



## 3ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου  
Γ. Μανουσάκης

**Άσκηση 1.** Επιλέξτε **Σωστό** - **Λάθος** (χωρίς απόδειξη).

	Σωστό	Λάθος
1. Η ακολουθία $a_n = n^3$ , $n \geq 1$ είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
2. Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι και αύξουσα.	Σ	Λ
3. Μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι σταθερή είναι γνησίως αύξουσα.	Σ	Λ
4. Μια ακολουθία είναι φραγμένη ακριβώς όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
5. Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.	Σ	Λ

**Άσκηση 2.**

- Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που είναι άνω φραγμένη και όχι κάτω φραγμένη (με απόδειξη).
- Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη (με απόδειξη).
- Δώστε το παράδειγμα μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που είναι φραγμένη (με απόδειξη).

**Άσκηση 3.** Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ ; (Χωρίς απόδειξη)

$$A = \{5, 6, 7, \dots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 400\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) > 0\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) = 0\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{o } n \text{ είναι άρτιος}\}$$

**Άσκηση 4** (Απαιτητική).

- Δείξτε ότι ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  αν και μόνο αν το σύνολο  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι πεπερασμένο.  
**Υπόδειξη:** Ένα σύνολο  $B \subseteq \mathbb{N}$  είναι πεπερασμένο ακριβώς όταν υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  με την ιδιότητα  $B \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k < n_0\}$ .
- Συμπεράνετε ότι ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  δεν περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  ακριβώς όταν έχουμε  $n \notin A$  για άπειρα το πλήθος  $n \in \mathbb{N}$ .

---

**Σχόλιο:** Το (i) της άσκησης αιτιολογεί γιατί ένα σύνολο  $A$  που περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  ονομάζεται και *συμπεπερασμένο*. Ο όρος προκύπτει από το συνθετικό *συν* (που στα μαθηματικά χρησιμοποιείται κυρίως για να αναφερθεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου) και το επίθετο *πεπερασμένο*.

Επομένως το *συν-πεπερασμένο* (δηλαδή *συμπεπερασμένο* σύμφωνα με τους κανόνες της ελληνικής γραμματικής) σύνολο είναι ακριβώς το σύνολο με *πεπερασμένο* συμπλήρωμα. Από το (i) αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο που περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 5.** Αποδείξτε ότι το σύνολο  $A$  όλων των άρτιων αριθμών δεν περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 6** (Κατανόηση σύγκλισης). Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,99 < a_n < 1,01\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 0,999\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n > 1,1\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,9999 < a_n\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.