Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

11ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Λύση.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$ έχουμε

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n.$$

Από το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών προκύπτει

$$\ln(1+x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \cdot x^n dx \right) + c = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + c$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ έχουμε

$$0 = \ln(1+0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} \right) + c = 0 + c = c.$$

Άρα για κάθε $|x| < 1$, ισχύει

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε αντικαταστήσει το n με το $n-1$.

Άσκηση 2.

(i) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου (ο οποίος δείχθηκε σε προηγούμενη άσκηση):

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

(ii) Αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

Λύση.
(i) Έστω P_m τα ζητούμενα πολυώνυμα, $m \in \mathbb{N}$. Αρχικά βρίσκουμε τα P_{2n+1} και μετά τα P_{2n}, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
P_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad \text{(γιατί για } k = 2j \text{ η παράγωγος είναι 0)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad \text{(από τον τύπο).}
\end{aligned}
$$

Προφανώς το $P_{2n+2}(x)$ διαφέρει από το $P_{2n+1}(x)$ κατά τον παράγοντα $\dfrac{\sin^{(2n+2)}(0)}{k!} \cdot x^{2n+2}$. Αφού όμως $\sin^{(2n+2)}(0) = 0$ προκύπτει ότι $P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απομένει να βρούμε το P_0. Αυτό όμως είναι άμεσο: $P_0(x) = \dfrac{\sin^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 = \sin(0) \cdot x^0 = 0$.

(ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}.$$

Έχουμε

$$\left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Το τελευταίο όριο το βρίσκουμε με το Κριτήριο του Λόγου:

$$\frac{x^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 < 1.$$

Παίρνοντας όριο $n \to \infty$ στην πιο πάνω ισότητα με το $\sin x$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin x &= \lim_{n\to\infty} P_{2n+1}(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \\
\Longrightarrow \quad \sin x &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right) + 0 \\
\Longrightarrow \quad \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+1)!} \cdot x^{2n+1} .
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \qquad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.
Σε αντίθεση με προηγουμένως όπου υπολογίσαμε τα πολυώνυμα Taylor στο 0 με βάση τις παραγώγους στο 0, τώρα θα αναπτύξουμε τις συναρτήσεις σε δυναμοσειρές με κέντρο το 0 με βάση τα γνωστά αναπτύγματα. Όπως έχουμε πει **τα πολυώνυμα Taylor στο 0 είναι τα μερικά αθροίσματα των δυναμοσειρών**.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Το πολυώνυμο Taylor P_n στο 0 είναι το μερικό άθροισμα μέχρι τη n-οστή δύναμη του x. Άρα πρέπει να πάρουμε το μερικό άθροισμα μέχρι το $n-1$. Επομένως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{k+1} = x - \frac{x^2}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n.$$

Για την g, χρησιμοποιούμε τα γνωστά αναπτύγματα των e^x και $\cos x$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι το άθροισμα των συγκλινουσών σειρών δύο ακολουθιών είναι η σειρά του αθροίσματος των δύο ακολουθιών.

Αν συμβολίσουμε με Q_m τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης g, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$Q_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) \cdot x^{2k}.$$

Για το $Q_{2n+1}(x)$ παρατηρούμε ότι στο ανάπτυγμα της g δεν υπάρχουν δυνάμεις του x με περιττό εκθέτη ή αλλιώς ο συντελεστής των δυνάμεων του x με περιττό εκθέτη είναι 0. Επομένως $Q_{2n+1}(x) = Q_{2n}(x)$, για κάθε n, x.

Άσκηση 4.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Λύση.

(i) Γνωρίζουμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως το πολυώνυμο Taylor P_n της e^x στο 0 είναι το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για $x = 1$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & e^1 = P_n(1) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \\ \iff\ & e = P_n(1) + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

όπου $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

Συνεπώς

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\,. \tag{1}$$

Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $\xi < 1$ έχουμε

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}\,.$$

Ειδικότερα από την (1) έχουμε

(2) $$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-4}$. Ισοδύναμα $(n+1)!>30000$. Υπολογίζουμε

$$5!=120,\quad 6!=720,\quad 7!=720\cdot 7=5040,\quad 8!=5040\cdot 8=40320>30000.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $n+1=8$ δηλαδή $n=7$.

Προσοχή. Θέτοντας $n=6$ στην (2) βλέπουμε ότι $e-\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{k!}<\frac{3}{7!}=\frac{3}{5040}$. Η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να αποκλείσει το ενδεχόμενο η προσέγγιση του $\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{k!}$ στο e να είναι πολύ μικρότερη του $3\cdot 5040^{-1}$, ίσως και μικρότερη του 10^{-4}. Επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ακόμα ότι το $n=7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός n με $e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<10^{-4}$. Αυτό ουσιαστικά είναι το ζητούμενο του επόμενου ερωτήματος.

(ii) Από την (1) και το γεγονός ότι η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}>\frac{e^{0}}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Για $n=6$ έχουμε

$$e-\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{k!}>\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}\,.$$

Αλλά $5040<10000=10^4$, άρα $e-\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{k!}>\frac{1}{5040}>10^{-4}$.

Επομένως ο $n=7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $e-\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}<10^{-4}$.

Άσκηση 5. Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος Taylor ότι

$$\left|\cos(2x)-\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}\right)\right|\le\frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση.

Αρχικά δείχνουμε μια ανισότητα με βάση το $\cos x$ και το πολυώνυμο Taylor P_5 της $\cos x$ στο 0 - έπειτα αντικαθιστούμε το x με το $2x$. Το 5 υπαγορεύεται από την εκφώνηση όπου το σφάλμα στην προσέγγιση είναι $64x^6/6!$, με άλλα λόγια **το υπόλοιπο Taylor πρέπει να έχει βαθμό** 6. Αυτό συμβαίνει όταν το πολυώνυμο Taylor είναι το P_5.

Έχουμε $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να βρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 στο 0 παίρνουμε τις δυνάμεις όπου ο εκθέτης φτάνει το πολύ μέχρι 5, δηλαδή

$$P_5(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot(2x)^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\,.$$

(Δεν πειράζει που ο συντελεστής του x^5 είναι 0.)

Θεωρούμε $x\in\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$R_5(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\cdot x^6=\frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!}\cdot x^6$$

όπου $R_5(x) = \cos(x) - P_5(x)$. Έχουμε $|\cos^{(6)}(\xi)| \leq 1$, άρα

$$|\cos x - P_5(x)| = |R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot |x^6|$$
$$\implies \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^6}{6!}\,.$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με το $2x$ και παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{(2x)^6}{6!}\,.$$

Δηλαδή

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{64x^6}{6!}\,.$$

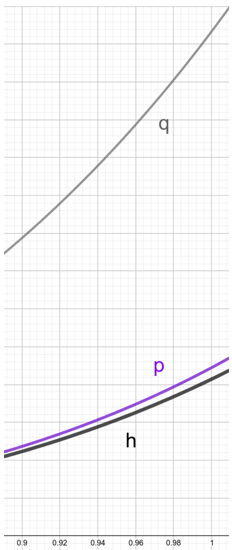
Σχόλιο: Επειδή ο συντελεστής του x^5 στο $P_5(x)$ είναι 0 έχουμε ότι $P_5(x) = P_4(x)$. Άρα το $|\cos x - P_5(x)|$ παραμένει το ίδιο με το $|\cos x - P_4(x)| = |R_4(x)|$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Taylor παίρνοντας το υπόλοιπο R_4 αντί του R_5. Όπως με πριν καταλήγουμε στο $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$. Τέλος αντικαθιστώντας το x με το $2x$ παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| = |\cos(2x) - P_4(2x)| = |R_4(2x)| \leq \frac{|2x|^5}{5!} = \frac{32|x|^5}{5!}.$$

Με άλλα λόγια η προσέγγιση με σφάλμα το πολύ $\frac{32|x|^5}{5!}$ είναι επίσης σωστή και προκύπτει από το Θεώρημα Taylor. Όμως η προσέγγιση της εκφώνησης, δηλαδή με σφάλμα το πολύ $\frac{64|x|^6}{6!}$, είναι ακριβέστερη όταν $0 < |x| < 3$. Για να δούμε το τελευταίο παρατηρούμε ότι

$$\frac{64|x|^6}{6!} < \frac{32|x|^5}{5!} \iff \frac{2|x|^6}{6} < |x|^5 \iff |x| < 3, \qquad \text{όπου } x \neq 0.$$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $h(x) = \left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right|$, $p(x) = \frac{64x^6}{6!}$ και $q(x) = \frac{32|x|^5}{5!}$ γύρω από το $x = 0,8$ για να δούμε την τάξη μεγέθους στη διαφορά των σφαλμάτων:



Όπως βλέπουμε στην περιοχή του $x = 0,8$ η συνάρτηση p είναι αρκετά καλύτερη προσέγγιση της h σε σχέση με την q.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι
$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| < 10^{-2}.$$

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$, επομένως το πολυώνυμο Taylor P_4 της συνάρτησης ημίτονο στο 0 είναι το
$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!}\,.$$
Για το $x = 1$ υπάρχει από το Θεώρημα Taylor ένα $\xi \in (0,1)$ με
$$R_4(1) = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot 1^5 = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\,,$$
όπου
$$R_4(1) = \sin 1 - P_4(1) = \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right).$$
Τότε
$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| = |R_4(1)| = \left|\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\right| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 10^{-2}.$$

Άσκηση 7.

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων
$$f(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$
(ii) Να βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.

Λύση.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο ανάπτυξης σε δυναμοσειρά της συνάρτησης e^x και έχουμε
$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n$$
$$g(x) = x \cdot e^{-x} = x \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$$
$$h(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}.$$

Για την εύρεση των παραγώγων έκτης τάξης στο 0 χρησιμοποιούμε τον τύπο
$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$
όπου $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για x σε κάποιο ανοικτό διάστημα I κέντρου 0. Πιο απλά:

$$\boxed{\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \text{ο συντελεστής του } x^n \text{ στο ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το } 0.}$$

Επομένως
$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \text{συντελεστής του } x^6 = \frac{(-1)^6}{6!} = \frac{1}{6!}\,.$$
Άρα $f^{(6)}(0) = 1$.

Σχετικά με την τιμή $g^{(6)}(0)$ πρέπει να προσέξουμε ότι **δεν είναι σωστό** να πάρουμε την τιμή που προκύπτει από το $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ για $n=6$ και να την πολλαπλασιάσουμε με 6!. Αυτό συμβαίνει γιατί για $n=6$ στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}$ θα πάρουμε το συντελεστή του x^7.

1ος τρόπος (ο πιο απλός): Για να βρούμε την τιμή $g^{(6)}(0)/6!$ παίρνουμε τον **συντελεστή του** x^6 στο ανάπτυγμα της g. Στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}$ το x^6 επιτυγχάνεται για $n=5$, οπότε

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!}=\frac{(-1)^5}{5!}\quad\text{και άρα}\quad g^{(6)}(0)=\frac{(-1)^5}{5!}\cdot 6!=-6.$$

2ος τρόπος: Φέρνουμε το ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}$ στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot x^n$ για κάποια b_n, $n\in\mathbb{N}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}\\ &= \qquad\quad \frac{(-1)^0}{0!}\cdot x^1+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}+\ldots\\ &= 0\cdot x^0+\frac{(-1)^0}{0!}\cdot x^1+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}+\ldots. \end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε $b_0=0$ και $b_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{n!}$. Τότε

$$\begin{aligned} g(x) &= 0\cdot x^0+\frac{(-1)^0}{0!}\cdot x^1+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}+\ldots\\ &= b_0\cdot x^0+b_1\cdot x^1+\cdots+b_{n+1}\cdot x^{n+1}+\ldots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot x^n. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!}=b_6=\frac{(-1)^5}{5!}\quad\text{και επομένως}\quad g^{(6)}(0)=\frac{(-1)^5}{5!}\cdot 6!=-6.$$

Για την τιμή $h^{(6)}(0)$ παίρνουμε τον συντελεστή του x^6 στο ανάπτυγμα της h (ακολουθούμε τον πρώτο από τους πιο πάνω τρόπους). Το x^6 επιτυγχάνεται για $n=3$ στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{2n}$, άρα

$$\frac{h^{(6)}(0)}{6!}=\frac{(-1)^3}{3!}\quad\text{και άρα}\quad h^{(6)}(0)=\frac{(-1)^3}{3!}\cdot 6!=-4\cdot 5\cdot 6=-120.$$

Τέλος για την τιμή $h^{(7)}(0)$ παρατηρούμε ότι στο πιο πάνω ανάπτυγμα προκύπτουν μόνο δυνάμεις με άρτιο εκθέτη. Επομένως η δύναμη x^7 δεν εμφανίζεται ή αλλιώς ο συντελεστής του x^7 είναι 0. Συνεπώς

$$\frac{h^{(7)}(0)}{7!}=0\quad\text{και}\quad h^{(7)}(0)=0.$$