



10ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μαιουσακής

Άσκηση 1.

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R} \quad h(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.

Άσκηση 2. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho - 1},$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Άσκηση 3. Δείξτε με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Κριτηρίου ότι για κάθε $\rho > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Άσκηση 4 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 5. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx \quad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

Άσκηση 6. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \quad I_2 = \int \frac{1}{3x^2 + 1} dx \quad I_3 = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx.$$

Άσκηση 7. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx \quad J = \int \frac{x+5}{4x^2 + 4x + 10} dx.$$

Άσκηση 8. Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} dx.$$

Άσκηση 9. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

- (i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.
- (ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J .