \frac{7^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = \frac{1}{7}$.

Τέλος στην τέταρτη δυναμοσειρά υπολογίζουμε

$$\frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n = \frac{1}{n+1} \cdot 5^n \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right)^n = \frac{5^n}{n+1} \cdot (x - (-3/5))^n.$$

Άρα $a_n = \frac{5^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = -\frac{3}{5}$.

Άσκηση 3 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης)**.**

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 2 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου. Σχετικά με την πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ θεωρούμε $x \neq 0$.

Τότε έχουμε

$$\left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1}}{3^n \cdot x^n} \right| = 3 \cdot |x|$$

Αν $3 \cdot |x| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 1/3$ ή αλλιώς $x \in (-1/3, 1/3)$ τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $3 \cdot |x| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/3, 1/3]$ η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = 1 \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = (-1)^n \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει επίσης.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/3, 1/3)$.

(Πιο πάνω υποθέσαμε ότι $x \neq 0 =$ το κέντρο της δυναμοσειράς αλλά όπως έχουμε πει η δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για $x =$ κέντρο.)

Περνάμε στη δεύτερη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ έχουμε

$$\left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-1)^n} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x-1| \longrightarrow 0 < 1.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προχωράμε στην τρίτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $7x - 1 \neq 0$, ισοδύναμα $x \neq 1/7$ (που είναι το κέντρο της δυναμοσειράς) έχουμε

$$\left| \frac{2^{-(n+1)} \cdot (7x-1)^{n+1}}{2^{-n} \cdot (7x-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |7x-1|.$$

Προφανώς

$$\frac{1}{2} \cdot |7x-1| < 1 \iff |7x-1| < 2 \iff 7x \in (1-2, 1+2) \iff 7x \in (-1, 3) \iff x \in (-1/7, 3/7).$$

Άρα για $x \in (1/7, 3/7)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για τα x με $\frac{1}{2} \cdot |7x-1| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/7, 3/7]$ η σειρά αποκλίνει. Εξετάζουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Για $x = 3/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

Για $x = -1/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

που επίσης αποκλίνει. Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι $(-1)^n \not\to 0$.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/7, 3/7)$.

Σχόλιο: Για να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου δεν χρειάζεται να φέρουμε τη δυναμοσειρά στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Δηλαδή δεν απαιτείται να έχουμε λύσει πρώτα την Άσκηση 2. Βοηθάει όμως να αναγνωρίσουμε το κέντρο της δυναμοσειράς.

Τέλος θεωρούμε την τέταρτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -3/5$ (το κέντρο της δυναμοσειράς). Τότε

$$\left| \frac{(5x+3)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(5x+3)^n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \cdot |5x+3| \longrightarrow 1 \cdot |5x+3| = |5x+3|.$$

Υπολογίζουμε

$$|5x+3| < 1 \iff 5x \in (-3-1, -3+1) \iff 5x \in (-4, -2) \iff x \in (-4/5, -2/5).$$

Οπότε για $x \in (-4/5, -2/5)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $x \notin [-4/5, -2/5]$ αποκλίνει. Για $x = -2/5$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

που αποκλίνει (αρμονική σειρά). Ενώ για $x = -4/5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

που συγκλίνει από το Κριτήριο Leibniz. Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-4/5, -2/5)$.

(ii) Στην πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot x^n} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| \longrightarrow \sqrt{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot |x|.$$

Έχουμε $1/2 \cdot |x| < 1 \iff |x| < 2 \iff x \in (-2, 2)$. Επομένως η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-2, 2)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [-2, 2]$. Για $x = 2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$

και η σειρά αποκλίνει γιατί $\sqrt{n} \to \infty$. Για $x = -2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$$

που πάλι αποκλίνει γιατί $(-1)^n \cdot \sqrt{n} \not\to 0$. (Αν συνέκλινε στο 0 τότε και η απόλυτη τιμή της ακολουθίας θα συνέκλινε στο 0 που είναι άτοπο.)

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-2, 2)$.

Περνάμε στην επόμενη δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow |x| \cdot \frac{e}{e} = |x|$$

Οπότε για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $|x| > 1$ αποκλίνει. Για $|x| = 1$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x|^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \neq 0.$$

Ειδικότερα η ακολουθία που βρίσκεται μέσα στη σειρά δεν συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά αποκλίνει. Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1, 1)$.

Στην επόμενη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$,

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \geq |x| \cdot (n+1) \longrightarrow \infty.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

Τέλος θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$. Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+5}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}}{x^n} \right| = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{n^2+2n+6}} \longrightarrow |x| \cdot \sqrt{1} = |x|.$$

Επομένως αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει και αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x = 1$ έχουμε

$$\frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}} .$$

Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}$ και $b_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2+5}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+5}} \longrightarrow 1 > 0.$$

Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κριτηρίου, που λέει ότι είτε και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν. Η $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ όμως αποκλίνει (αρμονική σειρά) επομένως και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $x = -1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}} .$$

Η ακολουθία $(\sqrt{n^2+5})_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η ακολουθία $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. (Δεν κάνει διαφορά που τα αθροίσματα ξεκινάνε από το 0.) Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-1, 1)$.

Άσκηση 4 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά)**.** Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I:¨

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$

$$f_3(x) = \frac{x}{2+5x} \quad x \neq -\frac{2}{5}, \qquad f_4(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω $x \neq 0$. Εκφράστε την παράσταση $x \cdot \sin(1/x)$ σε μορφή σειράς.

Λύση.

(i) Σχετικά με την f_1 η ιδέα είναι να πάρουμε τη δυναμοσειρά της συνάρτησης $x \mapsto 1/(1-x)$ και να αντικαστατήσουμε το x με το $-x$. Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε επίσης $-x \in (-1, 1)$, επομένως

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n.$$

Άρα $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$ για $x \in (-1, 1)$.

Σχετικά με την f_2 παρατηρούμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{3}}.$$

Αν έχουμε $|x/3| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 3$ τότε $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$. Καταλήγουμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n \quad x \in (-3, 3).$$

Στη συνάρτηση f_3 προχωρούμε ανάλογα. Πρώτα παρατηρούμε ότι $2 + 5x = 2 \cdot (1 - (-5/2)x)$, άρα θέλουμε να έχουμε $|-(5/2)x| = |(5/2)x| < 1$, ισοδύναμα $-1 < 5/2 \cdot x < 1$ ή αλλιώς $-2/5 < x < 2/5$. Επομένως

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{(1 - (-5/2) \cdot x)} = \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{2} \cdot x\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{2^{n+1}} \cdot x^{n+1} \quad x \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Σχετικά με τη συνάρτηση f_4 παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο και αντικαθιστούμε το x με το x^2. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το x,

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (x^2)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{4n+3} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Όπως και προηγουμένως με τη συνάρτηση f_4 παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο (που ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$) και αντικαθιστούμε το x με το $1/x$, όπου $x \neq 0$. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το x,

$$x \cdot \sin(1/x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{x^{2n}} \quad x \neq 0.$$

Σχόλιο. Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι δυναμοσειρά ως προς x γιατί οι δυνάμεις του x είναι αρνητικές.

Άσκηση 5 (Ανάπτυξη σε Δυναμοσειρά). **Δίνεται ότι**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε δυναμοσειρά σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα.

$$g_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1, \qquad g_2(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \neq 1,$$

$$g_3(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g_4(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1 \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad x \neq 1.$$

Επομένως

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' \quad x \neq -1 \qquad \text{και} \qquad g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'' \quad x \neq 1.$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 4 έχουμε $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1) \cdot x^n$ για $|x| < 1$. Από το Θέωρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Όμοια βρίσκουμε

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα

$$g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^{n-2}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Σχετικά με την g_3 παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{και άρα} \qquad g_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παίρνουμε τον τύπο της δυναμοσειράς για την $1/(1+x)$ και αντικαθιστούμε το x με το x^2. Παρατηρούμε ότι $|x| < 1 \iff |x^2| < 1$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
g_3(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^2)^n\right)' \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots\right)' \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(-2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots + (-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{2n-1}
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Τέλος σχετικά με τη συνάρτηση g_4 χρησιμοποιούμε τον δοσμένο τύπο για το ημίτονο sin και το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών. Αφού η συνάρτηση ημίτονο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει το ίδιο και για τη συνάρτηση συνημίτονο.

Άρα

$$\begin{aligned}
\cos(x) = (\sin(x))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}\right)' \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \dots\right)' \\
&\qquad\qquad \text{(αυτή είναι η παράγωγος της } f \text{ της Άσκησης 6)} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 6. Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό.

1 Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να βρούμε την παράγωγό της.

2 Για ευκολία γράφουμε τη δυναμοσειρά αναλυτικά ως άπειρο άθροισμα

3 $\displaystyle f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \dots.$

4 Έπειτα παραγωγίζουμε όρο προς όρο (Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών):

5 $\displaystyle f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} - \dots$

6 (1) $\displaystyle = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots.$

7 Από την άλλη μπορούμε να παραγωγίσουμε κατευθείαν σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνεται στο Θεώρημα

8 Παραγώγισης Δυναμοσειρών, προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n = 1$:

9 $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$

10 $\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$

11 (2) $\displaystyle = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots.$

12 Από τις (1) και (2) παίρνουμε **δύο διαφορετικές εκφράσεις** για την παράγωγο $f'(x)$. (!)

13 Αυτές οι εκφράσεις είναι όντως διαφορετικές γιατί για $x = 0$ η (1) δίνει την τιμή 1 ενώ η (2) την τιμή 0.

14 Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι (1) και (2) διαφέρουν αφαιρώντας την δεύτερη από την πρώτη και

15 βλέποντας ότι η διάφορά τους είναι ίση με 1.

Λύση.

Το λάθος βρίσκεται στις γραμμές 8 και 9 του συλλογισμού:

“ προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n = 1$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ ” .

Εξήγηση. Ο κανόνας που λέει να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από $n = 1$ **ισχύει όταν η δυναμοσειρά δίνεται στη μορφή** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (όταν το κέντρο είναι ίσο με 0). Αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί η παράγωγος του $a_0 \cdot x^0 = a_0$ είναι ίση με 0 και επομένως μπορεί να παραληφθεί από το άθροισμα.

Αν η δυναμοσειρά όμως δίνεται σε διαφορετική μορφή τότε μπορεί να μη γίνεται να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από $n = 1$. Στη δοσμένη δυναμοσειρά f οι εκθέτες του x είναι ίσοι με $2n+1$ και όχι με n, δηλαδή η δυναμοσειρά είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$, όπου $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Αυτό σημαίνει ότι ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι $a_0 \cdot x$, η παράγωγος του οποίου είναι $a_0 = 1 \neq 0$. Άρα αν στην παράγωγο ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n = 1$ τότε παραλείπουμε τον όρο $a_0 = 1$ που δεν είναι σωστό. Η σωστή έκφραση για την παράγωγο είναι αυτή που δίνεται από την (1). Δηλαδή

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}\,.$$

Συμπέρασμα:

> Όταν είναι να παραγωγίσουμε δυναμοσειρά που **δεν είναι** στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, **είναι καλύτερα** να γράψουμε πρώτα τη σειρά αναλυτικά και μετά να παραγωγίσουμε όρο προς όρο.

Σχόλια. 1) Το ίδιο πρέπει να προσέξουμε όταν η δυναμοσειρά που δίνεται ξεκινά από $n = 1$ (ή γενικότερα από $n = n_0$). Μπορεί πάλι ο πρώτος της όρος να μην έχει μηδενική παράγωγο και επομένως η σειρά της παραγώγου θα ξεκινά πάλι από $n = 1$ (αντίστοιχα πάλι από $n = n_0$).

2) *Πώς θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα όπου ξεκινάμε από $n = 1$ στην παράγωγο της πιο πάνω δυναμοσειράς f;* Πρέπει να φέρουμε την f στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ για κατάλληλα επιλεγμένα b_n και μετά όντως έχουμε $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$. Αυτή όμως η μέθοδος είναι αρκετά δύσχρηστη και καλό είναι να αποφεύγεται.

3) Όλες οι άλλες γραμμές στον προηγούμενο συλλογισμό είναι σωστές. Ειδικότερα δεν υπάρχει πρόβλημα να γράφουμε για ευκολία μια δυναμοσειρά ως άπειρο άθροισμα όπως κάνουμε π.χ. στη γραμμή 3.

Ούτε υπάρχει πρόβλημα να αφαιρέσουμε το ένα άπειρο άθροισμα από το άλλο όπως κάνουμε στις γραμμές 14-15. **Πρέπει** όμως οι **σειρές να συγκλίνουν**. Αν δεν συνέκλιναν αυτό θα ήταν όντως πρόβλημα αλλά στην προκειμένη περίπτωση οι δυναμοσειρές έχουν άπειρη ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4) Δεν σημαίνει πως όποτε οι δυνάμεις του x δεν είναι της μορφής x^n θα έχουμε το ίδιο φαινόμενο. Για παράδειγμα αν πάρουμε τη σειρά

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \ldots$$

και παραγωγίσουμε τους όρους έναν προς έναν παίρνουμε ως αποτέλεσμα

$$g(x)' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 2n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots = -x + \frac{x^3}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} - \ldots$$

που είναι το ίδιο με το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1}\,.$$

Με άλλα λόγια σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε όντως να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από $n = 1$ παραγωγίζοντας όρο προς όρο. Ο λόγος που μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι επειδή η παράγωγος του πρώτου όρου του αθροίσματος $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ είναι 0. Αυτό όμως έτυχε στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Άσκηση 7 (Δυναμοσειρά Εκθετικής συνάρτησης)**.** Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(ii) Βρείτε την παράγωγο f'. Τι παρατηρείτε;

(iii) Δείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

(i) Έστω $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \to 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

(ii) Από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών έχουμε

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f' = f$.

(iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Επομένως η g είναι σταθερή συνάρτηση. (Θεώρημα Μέσης Τιμής.)

Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c θέτουμε $x = 0$ και έχουμε

$$f(0) = \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1.$$

Είναι γνωστό ότι $e^0 = 1$. Άρα $c = g(0) = 1$. Επομένως $\dfrac{f(x)}{e^x} = g(x) = 1$ και $f(x) = e^x$ για $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης)**.** Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x), \tag{3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f.) Συμπεράνετε ότι

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

Λύση.

Δείχνουμε τις ισότητες (3) με επαγωγή στο n. Ορίζουμε την ιδιότητα P ως εξής: ένας φυσικός αριθμός n ικανοποιεί την P ακριβώς όταν ικανοποιούνται **και οι τέσσερις** ισότητες στην (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $n = 0$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(0)}(x) = \sin(x), \qquad \sin^{(1)} x = (\sin(x))' = \cos(x)$$
$$\sin^{(2)}(x) = (\cos(x))' = -\sin(x), \quad \sin^{(3)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Υποθέτουμε ότι κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την ιδιότητα P και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$\sin^{(4(n+1))}(x) = \sin^{(4n+4)}(x) = (\sin^{(4n+3)})'(x) = (-\cos(x))' = +\sin(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την *τέταρτη ισότητα* της (3). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\sin^{(4(n+1)+1)}(x) = \sin^{(4n+5)}(x) = (\sin^{(4n+4)}(x))' = (\sin(x))' = \cos(x)$$
$$\sin^{(4(n+1)+2)}(x) = \sin^{(4n+6)}(x) = (\sin^{(4n+5)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$

και

$$\sin^{(4(n+1)+3)}(x) = \sin^{(4n+7)}(x) = (\sin^{(4n+6)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Επομένως το $n+1$ ικανοποιεί την ιδιότητα P και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για την (4) θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j$. Αν ο j είναι άρτιος τότε $j = 2n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $k = 4n$, ενώ αν ο j είναι περιττός τότε $j = 2n+1$ για κάποιο n και τότε $k = 2(2n+1) = 4n+2$. Από την (3) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = \pm\sin(0) = 0$.

Τέλος θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j+1$. Αν $j = 2n$ τότε $k = 4n+1$ οπότε από την (3) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$, και αν $j = 2n+1$ τότε $k = 2\cdot(2n+1)+1 = 4n+3$ οπότε από την (3) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\sin^{(k)}(0) = (-1)^j$, όταν $k = 2j+1$.

⊣

Άσκηση 9 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης)**.** Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 8 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου cos.

Λύση.

Οι αντίστοιχες ισότητες για τη συνάρτηση cos είναι

$$\text{(5)}\quad \cos^{(4n)}(x) = \cos(x), \quad \cos^{(4n+1)}(x) = -\sin(x), \quad \cos^{(4n+2)}(x) = -\cos(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = \sin(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Στο $x = 0$ έχουμε

$$\text{(6)}\qquad \cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Δείχνουμε τις ισότητες της (5) με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 0$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(0)}(x) = \cos(x), \qquad \cos^{(1)} x = (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$\cos^{(2)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x), \quad \cos^{(3)}(x) = (-\cos(x))' = +\sin(x).$$

Υποθέτουμε ότι οι ισότητες της (5) ισχύουν για κάποιο n και δείχνουμε ότι ισχύουν και για το $n+1$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\cos^{(4(n+1))}(x) = \cos^{(4n+4)}(x) = (\cos^{(4n+3)})'(x) = (\sin(x))' = \cos(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την τέταρτη ισότητα της (5). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\cos^{(4(n+1)+1)}(x) = \cos^{(4n+5)}(x) = (\cos^{(4n+4)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$\cos^{(4(n+1)+2)}(x) = \cos^{(4n+6)}(x) = (\cos^{(4n+5)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$$

και

$$\cos^{(4(n+1)+3)}(x) = \cos^{(4n+7)}(x) = (\cos^{(4n+6)}(x))' = (-\cos(x))' = \sin(x).$$

Επομένως οι ισότητες ικανοποιούνται για το $n+1$ και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για τη (6) θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j+1$. Αν $j = 2n$ τότε $k = 4n+1$ οπότε από την (5) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = -\sin(0) = 0$, και αν $j = 2n+1$ τότε $k = 2\cdot(2n+1)+1 = 4n+3$ οπότε από την (5) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = \sin(0) = 0$. Άρα $\sin^{(k)}(0) = 0$.

Τέλος θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j$. Αν ο j είναι άρτιος τότε $j = 2n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $k = 4n$. Από την (5) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$. Αν ο j είναι περιττός τότε $j = 2n+1$ για κάποιο n και τότε $k = 2(2n+1) = 4n+2$. Επομένως από την (5) $\cos^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$.

⊣