Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 2. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1+a)^n > 1 + na.$$

Άσκηση 3 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα)**.**

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 4 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_0$,

(ii) υπάρχει $M_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_1$,

(iii) υπάρχει $M_2 > 75847912$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_2$.

Υπόδειξη. Δείξτε τις συνεπαγωγές (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Άσκηση 5 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$,

(ii) υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$.

Άσκηση 6 (Αρχιμήδεια Ιδιότητα και Αρχή του Ελαχίστου)**.** Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.
Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n με $n \leq x < n + 1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m + 1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m + 1$.

Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι αυτό το $m \in \mathbb{Z}$ είναι μοναδικό για το z. Αυτό το μοναδικό m ονομάζεται **το ακέραιο μέρος του** z. Για παράδειγμα το ακέραιο μέρος του $3,14$ είναι το 3 και το ακέραιο μέρος του $-3,14$ είναι το -4.