



5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μαουτσάκης

Στις Ασκήσεις 3, 4 και 6 χρησιμοποιείτε τα εξής: αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι συγκλίνουσες και $c \in \mathbb{R}$, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ είναι επίσης συγκλίνουσες και μάλιστα ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$). Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ με $a_n \rightarrow +\infty$ και $b_n \rightarrow -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 1234567890 < a_n\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 17\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n > 1, 1\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n < -9876543210\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 (Χρήση του συμβολισμού Σ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \dots \quad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.$$

Άσκηση 3 (Άλγεβρα Σειρών).

- (i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.
- (ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.
- (iii) Δείξτε ότι αν $c \neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 4 (Διερεύνηση Σύγκλισης). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}].$$

Άσκηση 5. Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}.$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \dots$

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$