Συναρτήσεις - Συνέχεια

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

Ορισμός:

Συνάρτηση από ένα μη-κενό σύνολο A σε ένα μη-κενό σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση f μεταξύ των στοιχείων του A και κάποιων στοιχείων του B.

Το A καλείται πεδίο ορισμού της f και το B πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών.

Βασικός κανόνας: Σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα $y \in B$ μέσω της f.

Συμβολισμοί: Με $f : A \to B$ εννοούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το A στο B. Αν $x \in A$ συμβολίζουμε με $f(x)$ το μοναδικό y που αντιστοιχεί στο x μέσω της f.

Παραδείγματα:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$ *(ακολουθία)*
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = x^{-1}$

Ακόμα ένας συμβολισμός: Κάποιες φορές χρησιμοποιούμε και το σύμβολο $\mapsto$ για να ορίσουμε την τιμή $f(x)$:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{(x-4)(x+3)}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-4)(x+3)}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Παρατηρήσεις:

1. Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και παίρνουν πραγματικές τιμές. Τίποτα δεν εμποδίζει όμως τα πεδία ορισμού και τιμών να είναι τυχαία σύνολα, π.χ. σύνολα από πίνακες.
2. Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται μέσα από κάποιο τύπο, π.χ. $f(x) = x^2$. Ούτε αυτό όμως είναι υποχρεωτικό. Μια συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon A \to B$ η *εικόνα* της f είναι το σύνολο

$$f(A) = \{\ y \in B \ \mid\ y = f(x) \quad \text{για κάποιο } x \in A\ \}.$$

Πιο γενικά αν $I \subseteq A$ τότε η *εικόνα του συνόλου I* μέσω της f είναι το σύνολο

$$f(I) = \{\ y \in B \ \mid\ y = f(x) \quad \text{για κάποιο } x \in I\ \}.$$

Η $f\colon A \to B$ είναι *επί* συνάρτηση αν $f(A) = B$ και *1-1* συνάρτηση αν:

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) \neq f(x_2),$$

ισοδύναμα

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \text{ ισχύει } x_1 = x_2.$$

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon A \to B$ 1-1 και επί τότε ορίζεται η *αντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1} : B \to A$ ως εξής:

$$f^{-1}(y) = \text{το μοναδικό } x \in A \text{ με } f(x) = y.$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty) : x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Περιορισμός συνάρτησης: Δίνεται μια συνάρτηση $f\colon A \to B$ και X ένα μη-κενό υποσύνολο του A. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h : X \to B : h(x) = f(x)$. Η h ονομάζεται *περιορισμός της f* στο σύνολο X και συνήθως συμβολίζεται με $f\,|X$. Η f ονομάζεται *επέκταση της h*.

Σύνθεση συναρτήσεων: Δίνονται δύο συναρτήσεις $f\colon X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $h : X \to Z : x \mapsto g(f(x))$. Η h συμβολίζεται ως $g \circ f$ και διαβάζεται με διαφορετικούς τρόπους:
"g συντεθειμένη με την f", "g της f", "g κύκλος f" κ.λ.π.

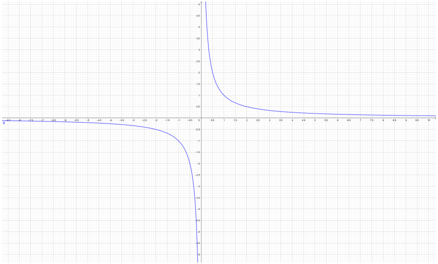
Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν τη σύνθεση περιορίζοντας κατάλληλα τα πεδία ορισμού: αν $f\colon A \to B$ και $g : C \to Z$ και το σύνολο $X = \{\, x \in A \mid f(x) \in C \,\}$ είναι μη-κενό, τότε ορίζεται η $g \circ f\colon X \to Z : x \mapsto g(f(x))$.

Στην ουσία όμως είναι *σύνθεση των περιορισμών* $g|f(X)$ και $f\,|X$.

Η *γραφική παράσταση* μιας συνάρτησης $f: A \to B$ είναι το εξής υποσύνολο του $A \times B$,

$$C_f = \{ \ (x, y) \in A \times B \ \mid \ y = f(x) \ \}.$$

Στην περίπτωση όπου τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουμε $C_f \subseteq \mathbb{R}^2$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση με βάση ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:
Π.χ. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = 1/x$.



Συνέχεια συνάρτησης - Διαισθητική Προσέγγιση

1. Η έννοια της συνέχειας ορίζεται (μεταξύ άλλων) για συναρτήσεις $f\colon A \to \mathbb{R}$ όπου το A είναι *τυχαίο* υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
2. Διαισθητικά μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν για κάθε $x \in A$ που είναι "κοντά" στο x_0 η τιμή $f(x)$ είναι "κοντά" στο $f(x_0)$.
3. Μελετάμε συνήθως τη συνέχεια όταν το *πεδίο ορισμού* είναι:
   α) ένα *διάστημα*, π.χ. $A = [0, 1)$, $A = (-\infty, 8]$,
   $A = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$,
   β) *ένωση διαστημάτων* π.χ. $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
4. Για τις συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή σε ένωση (μη-τετριμμένων) διαστημάτων, συνέχεια σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f δεν "διακόπτεται" γύρω από το x_0.
5. Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

Βασικές Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

A) *Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων.*

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A' \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A \cap A'$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε:

1. οι συναρτήσεις $f \pm g : A \cap A' \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0,
2. οι $f \cdot g, f/g : A \cap A' \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0,
   (στο πηλίκο θεωρούμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap A'$),
3. για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

B) *Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.*

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αν η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

Γ) *Θεμελιώδεις συνεχείς συναρτήσεις.*

1. οι σταθερές συναρτήσεις, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$,
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^n$, όπου $n \geq 1$,
3. όλα τα πολυώνυμα,
4. όλες οι ρητές συναρτήσεις στα σημεία που ορίζονται, (ρητή είναι μια συνάρτηση της μορφής $f = \dfrac{p}{q}$ όπου τα p, q είναι πολυώνυμα),
5. η συνάρτηση της n-οστης ρίζας, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, όπου $n \geq 1$,
6. η συνάρτηση της απολύτου τιμής, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$,
7. όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο) και tan (εφαπτομένη) στα σημεία που ορίζονται.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2 + 1$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\sqrt{3x^2 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές,π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2+1}\right) / (\sqrt{(x-2)(x+3)}, \text{ για } x \neq -3, 2.$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα: (Ενδιάμεσης τιμής)

Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ($a < b$). Τότε για κάθε y γνησίως ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει $x \in (a,b)$ με $f(x) = y$.

2η ισοδύναμη διατύπωση. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f\colon I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η εικόνα $f(I)$ είναι επίσης διάστημα.*

Εφαρμογή: Ύπαρξη n-οστης ρίζας. Έστω $y > 0$, και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x > 0$ με $x^n = y$, δηλαδή $x = \sqrt[n]{y}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $b > \max\{1, y\}$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα), οπότε θα έχουμε $b^n > b > y$ και τη συνάρτηση $f\colon [0,b] \to \mathbb{R} : f(x) = x^n$. Έχουμε $f(0) = 0$ και $f(b) = b^n$. Άρα $y \in (f(0), f(b))$ και από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x \in (0,b)$ με $f(x) = y$, δηλαδή $x^n = y$.
(Η μοναδικότητα ισχύει επειδή η f είναι 1-1.)

Θεώρημα: (Συνεχούς Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω I *διάστημα και* $f : I \to \mathbb{R}$ *συνεχής 1-1 συνάρτηση. Τότε*

1. *Η* f *είναι γνησίως μονότονη και*
2. *Η αντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1} : f(I) \to I$ *είναι συνεχής συνάρτηση.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει την ιδιότητα της συνέχειας με βάση τη σύγκλιση ακολουθιών. Μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί στη θέση του ορισμού της συνέχειας).

Θεώρημα: (Αρχή Μεταφοράς)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Η f είναι συνεχής στο x.*
2. *Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.*

Η Αρχή Μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ιδιότητες της συνέχειας χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες της σύγκλισης ακολουθιών.

Παράδειγμα: Αν οι συναρτήσεις $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x \in A$ τότε και η συνάρτηση $f + g : A \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t) + g(t)$ είναι συνεχής στο x.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του A με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(f + g)(x_n) \to (f + g)(x)$.
Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x και $x_n \to x$ έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς $f(x_n) \to f(x)$ και $g(x_n) \to g(x)$.
Άρα $f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x)$, δηλαδή $(f + g)(x_n) \to (f + g)(x)$.

Η Αρχή Μεταφοράς χρησιμοποιείται επίσης για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε κάποιο x_0.
Αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ στο πεδίο ορισμού της f με τις ιδιότητες $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$ αλλά $f(x_n) = 1 \not\to 0 = f(0)$.