Κεφάλαιο IV. Επίλυση γραμμικών ΔΕ 2ης τάξης με την μέθοδο των δυναμοσειρών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Όπως είδαμε μέχρι τώρα η ΔΕ (1) έχει εύκολα κατασκευάσιμο χώρο λύσεων στη περίπτωση σταθερών συντελεστών, ενώ όταν οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ είναι μεταβλητές, τότε απαιτείται η γνώση μίας λύσης ώστε να προσδιορισθεί το δεύτερο στοιχείο του θεμελιώδους συνόλου λύσεων μέσα από την μεθοδολογία του υποβιβασμού τάξης. Παραμένει επομένως το ερώτημα πως προσδιορίζουμε τη γενική λύση αν δεν γνωρίζουμε καμία λύση της ΔΕ (1). Αναζητούμε λοιπόν μία πιο γενική μέθοδο κατασκευής του θεμελιώδους συνόλου λύσεων. Μία τέτοια μέθοδος βασίζεται στις δυναμοσειρές και ονομάζεται μέθοδος των δυναμοσειρών.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής: Αντί να προσπαθούμε να εκφράσουμε τη λύση μέσω περιορισμένου αριθμού γνωστών συναρτήσεων, να την αναζητήσουμε υπό μορφή δυναμοσειράς $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_o)^n$, η οποία – όταν οι συντελεστές είναι γνωστοί– αποτελεί την πληρέστερη δυνατή αναπαράσταση που μπορεί να έχει κανείς για μία συνάρτηση. Άλλωστε οι συναρτήσεις που θεωρούμε γνωστές, όπως οι $e^x, cosx,\ sinx,\ lnx$ δεν εκφράζονται σε κλειστή μορφή (μόνο οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις) αλλά ορίζονται και αυτές μέσω κατάλληλων δυναμοσειρών.

Παραδείγματα:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R},$

$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R}\,,$

$sinx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}\,,$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\ , \quad |x| < 1,$

$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad , |x| < 1,$

Η μέθοδος συνίσταται στο εξής: Υποθέτουμε τη λύση υπό μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το σημείο x_o,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_o)^n, \qquad (2)$$

και εισάγοντάς την στη ΔΕ (1) υπολογίζουμε τους συντελεστές της δυναμοσειράς.

Βέβαια, θα πρέπει η δυναμοσειρά να συγκλίνει σε κάποια περιοχή του x_o: $|x - x_o| < \rho$, διαφορετικά δεν αναπαριστά συνάρτηση και πολύ περισσότερο λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Στο ερώτημα αν η μέθοδος των δυναμοσειρών μπορεί να εφαρμοστεί πάντα, η απάντηση είναι όχι, εξαρτάται από την συμπεριφορά των συναρτήσεων $p(x)$ και $q(x)$ στο σημείο x_o. (Αν οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ ή ένας από τους δύο δεν ορίζονται στο x_o, τότε ενδεχομένως και οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης να μην ορίζονται στο σημείο αυτό, επομένως δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με δυναμοσειρά της μορφής (2)). Υπάρχουν όμως ευρείς και ενδιαφέρουσες κλάσεις συναρτήσεων $p(x)$ και $q(x)$ για τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε το θεμελιώδες σύνολο λύσεων στο πλαίσιο της μεθόδου των δυναμοσειρών.

Η πρώτη περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι αυτή των αναλυτικών συντελεστών. Δηλαδή, όταν οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ διαθέτουν ανάπτυγμα Taylor σε κάποια περιοχή ενός σημείου x_o.

<u>Ορισμός</u>: Αν οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ είναι αναλυτικές στο x_o τότε το σημείο x_o ονομάζεται ***<u>ομαλό σημείο</u>*** της ΔΕ (1), διαφορετικά καλείται ***<u>ιδιάζον ή ανώμαλο σημείο</u>*** της ΔΕ (1).

<u>Παραδείγματα</u>:

Να εξετασθεί αν το σημείο $x_o = 0$ είναι ομαλό σημείο των παρακάτω ΔΕ

1) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (Εξίσωση Legendre)

Ο συντελεστής $p(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)}$ και ο συντελεστής $q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι αναλυτικές στο μηδέν. Άρα το $x_o = 0$ είναι ομαλό σημείο της ΔΕ. Τα μόνα ιδιάζοντα σημεία είναι τα σημεία που μηδενίζουν το παρανομαστή, δηλαδή τα σημεία $x_1 = \pm 1$.

2) $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,\ p \in \mathbb{R}$ (Εξίσωση Bessel)

Ο συντελεστής $p(x) = \frac{1}{x}$ και ο συντελεστής $q(x) = \frac{(x^2-p^2)}{x^2}$, άρα το $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ.

3) $x^2y'' + xp_oy' + q_oy = 0,\ p_o, q_o \in \mathbb{R}$ (Εξίσωση Euler)

Ο συντελεστής $p(x) = \frac{p_o}{x}$ και ο συντελεστής $q(x) = \frac{q_o}{x^2}$, άρα το $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ.

4) $xy'' + (e^x - 1)y' + x^3y = 0$

Ο συντελεστής $p(x) = \frac{e^x-1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$, επομένως είναι αναλυτική στο μηδέν. Επίσης η συνάρτηση $q(x) = x^2$ είναι αναλυτική στο μηδέν. Άρα το σημείο $x_o = 0$ είναι ομαλό σημείο της ΔΕ.

4) $y'' + x^3y' + \sqrt{x}y = 0$

Ο συντελεστής $p(x) = x^3$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο μηδέν, όμως ο συντελεστής $q(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι αναλυτική συνάρτηση στο μηδέν. Άρα το $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ.

Σημείωση: Όταν οι συντελεστές της ΔΕ είναι ρητές συναρτήσεις (λόγος πολυωνύμων) τα ιδιάζοντα σημεία προσδιορίζονται από τις ρίζες του παρονομαστή.

<u>1. Λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς στη περιοχή ομαλού σημείου</u>

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσεων της ΔΕ (1) με τη χρήση των δυναμοσειρών καθώς και τον προσδιορισμό ενός ελαχίστου διαστήματος σύγκλισης της λύσης σειράς σε ομαλά σημεία.

<u>Θεώρημα:</u> Αν το σημείο x_o είναι <u>ομαλό σημείο</u> τη ΔΕ (1),(οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο x_o, δηλαδή αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές με κέντρο το x_o) τότε η γενική λύση της (1) είναι: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_o)^n$. (2)

Οι συντελεστές της λύσης a_n μπορούν να προσδιορισθούν συναρτήσει των a_o και a_1, οπότε η γενική λύση είναι της μορφής: $y(x) = a_oy_1(x) + a_1y_2(x)$, (3)

όπου a_o, a_1αυθαίρετες σταθερές και y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς. Αν δίνονται αρχικές συνθήκες:

$y(x_o) = y_o, y'(x_o) = y_1$ τότε $a_o = y_o, \quad a_1 = y_1$.
Επί πλέον, η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών y_1, y_2 είναι τουλάχιστον ίση με την ελάχιστη ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών για τα p και q.

Από τη τελευταία πρόταση του θεωρήματος, μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τις ακτίνες σύγκλισης των λύσεων της ΔΕ (1) υπό μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το x_o, αρκεί να προσδιορίσουμε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών για τα p και q.

Αυτό μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους:
1ος τρόπος: Να υπολογίσουμε τις δυναμοσειρές για τα $p(x)$ και $q(x)$ και να εφαρμόσουμε ακριβή κριτήρια-κυρίως το κριτήριο του λόγου-για να βρούμε το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών. Ας παρεμβάλλουμε λοιπόν εδώ την εφαρμογή του κριτηρίου του λόγου για την απόλυτη σύγκλιση μίας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_o)^n$. Σχηματίζουμε την απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο διαδοχικών όρων $\left|\frac{\alpha_{n+1}(x-x_o)^{n+1}}{\alpha_n(x-x_o)^n}\right|$ και εξετάζουμε το όριο καθώς $n \to \infty$ με το x ακινητοποιημένο:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(x-x_o)^{n+1}}{\alpha_n(x-x_o)^n}\right| = |x-x_o| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = |x-x_o|L$$
Τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως γι αυτή την τιμή x εάν $|x-x_o|\,L < 1$, και αποκλίνει εάν $|x-x_o|\,L > 1$. Εάν $|x-x_o|\,L = 1$ το κριτήριο δεν αποφαίνεται.
α) Εάν το $0 < \frac{1}{L} = \rho < \infty$, τότε η σειρά συγκλίνει για κάθε $|x-x_o| < \rho$ και αποκλίνει για $|x-x_o| > \rho$.
β) Εάν το $\frac{1}{L} = \rho = \infty$, τότε η σειρά συγκλίνει για κάθε x.
γ) Εάν το $\frac{1}{L} = \rho = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_o$.
Ο αριθμός $\boldsymbol{\rho}$ ονομάζεται ***ακτίνα σύγκλισης*** της δυναμοσειράς και το διάστημα $|x-x_o| < \rho$ καλείται ***διάστημα σύγκλισης*** της δυναμοσειράς.

Παράδειγμα (α): Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ έχουμε
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}x^{n+1}}{\alpha_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{2\,n\,x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{2\,n}\right| = |x|\frac{1}{2} < 1$. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 2$ και αποκλίνει για $|x| > 2$. Η ακτίνα σύγκλισης είναι $\rho = 2$.

2ος τρόπος: . Όταν η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, όπου $P(x), Q(x), R(x)$ είναι πολυώνυμα, οι συναρτήσεις $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ και $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ είναι ρητές συναρτήσεις. Σε αυτή τη περίπτωση, εάν οι συντελεστές είναι αναλυτικές στο σημείο x_o, $(P(x_o) \neq 0)$ υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης των δυναμοσειρών με κέντρο το x_o για τα $p(x)$ και $q(x)$. Αποδεικνύεται από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων ότι ο λόγος δύο τέτοιων πολυωνύμων, έστω $\frac{Q(x)}{P(x)}$, διαθέτει συγκλίνον ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το x_o για το οποίο $P(x_o) \neq 0$. Επί πλέον, έχοντας απλοποιήσει τυχόν κοινούς όρους των $Q(x)$ και $P(x)$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς για το $\frac{Q(x)}{P(x)}$ γύρω από το σημείο x_o είναι ίση με την απόσταση του σημείου x_o από την πλησιέστερη ρίζα, συμπεριλαμβανομένων και των μιγαδικών ριζών, του παρονομαστή.

Παράδειγμα (β): Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor γύρω από το (i) $x_o = 0$ και (ii) $x_o = 1$ της συνάρτησης: $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$

Η εξίσωση $x^2 - 2x + 2 = 0$ έχει λύσεις $x = 1 \pm i$.

(i) Η απόσταση του $x_o = 0$ από το $1 + i$ ή το $1 - i$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι $\sqrt{2}$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω από το $x_o = 0$ είναι $\sqrt{2}$. Δηλαδή $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \;\; |x| < \sqrt{2}$.

(ii) Η απόσταση του $x_o = 1$ από το $1 + i$ ή το $1 - i$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι: $|1 - (1 + i)| = |-i| = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω από το $x_o = 1$ είναι 1.
Δηλαδή, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n, \;\; |x - 1| < 1$.

Παράδειγμα (γ): Να βρεθεί ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα σύγκλισης των λύσεων υπό μορφή δυναμοσειράς γύρω από το δοθέν σημείο για την διαφορική εξίσωση:
$(1 + x^3)\, y'' + xy' + 4y = 0, \;\; (i)\; x_o = 0, \;\; (ii)\; x_o = 2$

Ο συντελεστής $p(x) = \frac{x}{1+x^3}$ και $1 + x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) Η απόσταση του $x_o = 0$, από τις ρίζες $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$.

(ii) Η απόσταση του $x_o = 2$, από τις ρίζες $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $\left|2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$.

Επομένως, στην πρώτη περίπτωση, σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ συγκλίνει τουλάχιστον για $|x| < 1$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-2)^n$ συγκλίνει τουλάχιστον για $|x - 2| < \sqrt{3}$, και το διάστημα σύγκλισης είναι τουλάχιστον: $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$.

Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η ΔΕ:

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty \qquad (1.1)$$

Όπως γνωρίζουμε οι συναρτήσεις $cosx$ και $sinx$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης και δεν χρειάζεται η μέθοδος των δυναμοσειρών για την επίλυση. Ωστόσο, το συγκεκριμένο παράδειγμα εξηγεί την μέθοδο των δυναμοσειρών σε μία σχετικά απλή περίπτωση.

Για την συγκεκριμένη εξίσωση, $p(x) = 0, q(x) = 1$, οπότε κάθε σημείο είναι ομαλό.
Σύμφωνα με το θεώρημα η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (1.2)$

η οποίες προφανώς συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (1.2)

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2}$

και αντικαθιστώντας στην (1.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \qquad (1.3)$$

Για να συσχετίσουμε τις δύο σειρές θα πρέπει να μετατοπίσουμε το δείκτη σε μία από αυτές έτσι ώστε να έχουμε τις ίδιες δυνάμεις του x . Έτσι στο πρώτο άθροισμα μετατοπίζουμε τον δείκτη άθροισης κάνοντας την αντικατάσταση του $n - 2$ με κ (οπότε όταν το $n = 2, \kappa = 0$) και γίνεται $\sum_{\kappa=0}^{\infty} (\kappa + 2)(\kappa + 1) a_{\kappa+2}\, x^{\kappa}$. Θέτοντας ξανά όπου $\kappa = n$ έχουμε

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = 0 \Rightarrow$
$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\}x^n = 0.$

Προκειμένου να ικανοποιείται η τελευταία σχέση για όλα τα x, ο συντελεστής κάθε δύναμης του x πρέπει να είναι μηδενικός. Έχουμε λοιπόν

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0,1,2 \ldots \qquad (1.4)$$

Η σχέση (1.4) είναι η ***<u>αναδρομική σχέση</u>*** η οποία προσδιορίζει κάθε συντελεστή a_{n+2} για $n = 0,1,2, \ldots$ με τον κατά δύο βήματα προηγούμενό του συντελεστή, δηλαδή είναι μία αναδρομική σχέση με βήμα 2.

Έτσι το a_o προσδιορίζει το a_2 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_4…, δηλαδή όλα τα a_{2n} προσδιορίζονται από το a_o.

Το a_1 προσδιορίζει το a_3 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_5…, δηλαδή όλα τα a_{2n+1} προσδιορίζονται από το a_1.

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{2n}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 2\kappa - 2$, Οπότε η (1.4) γίνεται: $a_{2\kappa} = -\frac{a_{2\kappa-2}}{(2\kappa-1)(2\kappa)}, \quad \kappa = 1,2,3 \ldots$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Για } \kappa = 1, & a_2 = -\frac{a_o}{1\cdot 2} \\ \text{Για } \kappa = 2, & a_4 = -\frac{a_2}{3\cdot 4} \\ \text{Για } \kappa = 3, & a_6 = -\frac{a_4}{5\cdot 6} \\ \vdots & \\ \text{Για } \kappa = n, & a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n-1)(2n)} \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (α) προκύπτει ότι

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}a_o\,, \quad n = 1,2,3 \ldots \qquad (1.5)$$

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{2n+1}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 2\kappa - 1$, οπότε, η (1.4) γίνεται: $a_{2\kappa+1} = -\frac{a_{2\kappa-1}}{(2\kappa)(2\kappa+1)}, \quad \kappa = 1,2,3 \ldots$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Για } \kappa = 1, & a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} \\ \text{Για } \kappa = 2, & a_5 = -\frac{a_3}{4\cdot 5} \\ \text{Για } \kappa = 3, & a_7 = -\frac{a_5}{6\cdot 7} \\ \vdots & \\ \text{Για } \kappa = n, & a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{(2n)(2n+1)} \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (β) προκύπτει ότι

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_1\,, \quad n = 1,2,3 \ldots \qquad (1.6)$$

Εισάγοντας τους συντελεστές στην εξίσωση (1.2), έχουμε

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = \left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}a_o x^{2n}\right] + \left[a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_1 x^{2n+1}\right] =$$

$$a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$a_o\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] + a_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x),\ x \in \mathbb{R} \qquad (1.7)$$

Οι συντελεστές a_o και a_1 είναι αυθαίρετοι. Από την εξίσωση (1.2) και την παράγωγό της βλέπουμε ότι $y(0) = a_o$ και $y'(0) = a_1$, επομένως οι συντελεστές a_o και a_1 προσδιορίζονται εφόσον δοθούν αρχικές συνθήκες: $y(0) = y_o$, $y'(0) = y_1$.

Είδαμε λοιπόν, ότι με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, μέσα από την αναδρομική σχέση (που εμπλέκει μόνο δύο όρους (a_{n+2} και a_n) μπορέσαμε να υπολογίσουμε τον γενικό τύπο του συντελεστή a_n συναρτήσει των συντελεστών a_o και a_1. Οπότε έχουμε το πλήρη καθορισμό των δύο δυναμοσειρών ως λύσεων της ΔΕ που υπεισέρχονται στην αναπαράσταση (1.7). Γενικότερα, όταν η αναδρομική σχέση εμπλέκει δύο συντελεστές μπορούμε πάντα να προσδιορίσουμε τον γενικό τύπο του συντελεστή a_n συναρτήσει των συντελεστών a_o και a_1. Αυτό έχει το όφελος ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου για να βρούμε το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών λύσεων.
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα κάτι τέτοιο δεν είναι αναγκαίο διότι οι συντελεστές p και q είναι σταθεροί αριθμοί, οπότε με βάση το θεώρημα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών-λύσεων της ΔΕ δεν μπορεί να είναι στενότερο από το διάστημα σύγκλισης των συντελεστών p, q, έπεται ότι οι σειρές συγκλίνουν για κάθε x. Επιπλέον, αναγνωρίζουμε ότι η πρώτη σειρά είναι το ανάπτυγμα Taylor του $cosx$, ενώ η δεύτερη σειρά είναι το ανάπτυγμα Taylor του $sinx$.
Αν παρόλα αυτά εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου για τις δύο δυναμοσειρές-λύσεις (1.7) προκύπτει ότι:

$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right| = |x^2|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = |x^2|0 < 1$, οπότε η σειρά $y_1(x)$ συγκλίνει για κάθε x.
$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| = |x^2|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = |x^2|0 < 1$, οπότε η σειρά $y_2(x)$ συγκλίνει για κάθε x.
Οι σειρές αυτές στο διάστημα σύγκλισης ορίζουν τις συναρτήσεις y_1, y_2, τις οποίες μπορούμε να τις παραγωγίσουμε όρο προς όρο και να αναπαριστούν τις παραγώγους των y_1, y_2 όταν αναφερόμαστε σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος σύγκλισης. Αυτό μας βοηθάει να δείξουμε ότι η Wronskian των y_1, y_2 είναι διάφορη του μηδενός στο $x_o = 0$ και έτσι εξασφαλίζεται η γραμμική ανεξαρτησία τους. Επομένως, η σχέση (1.7) είναι η γενική λύση της ΔΕ.
Επίσης, μπορούμε να μελετήσουμε τις λύσεις y_1, y_2 και να διαπιστώσουμε ότι έχουν όλες τις γνωστές αλγεβρικές ιδιότητες της συνάρτησης του συνημιτόνου και του ημιτόνου αντίστοιχα. Επομένως, οι συναρτήσεις $cosx, sinx$, ορίζονται και ως λύσεις της ΔΕ: $y'' + y = 0$. Η $y_1(x) = cosx$ αποτελεί λύση στο ΠΑΤ: $y(0) = 1, y'(0) = 0$, ενώ η $y_2(x) = sinx$ αποτελεί λύση στο ΠΑΤ: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Πολλές άλλες συναρτήσεις σημαντικές σε προβλήματα της μαθηματικής φυσικής ορίζονται επίσης ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων υπό μορφή δυναμοσειρών, οι οποίες δεν συγκαταλέγονται στις στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η ΔΕ Airy: $y'' - xy = 0, -\infty < x < \infty$ (2.1)
Για την συγκεκριμένη εξίσωση, $p(x) = 0, q(x) = -x$, οπότε κάθε σημείο είναι ομαλό.
Σύμφωνα με το θεώρημα η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύση υπό μορφή δυναμοσειράς

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (2.2)$$

η οποία προφανώς συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (2.2)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1} = 0 \qquad (2.3)$$

Μετατοπίζοντας τον δείκτη άθροισης της σειράς στον πρώτο όρο με την αντικατάσταση του $n-2$ με κ (οπότε όταν το $n = 2, \kappa = 0$) και στον δεύτερο όρο με την αντικατάσταση του $n+1$ με κ (οπότε όταν το $n = 0, \kappa = 1$), και θέτοντας ξανά όπου $\kappa = n$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^n = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\}x^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Η σχέση: $a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$ είναι η **αναδρομική σχέση με βήμα 3**. (2.4)

Έτσι το a_o προσδιορίζει το a_3 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_6…, δηλαδή όλα τα a_{3n} προσδιορίζονται από το a_o.
Το a_1 προσδιορίζει το a_4 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_7…, δηλαδή όλα τα a_{3n+1} προσδιορίζονται από το a_1.
Το a_5 προσδιορίζει το a_2 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_8…, δηλαδή όλα τα a_{3n+2} προσδιορίζονται από το a_2. Όμως το $a_2 = 0 \Rightarrow a_{3n+2} = 0, n \geq 1$.
Για να πάρουμε του συντελεστές a_{3n}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 3\kappa - 2$,
Οπότε η (2.4) γίνεται: $a_{3\kappa} = \frac{a_{3\kappa-3}}{(3\kappa-1)(3\kappa)}, \quad \kappa \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_3 = \frac{a_o}{2\cdot 3} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_9 = \frac{a_6}{8\cdot 9} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{3n} = \frac{a_{3n-3}}{(3n-1)(3n)} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (α) προκύπτει ότι

$$a_{3n} = \frac{a_o}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3n-1)(3n)} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}a_o\,, \quad n \geq 1$$

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{3n+1}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 3\kappa - 1$, οπότε, η (2.4) γίνεται: $a_{3\kappa+1} = \frac{a_{3\kappa-2}}{(3\kappa)(3\kappa+1)}, \quad \kappa \geq 1$ και εργαζόμενοι μα παρόμοιο τρόπο προσδιορίζουμε του συντελεστές: $a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdots(3n)(3n+1)} = \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}a_1 \;, n \geq 1$

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης Airy είναι:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right] =$$
$$= a_o y_1(x) + a_1 y_2(x), \; x \in \mathbb{R} \qquad (2.5)$$

Παρατήρηση 2.1: (i) Σε αντίθεση με το παράδειγμα 1 οι συναρτήσεις y_1, y_2 που ορίζονται από τις δυναμοσειρές εντός των αγκυλών δεν συγκαταλέγονται στις στοιχειώδεις συναρτήσεις που γνωρίζουμε. Οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εφόσον $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

(ii) Οι δύο λύσεις ονομάζονται συναρτήσεις Airy και συμβολίζονται με Ai(x) και Bi(x) αντίστοιχα και έχει γίνει εκτενής μελέτη των ιδιοτήτων τους. Από τις γραφικές παραστάσεις τους προκύπτει ότι και οι δύο είναι μονότονες (αύξουσες) για $x > 0$ και ταλαντωτικές για $x < 0$, με φθίνων πλάτος και αυξανόμενη συχνότητα, καθώς αυξάνεται η απόσταση από το μηδέν.
(iii) Η εξίσωση Airy περιγράφει την κάμψη ενός ομοιόμορφου κάθετου στύλου κάτω από την επίδραση του ιδίου του βάρους.

Παρατήρηση 2.2: Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα η αναδρομική σχέση που προέκυψε περιελάμβανε μόνο δύο όρους και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον προσδιορισμό του γενικού τύπου για τον συντελεστή a_n συναρτήσει των a_o και a_1.
Αν αντίθετα, η αναδρομική σχέση έχει περισσότερους από δύο όρους, τότε ο υπολογισμός του γενικού όρου της σειράς είναι, εν γένει, αδύνατος. Οπότε η μόνη σιγουριά που μπορούμε να έχουμε για το διάστημα σύγκλισης είναι ότι δεν μπορεί να είναι στενότερο από αυτό των συντελεστών p και q. Σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος των δυναμοσειρών μας δίνει μία προσεγγιστική αναπαράσταση της λύσης υπό μορφή μίας σειράς της οποίας μόνο ένα πεπερασμένο –αν και αυθαίρετα μεγάλο – πλήθος όρων μπορεί να υπολογισθεί. Μία τέτοια σειρά αν και είναι κατάλληλη για αριθμητικό υπολογισμό δεν είναι, εν τούτοις, σε θέση να μας πει απολύτως τίποτα για τις αλγεβρικές ιδιότητες της λύσης.

Παράδειγμα 3: Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$y'' + xy' + 2y = 0, \ \ y(0) = 0, y'(0) = 1 \qquad (3.1)$$

Για την συγκεκριμένη εξίσωση, $p(x) = x, q(x) = 2$, οπότε κάθε σημείο είναι ομαλό.
Σύμφωνα με το θεώρημα η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύση υπό μορφή δυναμοσειράς

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (3.2)$$

η οποία προφανώς συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (3.2)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \qquad (3.3)$$

Μετατοπίζοντας τον δείκτη άθροισης της σειράς στον πρώτο όρο με την αντικατάσταση του $n-2$ με κ (οπότε όταν το $n = 2, \kappa = 0$) και θέτοντας ξανά όπου $\kappa = n$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_n\, x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)\, a_n\}x^n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{(n+2)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0,1,2 \ldots$$

Η σχέση: $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$ είναι η **αναδρομική σχέση με βήμα 2**. (3.4)

Επομένως, οι συντελεστές με άρτιο δείκτη, a_{2n}, προσδιορίζονται από το a_o και οι συντελεστές με περιττό δείκτη, a_{2n+1}, προσδιορίζονται από το a_1.
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ένα Π.Α.Τ., για το οποίο οι αρχικές συνθήκες είναι

$y(0) = 0, y^{'}(0) = 1$. Όμως $y(0) = a_o$ και $y^{'}(0) = a_1$, άρα $a_o = 0$ και $a_1 = 1$.
Εφόσον $a_o = 0 \Rightarrow a_{2n} = 0, n = 1,2, \dots$
Επομένως από την αναδρομική σχέση έχουμε να υπολογίσουμε μόνο τους συντελεστές με περιττό δείκτη. Θέτοντας στην (3.4) όπου $n = 2\kappa - 1$,
οπότε, η (3.4) γίνεται: $a_{2\kappa+1} = -\frac{a_{2\kappa-1}}{2\kappa}, \quad \kappa = 1,2,3 \dots$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 1} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_5 = -\frac{a_3}{2\cdot 2} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_7 = -\frac{a_5}{2\cdot 3} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2n} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (α) και θέτοντας $a_1 = 1$ προκύπτει ότι

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\dots\cdot n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\ , \quad n = 1,2,3 \dots \tag{3.5}$$

Εισάγοντας τους συντελεστές στην εξίσωση (3.2), έχουμε

$$y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = xe^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)},\ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η λύση στο Π.Α.Τ. είναι $y_{\varepsilon\iota\delta}(x) = xe^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)},\ x \in \mathbb{R}$. (3.6)

<u>Παράδειγμα 4:</u> Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y''(t) + e^{-\varepsilon t} y(t) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$ (4.1)
Το πρόβλημα (4.1) αποτελεί το μαθηματικό πρότυπο της ταλάντωσης ενός ελατηρίου χωρίς απόσβεση το οποίο έχει συμπιεσθεί κατά μία μονάδα από την θέση ισορροπίας του και του οποίου η 'σταθερά' δίνεται από τη συνάρτηση $\kappa(t) = e^{-\varepsilon t}$.
Ο συντελεστής της ΔΕ $q(t) = e^{-\varepsilon t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^n}{n!},\ \ t \in \mathbb{R}$. Επομένως, οι λύσεις της ΔΕ υπό μορφή δυναμοσειράς θα συγκλίνουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Αναζητούμε λύση της ΔΕ στη μορφή $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$. (4.2)
Παραγωγίζοντας την (4.2) έχουμε

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, t^{n-1}, \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, t^{n-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (4.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, t^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right) = 0 \tag{4.3}$$

Στη σχέση (4.3) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο Cauchy δύο δυναμοσειρών

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) t^n \tag{4.4}$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (4.4) στην εξίσωση (4.3) έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right) t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right) t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k})\} t^n = 0 \Rightarrow$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = -\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right) \Rightarrow$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right),\ n = 0,1,2 \dots \qquad (4.5)$$

Η σχέση (4.5) είναι ο αναδρομικός τύπος ο οποίος προσδιορίζει τους συντελεστές a_{n+2} συναρτήσει των συντελεστών $a_o, a_1, \dots, a_n$.
Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $a_o = 1$ και $a_1 = 0$.
Οπότε από την αναδρομική σχέση προκύπτει
Για $n = 0$, $a_2 = -\frac{1}{1\cdot 2} a_o = -\frac{1}{2}$
Για $n = 1$, $a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}\left(a_1 + \frac{(-\varepsilon)^1}{1!} a_o\right) = \frac{\varepsilon}{3!}$
Για $n = 2$, $a_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}\left(a_2 + \frac{(-\varepsilon)^1}{1!} a_1 + \frac{(-\varepsilon)^2}{2!} a_o\right) = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\varepsilon^2}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{4!}(1-\varepsilon^2)$, κ.λ.π.
Επομένως η λύση του Π.Α.Τ. (4.1) προσεγγιστικά δίνεται από την συνάρτηση

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\varepsilon}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}(1-\varepsilon^2)t^4 - \cdots \qquad (4.6)$$

Θεωρητικά μπορούμε να υπολογίσουμε όσους όρους θέλουμε, αλλά είναι δύσκολο να βρούμε ένα γενικό τύπο που να μας προσδιορίζει τους συντελεστές a_n συναρτήσει του a_o.

Παρατήρηση 4.1: Η λύση $y(t)$ όταν το $\varepsilon \to 0$ γίνεται
$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots$, που είναι το ανάπτυγμα Taylor του $cost$, δηλαδή η λύση που θα είχαμε στην περίπτωση που η σταθερά του ελατηρίου $\kappa = 1$, ανεξάρτητη του χρόνου. Επομένως, η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου ακολουθεί τον γραμμικό νόμο του Hooke: $F_{\varepsilon\lambda} = \kappa y(t)$.

Υπάρχουν όμως πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα που προκύπτουν στη Μαθηματική φυσική που είναι εφικτό ο γενικός συντελεστής της δυναμοσειράς να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή οπότε έχουμε πλήρη καθορισμό των δυναμοσειρών που υπεισέρχονται στην αναπαράσταση $y(x) = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x)$. Αυτό έχει το όφελος ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε ακριβή κριτήρια για την εύρεση του διαστήματος σύγκλισης (κριτήριο του λόγου) αλλά το σημαντικότερο ότι κάποιες φορές μπορούμε να προσπαθήσουμε να συνθέσουμε τη δυναμοσειρά σε μία κλειστή μορφή (δηλαδή να περάσουμε από μία γνωστή δυναμοσειρά στη συνάρτηση που την γεννά).
Όταν αυτό επιτυγχάνεται, είναι σημαντικό -πέρα από την κομψότητα του αποτελέσματος- διότι η συνάρτηση που συνθέτει την δυναμοσειρά συμπίπτει με αυτήν στο διάστημα σύγκλισης, αλλά ταυτόχρονα επεκτείνεται έξω από το διάστημα σύγκλισης –εκεί που η δυναμοσειρά ‘εγκαταλείπει’- αποτελώντας λύση της ΔΕ σε όλο το $\mathbb{R}$, πλην των σημείων που η συνάρτηση απειρίζεται.

Παράδειγμα 5: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0 \qquad (5.1)$$

Επίλυση: Οι συντελεστές τη ΔΕ είναι ρητές συναρτήσεις: $p(x) = \frac{-6x}{(1-x^2)},\ q(x) = \frac{-4}{(1-x^2)}$
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_o = 0$ και διαθέτουν ανάπτυγμα Taylor για $|x| < 1$.

Σημείωση: Όταν η διαφορική εξίσωση έχει συντελεστές ρητές συναρτήσεις τότε η λυμένη μορφή δεν είναι η ενδεδειγμένη για τον χειρισμό της.

Είναι βοηθητικό να πολλαπλασιάσουμε με τους παρονομαστές των συντελεστών με σκοπό να δημιουργήσουμε ένα πιο απλοποιημένο αναδρομικά σχήμα.

Αναζητούμε λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το $x_o = 0 : y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$
Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (5.1) προκύπτει
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$
Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση:
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0$
(<u>αφού γίνουν οι μετατοπίσεις των δεικτών</u>, παρατηρούμε ότι το δεύτερο άθροισμα που αρχίζει από $n = 2$, για $n = 0$ και $n = 1$ μηδενίζεται. Επίσης, το τρίτο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n$, που αρχίζει από $n = 1$, για $n = 0$ μηδενίζεται, άρα μπορούμε να τα γράψουμε $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} na_n\, x^n$). Άρα έχουμε
$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+4)a_n\}x^n = 0$, η οποία γράφεται
$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)(n+4)a_n\}x^n = 0, \;\; x \in I$
Άρα $\quad a_{n+2} = \frac{(n+4)}{(n+2)}a_n, \;\; n \geq 0$, η αναδρομική σχέση με βήμα 2. (5.2)

<u>Για την περίπτωση:</u> $n = 2\kappa - 2, \;\; a_{2\kappa} = \frac{(\kappa+1)}{\kappa}a_{2\kappa-2}, \quad \kappa \geq 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_2 = \frac{2a_o}{1} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_4 = \frac{3a_2}{2} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_6 = \frac{4a_4}{3} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n} = \frac{(n+1)a_{2n-2}}{n} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη το αναγωγικό σχήμα (α) μας δίνει τον γενικό τύπο
$a_{2n} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}a_o = (n+1)a_o, \;\; n = 1,2,\ldots$

<u>Για την περίπτωση</u>: $n = 2\kappa - 1, \;\; a_{2\kappa+1} = \frac{(2\kappa+3)}{2\kappa+1}a_{2\kappa-1}, \quad \kappa \geq 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_3 = \frac{5a_1}{3} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_5 = \frac{7a_3}{5} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_7 = \frac{9a_5}{7} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n+1} = \frac{(2n+3)a_{2n-1}}{2n+1} \end{array}\right\} (\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη το αναγωγικό σχήμα (β) μας δίνει τον γενικό τύπο
$a_{2n+1} = \frac{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}a_1 = (2n+3)\frac{a_1}{3}, \;\; n = 1,2,\ldots$
Επομένως η γενική λύση είναι $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}] +$
$a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\frac{1}{3}x^{2n+1}\right] = a_o\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} + \frac{a_1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1}$ (5.3)
Οι συναρτήσεις που αποτελούν το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ είναι
$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}, \;\; y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\frac{1}{3}x^{2n+1}$ (5.4)
Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για τις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(n+2)}{(n+1)}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = |x^2|\cdot 1 < 1$$
$$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(2n+5)}{(2n+3)}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3} = |x^2|\cdot 1 < 1$$

Και οι δύο αυτές δυναμοσειρές έχουν διάστημα σύγκλισης $I = (-1,1)$.
Έξω από το διάστημα αυτό αποκλίνουν και παύουν να αποτελούν λύσεις της ΔΕ.
Για να δούμε τι συμβαίνει έξω από το διάστημα αυτό θα προσπαθήσουμε να συνθέσουμε τις δυναμοσειρές σε κλειστή μορφή.
Ξεκινάμε με τη γνωστή γεωμετρική σειρά: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, , z \in (-1,1)$ (5.5)
Αν πολλαπλασιάσουμε με z και τα δύο μέλη της σχέσης (5.5) και κατόπιν παραγωγίσουμε ως προς z προκύπτει $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$. Αντικαθιστώντας όπου $z = x^2$, βρίσκουμε

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2},\ \ x \in (-1,1)$ (5.6)

Αν τώρα ξεκινήσουμε από τη σχέση (5.5) και αντικαταστήσουμε $z = x^2$, πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με x^3, παραγωγίσουμε ως προς x και τέλος διαιρέσουμε με τη μεταβλητή x και τα δύο μέλη:

$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \Rightarrow \frac{x^3}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+3} \Rightarrow \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+2} \Rightarrow$
$\frac{3x-x^3}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1}$

προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $y_2(x)$ ως ακολούθως

$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1} = \frac{3x-x^3}{(1-x^2)^2}\ \ , x \in (-1,1)$ (5.7)

Συνθέτοντας τις σειρές σε ρητές συναρτήσεις τις επεκτείναμε έξω από το διάστημα σύγκλισης. Έτσι λοιπόν η γενική λύση της ΔΕ (5.1) έχει τη μορφή

$y(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}\left(a_o + a_1(3x - x^3)\right),$ (5.8)

η οποία ικανοποιεί τη ΔΕ (5.1) οπουδήποτε πλην των σημείων $x = \pm 1$.

<u>Παράδειγμα 6:</u> Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$y'' + xy' - y = 0,\ -\infty < x < \infty$ (6.1)

<u>Επίλυση:</u> Υποθέτοντας ότι η λύση έχει τη μορφή $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ και αντικαθιστώντας αυτή στη ΔΕ (6.1) προκύπτει
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$
Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση: $\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)a_n\}x^n = 0$.
Άρα έχουμε $a_{n+2} = -\frac{(n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n,\ n = 0,1,2 \dots$, η αναδρομική σχέση με βήμα 2. (6.2)
Από την αναδρομική σχέση παρατηρούμε ότι για $n = 1$, προκύπτει ότι
$a_3 = 0 \Rightarrow a_{2n+1} = 0, n = 1,2, \dots$
Άρα $y_2(x) = x$, δηλαδή η 2η λύση δεν είναι μία άπειρη δυναμοσειρά αλλά ένα πολυώνυμο.

Από την αναδρομική σχέση (6.2), για $n = 2\kappa - 2$, έχουμε

$$a_{2\kappa} = -\frac{(2\kappa-3)}{(2\kappa-1)(2\kappa)}a_{2\kappa-2},\quad \kappa = 1,2,3 \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1,\quad a_2 = -\frac{(-1)a_o}{1\cdot 2} \\ \text{Για } \kappa = 2,\quad a_4 = -\frac{1a_2}{3\cdot 4} \\ \text{Για } \kappa = 3,\quad a_6 = -\frac{3a_4}{5\cdot 6} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n,\quad a_{2n} = -\frac{(2n-3)a_{2n-2}}{(2n-1)2n} \end{array}\right\}(\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη το αναγωγικό σχήμα (α) μας δίνει τον γενικό τύπο

$a_{2n} = \frac{(-1)^n(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)(2n-3)a_o}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)(2n-3)(2n-1)]\,[2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n]} = \frac{(-1)^{n+1}\,a_o}{(2n-1)2^n(n)!}, n = 1,2,3\,\ldots$

Άρα $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^{2n}}{2^n(2n-1)(n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^{2n}}{2^n(2n-1)(n)!}$

Επομένως η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = a_o\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(2n-1)(n)!}x^{2n} + a_1x,\ x \in \mathbb{R}$ (6.3)

<u>Παρατήρηση 6.1</u>: Έχοντας προσδιορίσει την μία λύση $y_2(x) = x$ της ΔΕ θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης για να προσδιορίσουμε τη δεύτερο μέλος του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ (6.1).

Θεωρώντας ότι $\bar{y}_1(x) = u(x)y_2(x) = u(x)x$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ έχουμε

$$xu'' + 2u' + x(xu' + u) - xu = 0 \Rightarrow u'' + \left(\frac{2}{x} + x\right)u' = 0$$

Θέτοντας $u' = v$ παίρνουμε την διαφορική εξίσωση 1ης τάξης: $v' + \left(\frac{2}{x} + x\right)v = 0$ της οποίας μία λύση είναι $v(x) = (-1)x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (για $c = -1$, όπου c η αυθαίρετη σταθερά της γενικής λύσης). Επομένως $u(x) = -\int x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Από το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, αντικαθιστώντας όπου $z = -\frac{x^2}{2}$, έχουμε $e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$.

Επομένως

$u(x) = -\int x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{2^n n!}\,dx =$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}\int x^{2n-2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^n(2n-1)n!}$

Άρα $\bar{y}_1(x) = u(x)x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^n(2n-1)n!} = y_1(x)$.

<u>Παράδειγμα 7:</u> Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$y'' - xy = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \qquad (7.1)$$

Όταν αναζητάμε λύση στην περιοχή του x_o, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x - x_o)^n$ τότε οι συντελεστές $p(x), q(x)$ θα πρέπει να εκφρασθούν ως αθροίσματα δυνάμεων του $(x - x_o)$.

Στην εξίσωση (7.1) γράφουμε: $y'' - (x - 1 + 1)y = 0 \Rightarrow y'' - (x - 1)y - y = 0$, με $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x - 1)^n$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x - x_o = t$, λαμβάνοντας μία νέα ΔΕ ως προς $y(t)$. Στο πρόβλημα (7.1) θέτοντας $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$, έχουμε το Π.Α.Τ. : $y''(t) - (t + 1)y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$ (7.2)

με $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,t^n$. (7.3)

Όταν ολοκληρώσουμε τους υπολογισμούς αντικαθιστούμε το t με $x - 1$.

Αντικαθιστώντας την (7.3) στη ΔΕ (7.2) έχουμε:

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = 0 \Rightarrow 2\cdot 1a_2 - a_o +$

$\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} - a_n\}t^n = 0$

Άρα $a_2 = \frac{a_o}{2}$ και

$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}+a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$ η αναδρομική σχέση (η οποία εμπλέκει 3 όρους)

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $y(0) = 1 \Rightarrow a_o = 1,\ y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$

Άρα από την αναδρομική σχέση προκύπτει

Για $n = 1$ $a_3 = \frac{a_o+a_1}{(2)(3)} = \frac{1}{3!}$

Για $n = 2$ $a_4 = \frac{a_1+a_2}{(3)(4)} = \frac{1}{4!}$

Για $n = 3$ $a_5 = \frac{a_2+a_3}{(4)(5)} = \frac{4}{5!}$, κ.λ.π.

Επομένως η λύση στο Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{4t^5}{5!} + \cdots$$

Για $t = x - 1$

$$y(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση 7.1: Η γενική λύση της ΔΕ Airy υπό μορφή δυναμοσειράς του $x - 1$ είναι:

$$y(x) = a_o\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \cdots\right] +$$
$$a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} + \cdots\right] = a_o y_3(x) + a_1 y_4(x), x \in \mathbb{R} \qquad (7.4)$$

Στο παράδειγμα 2, βρήκαμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Airy υπό μορφή δυναμοσειράς του x,

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right] =$
$a_o y_1(x) + a_1 y_2(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$ που ορίσθηκαν μέσω των δυναμοσειρών της παραπάνω εξίσωσης αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ Airy, όπως επίσης και οι συναρτήσεις $y_3(x), y_4(x)$ της εξίσωσης (7.4). Επομένως, σύμφωνα με την γενική θεωρία των γραμμικών εξισώσεων 2ης τάξης, η κάθε μία από τις συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $y_3(x), y_4(x)$ και αντιστρόφως-αποτέλεσμα που δεν είναι καθόλου προφανές από την μορφή των δυναμοσειρών.

Παράδειγμα 8: Να λυθεί η ΔΕ:

$$y'' + sinxy = x^2,\ -\infty < x < \infty \qquad (8.1)$$

Επίλυση: Οι συναρτήσεις $sinx,\ x^2$ είναι αναλυτικές στο $x_o = 0$ με ακτίνα σύγκλισης $r = \infty$. Επομένως, η εξίσωση (8.1) δέχεται λύσεις της $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ με ακτίνα σύγκλυσης $\rho = \infty$. Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (8.1) προκύπτει

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right) = x^2 \Rightarrow$

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)(a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = x^2$$

Υπολογίζοντας τους πρώτους όρους γινομένου έχουμε:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + a_o x + a_1x^2 + \left(a_2 - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(a_3 - \frac{a_1}{3!}\right)x^4 + \cdots = x^2$$

$$\Rightarrow 2a_2 = 0, 6a_3 + a_o = 0, 12a_4 + a_1 = 1, 20a_5 + \left(a_2 - \frac{1}{3!}\right) = 0, \ldots$$

Επιλύοντας τις παραπάνω σχέσεις συναρτήσει ως προς τους συντελεστές $a_n, n = 2,3, \ldots$ συναρτήσει των συντελεστών a_o, a_1, παίρνουμε τους πρώτους όρους της γενικής λύσης της ΔΕ:

$$y(x) = a_o + a_1x - \frac{a_o}{6}x^3 + \frac{1 - a_1}{12}x^4 + \frac{a_o}{120}x^5 + \frac{a_o + a_1}{180}x^6 + \cdots$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τόσους όρους όσους απαιτεί η ακρίβεια του προβλήματος.

<u>Εξίσωση Legendre τάξης α</u>

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{(L.1)}$$

Η εξίσωση (L.1) έχει σημαντικές εφαρμογές σε προβλήματα που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία, όπως στο πρόβλημα της στατικής θερμοκρασίας εντός μίας σφαιρικής μπάλας όταν είναι γνωστές οι θερμοκρασίες των σημείων στο σύνορο.

Οι συντελεστές της ΔΕ είναι $p(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)}$, $q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)}$, είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_o = 0$, άρα το μηδέν είναι ομαλό σημείο της ΔΕ. Τα μοναδικά ιδιάζοντα σημεία είναι τα σημεία ± 1. Επίσης, οι σειρές Taylor των $p(x)$ και $q(x)$ με κέντρο το μηδέν συγκλίνουν για $|x| < 1$. Επομένως, οι λύσεις της ΔΕ:

$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ θα έχουν ακτίνα σύγκλισης $\rho \geq 1$. (L.2)

Αντικαθιστώντας την (L.2) στη ΔΕ (L.1), προκύπτει

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\, x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\, x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\, x^k + \alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = 0.$$

Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση $\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + (-k^2 - k + \alpha^2 + \alpha)a_k\}x^k = 0 \ \ \forall |x| < \rho$

Άρα $(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\alpha^2 - k^2 + \alpha - k)a_k \Rightarrow$

$$a_{k+2} = -\frac{(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k, \ \ k = 0,1,2 \ldots \qquad \text{(L.3)}$$

Ο αναδρομικός τύπος (L.3) δίνει

Για $k = 0$ $\quad a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}a_o$

Για $k = 1$ $\quad a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\cdot 3}a_1$

Για $k = 2$ $\quad a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3\cdot 4}a_2 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}a_o$

Για $k = 3$ $\quad a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}a_1$

Για $k = 4$ $\quad a_6 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{5\cdot 6}a_4 = -\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}a_o$

Για $k = 5$ $\quad a_7 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}a_1$

$\vdots$

Γενικότερα, όλοι οι συντελεστές a_{2k} προσδιορίζονται συναρτήσει του a_o και όλοι οι συντελεστές a_{2k+1} συναρτήσει του a_1.

Οπότε προκύπτουν οι δύο λύσεις της ΔΕ

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2k-1)\, x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{(L.4)}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2k)\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{(L.5)}$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha = n$ μη αρνητικός ακέραιος. Από τις σχέσεις (L.4) και (L.5) παρατηρούμε ότι η εξίσωση Legendre τάξης n έχει μία τετριμμένη πολυωνυμική λύση. Ειδικότερα, αν είναι άρτιος, $\alpha = 2n,\ n = 0,1,2 \ldots$, τότε η $y_1(x)$ είναι ένα πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x, βαθμού $2n$, ενώ η $y_2(x)$ είναι μία άπειρη δυναμοσειρά. Αν είναι περιττός, $\alpha = 2n+1,\ n = 0,1,2 \ldots$, τότε η $y_2(x)$ είναι ένα πολυώνυμο που περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του x, βαθμού $2n+1$, ενώ η $y_1(x)$ είναι μία άπειρη δυναμοσειρά. Έτσι σε κάθε περίπτωση αν $\alpha = n$, τότε η εξίσωση Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad \text{(L.6)}$$

έχει λύση πολυώνυμο βαθμού n.

Συμβολίζουμε με $P_n(x)$ τη πολυωνυμική λύση της εξίσωσης (L.6) για την οποία ισχύει $P_n(1) = 1$. Τα πολυώνυμα $P_n(x)$ ονομάζονται ***πολυώνυμα Legendre***.

Π.χ. Αν $\alpha = 0,\ y_1(x) = 1 \Rightarrow P_o(x) = 1$

Π.χ. Αν $\alpha = 2,\ y_1(x) = 1 - \frac{2\cdot 3}{2!}x^2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow y_1(1) = -2 \Rightarrow$

$P_2(x) = \frac{y_1(x)}{y_1(1)} = \frac{1}{-2}(1-3x^2) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$.

Π.χ. Αν $\alpha = 1,\ y_2(x) = x \Rightarrow P_1(x) = x$

Π.χ. Αν $\alpha = 3,\ y_2(x) = x - \frac{2\cdot 5}{3!}x^3 = x - \frac{5}{3}x^3 \Rightarrow y_2(1) = -\frac{2}{3} \Rightarrow$

$P_3(x) = \frac{y_2(x)}{y_2(1)} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{3}x^3\right) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Γενικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ δίνονται από τη σχέση:

$$P_n(x) = 2^{-2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},\ n = 0,1,2 \ldots, \quad \text{(L.7)}$$

όπου $[n/2]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $n/2$.

Επίσης, μπορεί να δειχθεί ότι τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον ***τύπο του Rodrigues***:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0,1,2 \ldots \quad \text{(L.8)}$$

Μία βασική ιδιότητα των πολυωνύμων Legendre είναι η ***ορθογωνιότητα***: Για κάθε δύο μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς n και m ισχύει

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, n \neq m \quad \text{(L.9)}$$

Η σχέση (L.9) αποδεικνύεται ως εξής:

Επειδή τα πολυώνυμα $P_n(x)$ και $P_m(x)$ αποτελούν λύσεις της ΔΕ (L.6), θα ισχύει

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$
$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις αυτές με P_m και P_n αντίστοιχα και αφαιρέσουμε κατά μέλη, θα προκύψει η εξίσωση:

$$(1-x^2)(P_n''P_m - P_m''P_n) - 2x(P_n'P_m - P_m'P_n) + [n(n+1) - m(m+1)]P_nP_m = 0 \quad \text{(L.10)}$$

Οι δύο πρώτοι όροι της τελευταίας σχέσης γράφονται: $\frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_n{}'P_m - P_m{}'P_n)]$
Έτσι ολοκληρώνοντας τη σχέση (L.10) από -1 έως 1 έχουμε:
$(1-x^2)(P_n{}'P_m - P_m{}'P_n)|_{-1}^{1} = [n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_n P_m \, dx,$
Για $n \neq m$ η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι: $\int_{-1}^{1} P_n P_m \, dx = 0, \forall n, m \in N, n \neq m.$

Ορισμένες βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre δίνονται στις παρακάτω σχέσεις:
1. $P_n(1) = 1\,, P_n(-1) = (-1)^n$
2. $|P_n(x)| \leq 1 \quad \forall n,\ x\epsilon[-1,1]$
3. Το πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες όλες στο διάστημα $[-1,1]$
4. Ισχύει ο αναγωγικός τύπος:
   $(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x), n = 1,2 \ldots$
5. $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \text{ ορθογωνιότητα} \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases}$

<u>**Παράδειγμα 9:**</u> Να λυθεί το Π.Α.Τ.:
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \qquad (9.1)$$
<u>Επίλυση</u>: Η εξίσωση (9.1) είναι εξίσωση Legendre με $\alpha = 5$.
Οι συντελεστές της ΔΕ είναι $p(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)},\ q(x) = \frac{30}{(1-x^2)}$, είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_o = 0$, άρα το μηδέν είναι ομαλό σημείο της ΔΕ. Επίσης, οι σειρές Taylor των $p(x)$ και $q(x)$ με κέντρο το μηδέν συγκλίνουν για $|x| < 1$. Επομένως, οι λύσεις της ΔΕ:
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ θα έχουν ακτίνα σύγκλισης $\rho \geq 1.$ (9.2)
Αντικαθιστώντας την (9.2) στη ΔΕ (9.1), προκύπτει
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n + 30\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$
Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση $\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-n^2 - n + 5^2 + 5)a_n\}x^n = 0 \ \ \forall |x| < \rho$
Άρα $\qquad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (5^2 - n^2 + 5 - n)a_n \Rightarrow$
$$a_{n+2} = -\frac{(5-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)} a_n,\ \ n = 0,1,2 \ldots \qquad (9.3)$$
Ο αναδρομικός τύπος (9.3) είναι με βήμα 2, επομένως όλοι οι συντελεστές a_{2n} που προσδιορίζονται συναρτήσει του a_o είναι μηδενικοί εφόσον από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $a_o = 0$. Επίσης, για $n = 5,\ a_7 = 0 \Rightarrow a_{2n+1} = 0,\ n = 3,4, \ldots$, άρα οι μη μηδενικοί συντελεστές με περιττό δείκτη είναι:
Για $n = 1 \quad a_3 = -\frac{4\cdot 7}{2\cdot 3}a_1 = -\frac{4\cdot 7}{2\cdot 3}a_1 = -\frac{14}{3}a_1$
Για $n = 3 \quad a_5 = -\frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}a_3 = \frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}\frac{14}{3}a_1 = \frac{42}{10}a_1$
Άρα η $y_2(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{42}{10}x^5, x \in \mathbb{R}$ είναι η λύση στο Π.Α.Τ.
$y_2(1) = 1 - \frac{14}{3} + \frac{42}{10} = \frac{8}{15}$, επομένως το πολυώνυμο Legendre είναι
$P_5(x) = \frac{15}{8}\left(x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{42}{10}x^5\right) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),\ \ x \in \mathbb{R}.$

2. Κανονικό ιδιάζον σημείο

Η μέθοδος των δυναμοσειρών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

εφαρμόζεται όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως σε ομαλά σημεία, δηλαδή σε σημεία όπου οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Στις εφαρμογές ανακύπτουν διαφορικές εξισώσεις των οποίων οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ – ή απλά ο ένας από τους δύο- χάνουν την αναλυτικότητα τους σ' ένα σημείο x_o. Επομένως το σημείο x_o είναι ιδιάζον (ανώμαλο) σημείο της ΔΕ. Αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των δυναμοσειρών, αναζητώντας λύσεις στη περιοχή του x_o, της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_o)^n$, θα δούμε ότι η μέθοδος θα αστοχήσει (διότι οι λύσεις δεν είναι, εν γένει, αναλυτικές στο x_o και επομένως δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ως ανάπτυγμα Taylor δυνάμεων του $(x - x_o)$.

Επειδή τα ιδιάζοντα σημεία είναι λίγα στο πλήθος, θα μπορούσαμε να τα αγνοήσουμε, με δεδομένο ότι γνωρίζουμε πώς να κατασκευάσουμε λύσεις στην περιοχή ομαλών σημείων. Όμως είναι αυτά ακριβώς τα σημεία που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, π.χ. οι γεωμετρικές ιδιομορφίες ενός φυσικού προβλήματος όπως κορυφές, γωνίες, εγκοπές έχουν σαν συνέπεια την ύπαρξη ιδιαζόντων σημείων στη ΔΕ και είναι τα σημεία στα οποία επιβάλλεται η προσεκτική μελέτη της συμπεριφοράς της λύσης. Αν η απόκλιση των συντελεστών $p(x)$ και $q(x)$ από την αναλυτικότητα είναι ανεξέλεγκτη τότε το λογικότερο είναι να μην επιμείνουμε στο προσδιορισμό λύσεων με κέντρο το x_o. Υπάρχουν όμως ΔΕ με συντελεστές των οποίων η ιδιάζουσα συμπεριφορά στο x_o είναι 'ασθενώς' ιδιάζουσα, δηλαδή οι συναρτήσεις $(x - x_o)p(x)$ και $(x - x_o)^2 q(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο x_o. Τότε το ιδιάζον σημείο x_o καλείται ***κανονικό ιδιάζον (ανώμαλο) (ΚΙΣ)(ΚΑΣ)*** σημείο της ΔΕ. Διαφορετικά καλείται ***μη κανονικό ιδάζον (ανώμαλο) (ΜΚΙΣ)(ΜΚΑΣ)*** σημείο.

Όταν $p(x)$ και $q(x)$ είναι ρητές συναρτήσεις, οι κατάλληλες συνθήκες για να διακρίνουμε αν ένα ιδιάζον σημείο είναι κανονικό ιδιάζον σημείο είναι:

$$\begin{matrix} \lim_{x\to x_o}(x - x_o)p(x) \\ \lim_{x\to x_o}(x - x_o)^2 q(x) \end{matrix} \text{ να υπάρχουν και να είναι πεπερασμένα} \qquad (2)$$

Π.χ. α) η εξίσωση Euler: $x^2y'' + xp_oy' + q_oy = 0,\ p_o, q_o \in \mathbb{R}$, έχει συντελεστές $p(x) = \frac{p_o}{x}$ και $q(x) = \frac{q_o}{x^2}$, άρα το ιδιάζον σημείο είναι τα $x_o = 0$. Όμως

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} xp(x) = p_o \\ \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = q_o \end{cases}, \text{ άρα είναι ΚΙΣ}$$

β) Η εξίσωση Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει συντελεστές $p(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)}$ και $q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)}$, άρα τα ιδιάζοντα σημεία είναι τα $x_o = \pm 1$.

Για το σημείο $x_o = 1$ έχουμε: $\begin{cases} \lim_{x\to 1}(x - 1)\frac{(-2x)}{(1-x^2)} = 1 \\ \lim_{x\to 1}(x - 1)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)} = 0 \end{cases}$, άρα είναι ΚΙΣ

Για το σημείο $x_o = -1$ έχουμε: $\begin{cases} \lim_{x\to -1}(x+1)\frac{(-2x)}{(1-x^2)} = 1 \\ \lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)} = 0 \end{cases}$, άρα είναι ΚΙΣ

γ) Η εξίσωση $2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$, έχει συντελεστές $p(x) = \frac{3}{2(x-2)^2}$ και $q(x) = \frac{1}{2x(x-2)}$, άρα τα ιδιάζοντα σημεία είναι τα $x_o = 0$ και $x_o = 2$.

Για το σημείο $x_o = 0$ έχουμε: $\begin{cases} \lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0 \\ \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0 \end{cases}$, άρα είναι ΚΙΣ

Για το σημείο $x_o = 2$ έχουμε: $\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2} = \infty$, άρα είναι ΜΚΙΣ

Όταν το σημείο x_o είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ (1), τότε μπορούμε να 'αναζητήσουμε' μία γενίκευση της μεθόδου των δυναμοσειρών χωρίς να αλλάξουμε το κέντρο ανάπτυξης αυτών, έτσι ώστε να την εφαρμόσουμε στη περιοχή του ΚΙΣ.
Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι το ΚΙΣ είναι το $x_o = 0$.
Αν το $x_o \neq 0$, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε μία άλλη θέτοντας $x - x_o = t$.
Εφόσον το $x_o = 0$ είναι ΚΙΣ έπεται ότι οι συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, άρα έχουν ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το μηδέν. Έστω ότι
$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ για $|x| < \rho_1$ [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $p_o = \lim_{x\to 0} xp(x)$]
$x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ για $|x| < \rho_2$. [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $q_o = \lim_{x\to 0} x^2q(x)$]

Προκειμένου να εμφανίσουμε τους όρους $xp(x)$ και $x^2q(x)$ στη ΔΕ (1) πολλαπλασιάζουμε την (1) με x^2, οπότε προκύπτει η ΔΕ

$$x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y = 0 \qquad (3)$$

$$x^2y'' + x(p_o + p_1x + \cdots)y' + (q_o + q_1x + \cdots)y = 0 \qquad (4)$$

2Α. Εξίσωση Euler

Σαν πρώτη περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι όλοι οι συντελεστές $p_i = 0, i = 1{,}2 \ldots$ και $q_i = 0, i = 1{,}2 \ldots$, όποτε η (4) γίνεται

$$x^2y'' + xp_oy' + q_oy = 0,\ p_o, q_o \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

Η ΔΕ (5) είναι η ***εξίσωση Euler*** με ΚΙΣ το $x_o = 0$.
Επειδή οι συντελεστές της ΔΕ (5) δεν ορίζονται στο μηδέν ενδεχομένως και οι λύσεις να μην ορίζονται στο μηδέν. Θεωρούμε αρχικά ότι $x > 0$.
Στη διαφορική εξίσωση Euler παρατηρούμε ότι σε κάθε όρο η τάξη της εμπλεκόμενης παραγώγου ταυτίζεται με το εκθέτη του συνοδεύοντος μονωνύμου. Συνεπώς ένα τυχαίο μονώνυμο αποτελεί ιδιοσυνάρτηση - με σταθερή ιδιοτιμή - για κάθε όρο της διαφορικής εξίσωσης και αυτό μας προδιαθέτει να δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$. Πιο συγκεκριμένα αντικαθιστώντας μια τέτοια απλή υποψήφια λύση στην (4) παίρνουμε

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + xp_orx^{r-1} + q_ox^r = 0 \Rightarrow \{r(r-1) + p_or + q_o\}x^r = 0, \forall x > 0$$

Άρα $\quad f(r) = r(r-1) + p_or + q_o = r^2 + (p_o - 1)r + q_o = 0 \qquad (6)$

Η εξίσωση (6) ονομάζεται ***<u>εξίσωση δεικτών ή δείκτρια εξίσωση</u>*** και προσδιορίζει τους μοναδικούς επιτρεπτούς εκθέτες – που καλούνται ***<u>εκθέτες ιδιομορφίας</u>*** - ώστε η συνάρτηση x^r να ικανοποιεί τη ΔΕ (5).
Διακρίνουμε τρείς χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

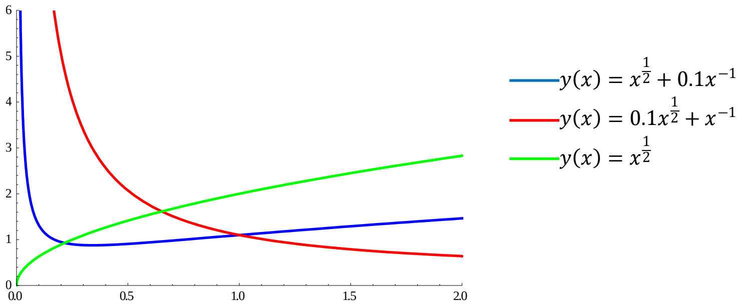
α) Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$ τότε $y_1(x) = x^{r_1}$ και $y_2(x) = x^{r_2}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ (5) και η γενική λύση γράφεται

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, x > 0 \qquad (7)$$

Κοντά στο ιδιάζων σημείο $x = 0$, η συμπεριφορά των λύσεων εξαρτάται εξ ολοκλήρου από τις τιμές των εκθετών r_1 και r_2. Αν το r είναι πραγματικό θετικό, τότε το $x^r \to 0$ καθώς το $x \to 0$ από τα δεξιά. Ενώ, αν το r είναι πραγματικό αρνητικό, τότε το x^r γίνεται μη φραγμένο.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0$
<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1.$

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-1}, x > 0.$
Παρατηρούμε ότι η λύση x^{-1} καθίσταται μη φραγμένη για $x \to 0$.



Σχ. 1

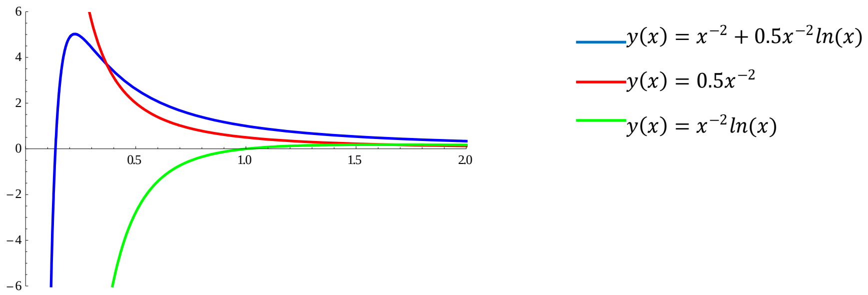
β) Αν $r_1 = r_2$, τότε μία λύση της ΔΕ (5) είναι $y_1(x) = x^{r_1}$. Με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης μπορούμε να προσδιορίσουμε το δεύτερο μέλος του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (5), $y_2(x) = x^{r_1} lnx,\ x > 0.$
Ένας διαφορετικός τρόπος να προσδιορίσουμε την 2η λύση είναι ο εξής:
Το αριστερό μέλος της ΔΕ (5) με την βοήθεια του διαφορικού τελεστή:
$L = x^2D^2 + xp_oD + q_o$ γράφεται $L[y(x)]$.
Αν θεωρήσουμε ότι $y(x) = x^r$ τότε έχουμε $L[x^r] = f(r)x^r = (r - r_1)^2 x^r$, στην περίπτωση που $r_1 = r_2$.
Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς r έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = L\left[\frac{\partial x^r}{\partial r}\right] = L\left[\frac{\partial e^{rlnx}}{\partial r}\right] = L[x^r lnx] = 2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r lnx \qquad (8)$$

Η σχέση (8) για $r = r_1$ μας δίνει ότι $L[x^{r_1} lnx] = 0$, άρα μία δεύτερη λύση της (5) είναι η $y_2(x) = x^{r_1} lnx$.
Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} lnx, \quad x > 0$ (9)
Καθώς το $x \to 0$ (στο ιδιάζον σημείο), μία λύση της μορφής $x^{r_1} lnx$ τείνει στο μηδέν αν το $r_1 > 0$, ενώ γίνεται μη φραγμένη αν $r_1 \leq 0$.

<u>Παράδειγμα 2:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0,\ x > 0.$

<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) + 5r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2\ = -2.$
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}lnx, \quad x > 0.$
Και οι δύο λύσεις της ΔΕ είναι μη φραγμένες για $x \to 0.$



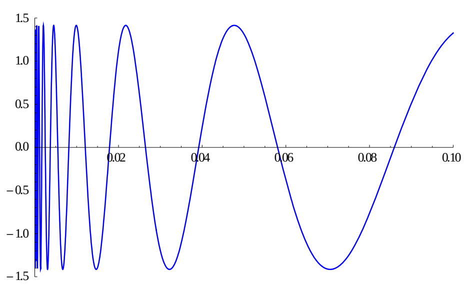
Σχ. 2

γ) Αν $r_{1,2} = \kappa \pm i\mu$ τότε μία μιγαδική λύση της ΔΕ (5) είναι η

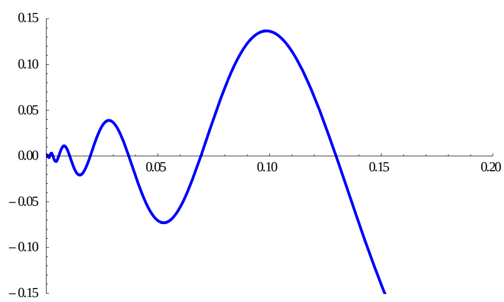
$$\tilde{y}_1(x) = x^{\kappa+i\mu}\ = x^{\kappa}x^{i\mu}\ = x^{\kappa}e^{i\mu lnx}\ = x^{\kappa}(cos(\mu lnx) + isin(\mu lnx)) \qquad (10)$$

Επομένως, έχουμε δύο πραγματικές λύσεις της ΔΕ, οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τις $y_1(x) = x^{\kappa}cos(\mu lnx)$ και $y_2(x) = x^{\kappa}sin(\mu lnx)$.
Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = x^{\kappa}\{c_1cos(\mu lnx) + c_2sin(\mu lnx)\}, \quad x > 0. \qquad (11)$

<u>Παράδειγμα 3:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2y'' + xy' + y = 0,\ x > 0.$
<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) + r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i.$
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1cos(lnx) + c_2sin(lnx), \quad x > 0,$
που παριστάνει μία ταλάντωση σταθερού πλάτους (εφόσον δεν υπάρχει ο όρος x^{κ}) με συχνότητα η οποία αυξάνεται καθώς το $x \to 0$. (Σχ.3)



Σχ. 3



Σχ. 4

<u>Παράδειγμα 4:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2y'' - xy' + 26y = 0,\ x > 0.$
<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) - r + 26 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 5i.$
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = x[c_1cos(5lnx) + c_2sin(5lnx)], \quad x > 0,$
που είναι μια συνάρτηση η οποία τείνει στο μηδέν (εφόσον το $\kappa > 0$) και ταλαντώνεται ολοένα ταχύτερα καθώς το $x \to 0$. (Σχ. 4)

Μπορούμε να λάβουμε πραγματικές λύσεις της εξίσωσης Euler στο διάστημα $x < 0$ κάνοντας την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών. Έστω ότι $x = -\xi$, όπου $\xi > 0$ και $y(x) = u(\xi)$. Για τις παραγώγους της συνάρτησης $y(x)$ έχουμε

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}$

Οπότε η ΔΕ (4) για $x < 0$ παίρνει τη μορφή:

$\xi^2 u'' - \xi p_o(-u') + q_o u = 0 \Rightarrow$

$$\xi^2 u'' + \xi p_o u' + q_o u = 0, \;\; \xi > 0 \tag{12}$$

που είναι της ίδιας μορφής με την (5).

Από τις εξισώσεις (7), (9), και (11) έχουμε

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2}, \alpha\nu\, r_1 \neq r_2,\; r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_1} lnx, \quad \alpha\nu\, r_1 = r_2 \\ \xi^{\kappa}\{c_1 cos(\mu ln\xi) + c_2 sin(\mu ln\xi)\},\; \alpha\nu\;\; r_{1,2} = \kappa \pm i\mu \end{cases} \quad \gamma\iota\alpha\; \xi > 0 \tag{13}$$

Για να λάβουμε το u σαν συνάρτηση του x αντικαθιστούμε στις εξισώσεις (13) το ξ με το $(-x)$.

Μπορούμε να γράψουμε τα αποτελέσματα για $x > 0$ και για $x < 0$ με ενιαίο τρόπο ως ακολούθως:

$$y(x) = \begin{cases} c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}, \;\; \alpha\nu\, r_1 \neq r_2,\; r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_1} ln|x|, \;\; \alpha\nu\, r_1 \neq r_2 \\ |x|^{\kappa}\{c_1 cos(\mu ln|x|) + c_2 sin(\mu ln|x|)\},\;\; r_{1,2} = \kappa \pm i\mu \end{cases} \quad |x| \neq 0 \tag{14}$$

Ένας διαφορετικός τρόπος επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης Euler βασίζεται στην αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής $x = e^t \Rightarrow t = lnx, x > 0$. [Αν $x < 0$ τότε θέτουμε $-x = e^t \Rightarrow t = \ln(-x)$].

Αν $y(x) = u(t)$, τότε έχουμε

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{du}{dt}e^{-t}$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\right)e^{-2t}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5) προκύπτει

$$e^{2t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\right)e^{-2t} + e^t p_o \frac{du}{dt}e^{-t} + q_o u = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (p_o - 1)\frac{du}{dt} + q_o u = 0 \tag{15}$$

Που είναι μία ΔΕ ως προς $u(t)$ με σταθερούς συντελεστές και η οποία δέχεται λύσεις της μορφής $u(t) = e^{\lambda t}$. Η ΧΕ της (15) είναι $\lambda^2 + (p_o - 1)\lambda + q_o = 0$ η οποία είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση δεικτών.

Οι λύσεις της (15) ανάλογα με τις ιδιοτιμές της ΔΕ (15) είναι

$$u(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},\; \alpha\nu\, \lambda_1 \neq \lambda_2,\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t},\;\; \alpha\nu\, \lambda_1 = \lambda_2 \\ e^{kt}\{c_1 cos(\mu t) + c_2 sin(\mu t)\}, \quad \alpha\nu\;\; \lambda_{1,2} = \kappa \pm i\mu \end{cases} \tag{16}$$

Στις εξισώσεις (16) αν θέσουμε όπου $t = lnx$, θα πάρουμε τις λύσεις (7), (9) και (11) αντίστοιχα για τις τρείς περιπτώσεις, (α), (β) και (γ).

<u>Παράδειγμα 5:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ:

$x^2y'' - 3xy' + 4y = sin(2lnx) + \frac{x^2}{(lnx)^2},\ x > 0.$

<u>Επίλυση:</u> Η ΔΕ είναι μία μη ομογενής εξίσωση Euler. Η γενική λύση της θα είναι $y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = y_{γεν}^{ομ}(x) + y_{ειδ}(x)$.

<u>1^{ος} τρόπος επίλυσης</u>: Για την ομογενή θεωρούμε λύσεις της μορφής x^r και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την εξίσωση δεικτών:

$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$ οι εκθέτες ιδιομορφίας

Άρα η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_{γεν}^{ομ}(x) = c_1x^2 + c_2x^2lnx \qquad (17)$$

Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης θα πρέπει να εργαστούμε με την μέθοδο Lagrange διότι η ΔΕ έχει μεταβλητούς συντελεστές.

$$y_{ειδ}(x) = u_1(x)x^2 + u_2(x)x^2lnx \qquad (18)$$

Η ορίζουσα Wronski των λύσεων της ομογενούς είναι $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2lnx \\ 2x & 2xlnx + x \end{vmatrix} = x^3$

Οι συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$ θα προσδιορισθούν από τα ολοκληρώματα:

$$u_1(x) = -\int \frac{x^2lnx}{x^3}\left(\frac{sin(2lnx)}{x^2} + \frac{1}{(lnx)^2}\right)dx = -\int \frac{lnx\ sin(2lnx)}{x^3}dx - \int \frac{1}{xlnx}dx \qquad (19)$$

$$u_2(x) = \int \frac{x^2}{x^3}\left(\frac{sin(2lnx)}{x^2} + \frac{1}{(lnx)^2}\right)dx = \int \frac{sin(2lnx)}{x^3}dx + \int \frac{1}{x(lnx)^2}dx \qquad (20)$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (19) και (20) είναι αρκετά πολύπλοκος.

<u>2^{ος} τρόπος επίλυσης</u>: Θέτοντας $x = e^t$ και $y(x) = u(t)$, η ΔΕ μετασχηματίζεται σε μία μη ομογενή ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 4u = sin2t + \frac{e^{2t}}{t^2} \qquad (21)$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι: $u_{γεν}^{ομ}(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. (22)

Η ορίζουσα Wronski για τις λύσεις e^{2t} και te^{2t} είναι: $W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}$

Η ειδική λύση της μη ομογενούς για το μη ομογενή όρο $sin2t$ μπορεί να προσδιορισθεί με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, ενώ για το μη ομογενή όρο $\frac{e^{2t}}{t^2}$ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Lagrange.

Επομένως η μορφή της ειδικής λύσης είναι:

$u_{ειδ}(t) = u_{ειδ\,1}(t) + u_{ειδ\,2}(t) = A\,cos(2t) + Bsin(2t) + u_1(t)e^{2t} + u_2(t)te^{2t}$. (23)

Για την $u_{ειδ\,1}(t) = A\,cos(2t) + Bsin(2t)$ οι συντελεστές A, B προσδιορίζονται αντικαθιστώντας αυτήν στη ΔΕ: $\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 4u = sin2t$, οπότε προκύπτει $A = 1/8$ και $B = 0$. Άρα $u_{ειδ\,1}(t) = \frac{1}{8}\cos(2t)$. (24)

Για την $u_{ειδ\,2}(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)te^{2t}$, οι συναρτήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ προσδιορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$u_1(t) = -\int \frac{te^{2t}}{e^{4t}}\frac{e^{2t}}{t^2}dt = -\int \frac{1}{t}\,dt = -lnt$$

$$u_2(t) = \int \frac{e^{2t}}{e^{4t}}\frac{e^{2t}}{t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$$

Άρα $u_{ειδ\,2}(t) = -e^{2t}lnt - \frac{1}{t}te^{2t} = -e^{2t}lnt - e^{2t}$. (25)

Επομένως, από τις σχέσεις (22), (24), και (25) έχουμε

$$u_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{8} cos(2t) - e^{2t} lnt, \tag{26}$$

όπου ο όρος $-e^{2t}$ στην εξίσωση (25) έχει απορροφηθεί στη λύση της ομογενούς.
Από την εξίσωση (26), θέτοντας όπου $t = lnx$ έχουμε την λύση της αρχικής εξίσωσης

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 lnx + \frac{1}{8} cos(2lnx) - x^2 ln(lnx). \tag{27}$$