



## 7ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου  
Γ. Μαιουσακής

**Αρχή Μεταφοράς (υπειθύμιση):** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x \in A$  και  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ .
- (2) Για κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  από στοιχεία του  $A$  με την ιδιότητα  $x_n \rightarrow x$  ισχύει  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**Άσκηση 1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

- (i) Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.
- (ii) Για κάθε  $x \neq 3$  η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ .

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$  δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(x) = f(x) = 1/x$  για κάθε  $x \neq 0$ , η  $F$  δεν είναι συνεχής στο 0.

**Άσκηση 3.**

- (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$

Βρείτε δύο συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  και  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $h = g \circ f$ .

- (ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Y \rightarrow Z$  είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση  $h = g \circ f$  είναι επίσης συνεχής, όπου τα  $X, Y$  και  $Z$  είναι μη κενά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ .

**Άσκηση 4.** Έστω  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  και  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε  $q_n \rightarrow x$  και  $x_n \rightarrow x$ .

**Υπόδειξη.** Υπειθυμίζουμε ότι για κάθε  $a < b$  υπάρχει ρητός  $q$  και άρρητος  $y$  με  $a < q < b$  και  $a < y < b$ .

**Σχόλιο:** Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής “σχεδόν σε όλα τα σημεία” του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με “πάρα πολλά” σημεία ασυνέχειας.

**Άσκηση 5** (Συνάρτηση Dirichlet). Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

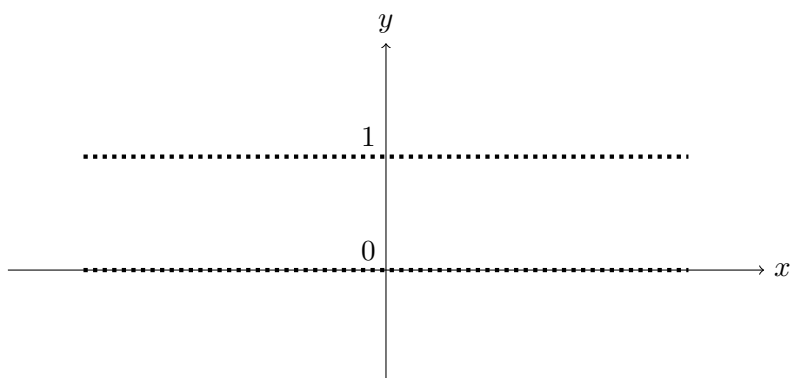
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η  $f$  δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.

---

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



**Άσκηση 6.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $\cos(x^2) = x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(0, \pi/2)$ .