2Β. Λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς στη περιοχή κανονικού ιδιάζοντος σημείου

Μετά από την μελέτη της ΔΕ Euler θα μελετήσουμε το γενικότερο πρόβλημα της επίλυσης της ΔΕ:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

στη περιοχή ενός σημείου x_o το οποίο είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ.
Όταν το σημείο x_o είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ (1), τότε μπορούμε να 'αναζητήσουμε' μία γενίκευση της μεθόδου των δυναμοσειρών χωρίς να αλλάξουμε το κέντρο ανάπτυξης αυτών, έτσι ώστε να την εφαρμόσουμε στη περιοχή του ΚΙΣ.
Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι το ΚΙΣ είναι το $x_o = 0$.
Αν το $x_o \neq 0$, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε μία άλλη θέτοντας $x - x_o = t$.
Εφόσον το $x_o = 0$ είναι ΚΙΣ έπεται ότι οι συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, άρα έχουν ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το μηδέν. Έστω ότι
$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n$ για $|x| < \rho_1$ [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $p_o = \lim_{x\to 0} xp(x)$]
$x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n\, x^n$ για $|x| < \rho_2$. [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $q_o = \lim_{x\to 0} x^2q(x)$]

Προκειμένου να εμφανίσουμε τους όρους $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε την ΔΕ (1) με x^2, οπότε προκύπτει η

$$x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y = 0 \quad (2)$$

$$x^2y'' + x(p_o + p_1x + \cdots)y' + (q_o + q_1x + \cdots)y = 0 \quad (3)$$

Στη γενικότερη περίπτωση κάποιοι από τους συντελεστές p_i και q_i δεν θα είναι μηδέν.
Αν η (3) γραφεί στη μορφή

$$x^2y'' + xp_o(1 + \frac{p_1}{p_o}x + \cdots)y' + q_o(1 + \frac{q_1}{q_o}x + \cdots)y = 0$$

μπορούμε να δούμε ότι οι συντελεστές της ΔΕ (3) μπορούν να θεωρηθούν ως γινόμενα των συντελεστών της εξίσωσης Euler επί μία δυναμοσειρά. Φαίνεται λοιπόν εύλογο να αναζητήσουμε λύσεις της ΔΕ (2) υπό τη μορφή γινομένου 'λύσεων Euler' και δυναμοσειρών. Υποθέτουμε επομένως ότι η λύσεις της ΔΕ (2) είναι

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n},\ \ x > 0 \quad (4)$$

όπου θεωρούμε ότι $a_o \neq 0$, ώστε το r να είναι ο εκθέτης του πρώτου όρου της σειράς και το a_o ο συντελεστής του.
[Για $x < 0$, κάνουμε την αντικατάσταση $x = -\xi$ με $\xi > 0$ όπως και στην εξίσωση Euler]

Για την επίλυση της ΔΕ (2) θα πρέπει να προσδιορίσουμε:

(i) τις τιμές του εκθέτη r για τις οποίες η ΔΕ (2) έχει λύσεις της μορφής (4)
(ii) την αναδρομική σχέση για τους συντελεστές a_n
(iii) την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση της μορφής (4) και εστιάζουμε στον τρόπο υπολογισμού της.
Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση (4) και έχουμε:
$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ \ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (3), οπότε έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n\, x^n\right) = 0.$$

Κάνοντας χρήση του γινομένου Cauchy:
$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k})x^n$, βρίσκουμε

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n}(r+k)a_k p_{n-k}\}x^{r+k+n-k} +$
$\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\}x^{r+k+n-k} = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{n}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]x^{r+n} = 0.$

Στα δύο αθροίσματα βγάζουμε τους όρους για $n = 0$ (στο 2° άθροισμα όταν $n = 0 \Rightarrow k = 0$),

$\underline{r(r-1)a_o x^r} + \sum_{n=1}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \underline{(rp_o + q_o)a_o x^r} +$
$\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{k=0}^{n}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-1) + rp_o + q_o\}a_o x^r +$
$\sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)(r+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]\, x^{r+n} = 0.$

Θέτουμε $r(r-1) + rp_o + q_o = f(r)$, και στο άθροισμα με δείκτη το k υπολογίζουμε το όρο για $k = n$,

$f(r)a_o x^r +$

$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(r+n)(r+n-1)a_n + \underline{\big((r+n)p_o + q_o\big)a_n} + \sum_{k=0}^{n-1}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k\Big]\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$$

όπου $f(r+n) = (r+n)(r+n-1) + (r+n)p_o + q_o$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, \qquad a_o \text{ αυθαίρετο} \qquad (5)$$
$$f(r+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k\,,\ n \geq 1 \qquad (6)$$

όπου $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = 0$ είναι η εξίσωση δεικτών της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας r_1, r_2. Οι εκθέτες ιδιομορφίας καθορίζουν την συμπεριφορά των λύσεων στη περιοχή του ιδιάζοντος σημείου. Οι συντελεστές p_o, q_o είναι οι πρώτοι όροι των σειρών για τις συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2 q(x)$ αντίστοιχα,
[$p_o = \lim_{x\to 0} xp(x)$ και $q_o = \lim_{x\to 0} x^2 q(x)$].
Η σχέση (6) είναι η αναδρομική σχέση η οποία θα εφαρμοστεί για $r = r_1$ και $r = r_2$ για τον προσδιορισμό των συντελεστών $a_n(r_1)$ και $a_n(r_2)$ συναρτήσει των προηγούμενων συντελεστών $a_i, i = 0,1, \dots n-1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η μόνη κοινή εξασφάλιση για όλες τις περιπτώσεις της μορφής των δεικτών, είναι η δυνατότητα να λυθεί ακριβώς μία φορά το αναδρομικό σχήμα και να προσδιορισθεί ακριβώς μία λύση της μορφής: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ (4).
Αυτό είναι σαφές στην περίπτωση που η δείκτρια εξίσωση έχει διπλή ρίζα, τότε μία φορά μπορούμε να εφαρμόσουμε την σχέση (6) και επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε μία λύση της μορφής (4).
Όταν έχουμε δύο πραγματικές ρίζες r_1 και r_2, έστω $r_1 > r_2$, των οποίων η διαφορά είναι μη ακέραιος αριθμός τότε είμαστε σίγουροι ότι η αναδρομική σχέση θα είναι παραγωγική και για τους δύο εκθέτες ιδιομορφίας διότι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας κάθε νέου συντελεστή a_n δεν πρόκειται ποτέ να μηδενισθεί επιτρέποντας τον προσδιορισμό του συνοδεύοντος συντελεστή για κάθε $n \geq 1$. Δηλαδή $f(r_1 + n) \neq 0,\ \forall n \geq 1$ και

$f(r_2+n) \neq 0, \forall n \geq 1$ (διότι αν $f(r_2+n)=0 \Rightarrow r_2+n=r_1 \Rightarrow r_1-r_2=n$).
Αντιθέτως, όταν η διαφορά δεικτών r_1-r_2 είναι φυσικός αριθμός $l \in N$, τότε η αναδρομική διαδικασία είναι εξασφαλισμένη για το μεγαλύτερο δείκτη r_1, αλλά αμφισβητούμενη για τον μικρότερο δείκτη. Αυτό συμβαίνει διότι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $f(r_2+n)$ θα μηδενισθεί όταν το βήμα n θα εξισωθεί με το φυσικό αριθμό l και τότε θα έχουμε να διαπραγματευθούμε την εξίσωση $0 \cdot a_l = \cdots$. Μόνο αν το δεύτερο μέλος είναι συμπτωματικά μηδενικό τότε καταλήγουμε σε ένα αόριστο σχήμα που μπορεί να βγει από το αδιέξοδο. Διαφορετικά καταλήγουμε σε αδύνατη σχέση που ακυρώνει την προσπάθεια μας να εφαρμόσουμε την τεχνική για δεύτερη φορά. Επομένως, στην περίπτωση που $r_1-r_2=l \in \mathbb{Z}^+$, το πρόβλημα είναι πιο σύνθετο, όσον αφορά την κατασκευή της 2ης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης. Η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού οφείλεται στην ***θεωρία Frobenious***, η οποία είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη.
Τα παραπάνω, όπως και τον τρόπο να παρακάμπτουμε την ενδεχόμενη αδυναμία να βρούμε δύο λύσεις της μορφής (4), μπορούμε να τα παρακολουθήσουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$xy''+(x^2-3)y'-2xy=0, \qquad 0<x<L \tag{1.1}$$

όπου $L>0$.

Επίλυση: Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x)=\frac{(x^2-3)}{x}$ και $q(x)=-2$. Η συνάρτηση $p(x)$ δεν ορίζεται στο $x_o=0$, άρα δεν είναι αναλυτική στο μηδέν. Επομένως το σημείο $x_o=0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Όμως οι συναρτήσεις $xp(x)=(x^2-3)$ και $x^2q(x)=-2x^2$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, άρα το σημείο $x_o=0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Επιπλέον,

$\lim_{x\to 0} xp(x)=-3=p_o$ και $\lim_{x\to 0} x^2q(x)=0=q_o$.

Θα αναζητήσουμε λύσεις της ΔΕ της μορφής: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ με $a_o \neq 0$. Ο σκοπός είναι να βρεθούν οι τιμές $r_i, i=1,2$ -οι εκθέτες ιδιομορφίας- και οι αντίστοιχοι συντελεστές $a_n(r_i)$, έτσι ώστε να οδηγηθούμε στον προσδιορισμό δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ΔΕ: $y_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_i)\, x^{r_i+n}$. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο προσδιορισμός των p_o και q_o μας δίνει την δυνατότητα να βρούμε τους δείκτες ιδιομορφίας χωρίς να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση. Επίσης, θα πρέπει να προσδιορισθεί η ακτίνα σύγκλισης των αντίστοιχων δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_i)\, x^n$.

Σημείωση: Οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών αυτών, όπως και στην περίπτωση του ομαλού σημείου, δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την ελάχιστη ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών που αναπαριστούν τις αναλυτικές συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$. Έτσι η ιδιάζουσα συμπεριφορά των λύσεων της ΔΕ στο μηδέν, αν υπάρχει, θα οφείλεται στους συντελεστές x^{r_i} με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι παραπάνω δυναμοσειρές.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ είναι πολυωνυμικές και επομένως συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $L=\infty$.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (1.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ:

$$x^2y'' + x(x^2-3)y' - 2x^2y = 0, x > 0 \qquad (1.2)$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$,
$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (1.2), οπότε έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+2} -$

$3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0.$

Στον δεύτερο και στον τελευταίο όρο της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη ($n+2=n' \Rightarrow n=n'-2$) και μετονομάζοντας $n'=n$ προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty}(r+n-2)a_{n-2}\, x^{r+n} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} -$
$2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0.$

Για το 1$^{\text{ο}}$ και 3$^{\text{ο}}$ άθροισμα υπολογίζουμε τους όρους για $n=0$ και $n=1$, οπότε έχουμε:

$\{r(r-1)-3r\}a_o x^r + \{(r+1)r - 3(r+1)\}a_1 x^{r+1}\ +$
$\sum_{n=2}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1) - 3(r+n)\}a_n + \{(r+n-2)-2\}a_{n-2}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$r(r-4)a_o x^r\ + (r+1)(r+1-4)a_1 x^{r+1}\ +$
$\sum_{n=2}^{\infty}[(r+n)(r+n-4)a_n + (r+n-4)a_{n-2}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$f(r)a_o x^r\ + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + (r+n-4)a_{n-2}]x^{r+n} = 0,$ (1.3)
όπου $f(r) = r(r-4)$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \qquad (1.4)$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \qquad (1.5)$$

$$f(r+n)a_n + (r+n-4)a_{n-2} = 0, n = 2,3,\ldots \qquad (1.6)$$

Η σχέση (1.4) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 0. \qquad (1.7)$$

Παρατήρηση 1.1: Έχοντας προσδιορίσει τα $p_o = -3, q_o = 0$ η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler: $x^2y'' - 3y' = 0$, είναι η $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) - 3r = r(r-4)$, δηλαδή ακριβώς η ίδια με την εξίσωση (1.7).

Από την σχέση (1.5) για $r = r_1 = 4$, και για $r = r_2 = 0$ έχουμε ότι

$$f(5)a_1 = 0 \Rightarrow a_1(r_1) = 0 \qquad (1.8)$$

$$f(1)a_1 = 0 \Rightarrow a_1(r_2) = 0 \qquad (1.9)$$

Η σχέση (1.5) είναι το αναδρομικό σχήμα το οποίο θα εφαρμόσουμε για κάθε δείκτη r_i με σκοπό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές $a_n(r_i)$.

(i) Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = 4$. Από την σχέση (1.8) έπεται ότι $a_1 = 0$ διότι η $f(r)$ μηδενίζεται μόνο για $r = 4$ και $r = 0$.

Η σχέση (1.6): $f(r+n)a_n + (r+n-4)a_{n-2} = 0, n = 2,3, \dots$ για $r_1 = 4$ γίνεται:

$$(r_1+n)(r_1+n-4)a_n = -(r_1+n-4)a_{n-2}, n \geq 2$$

$$(4+n)na_n = -na_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+4)}, n \geq 2 \qquad (1.10)$$

Η αναδρομική σχέση (1.10) είναι με βήμα 2, επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (1.10) όπου $n = 2k$ έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2(k+2)}, k \geq 1$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_o}{2\cdot 3} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2\cdot 4} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2(n+2)} \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{2(-1)^n a_o}{2^n (n+2)!} \quad , \quad n \geq 1.$

Για $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = x^4 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n}}{2^n (n+2)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n (n+2)!} = 2\cdot 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)!} =$$

$$= 8\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{(n)!} = 8\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right\}, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1.11)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Για $z = -\frac{x^2}{2}$, $e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2^n n!} = 1 - \frac{x^2}{2\,1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2^n n!}$,

θέτοντας $n = n' + 2$, έχουμε,

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^{n'+2}}{2^{n'+2}(n'+2)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+4}}{2^{n+2}(n+2)!} = 1 - \frac{x^2}{2} +$
$\frac{1}{2^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n (n+2)!} \Rightarrow 8\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n (n+2)!}$.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση, $r_2 = 0$. Από την σχέση (1.9) έχουμε ότι $a_1 = 0$.

Η σχέση (1.6) για $r_2 = 0$ γίνεται:

$$(r_2+n)(r_2+n-4)a_n = -(r_2+n-4)a_{n-2}, n \geq 2$$

$$n(n-4)a_n = -(n-4)a_{n-2}, n \geq 2 \qquad (1.12)$$

Η αναδρομική σχέση (1.12) είναι με βήμα 2, επομένως όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (1.12) όπου $n = 2k$ έχουμε: $2k(2k-4)a_{2k} = -(2k-4)a_{2k-2}, k \geq 1$

Δεν λύνουμε ως προς τον συντελεστή με τον μεγαλύτερο δείκτη πριν να δούμε τι προκύπτει για τις τιμές του k!!!

Για $\quad k = 1, \quad -4a_2 = 2a_o \Rightarrow a_2 = -\frac{a_o}{2}$

Για $\quad k = 2, \quad 0 \cdot a_4 = 0 \cdot a_2$ αόριστη σχέση, a_4 αυθαίρετο.

Αν επιλέξουμε το $a_4 = 0$, τότε όλοι οι επόμενοι συντελεστές μηδενίζονται και επομένως μία δεύτερη λύση της ΔΕ για $a_o = 1$ είναι:

$$y_2(x) = a_o + a_2 x^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right), x \neq 0 \tag{1.14}$$

Παρατηρήσεις: (α) Το μέρος $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ της λύσης $y_1(x)$ έχει απορροφηθεί στην έκφραση $c_2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ της εξίσωσης (1.14). Η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων $y_1(x)$ και $y_2(x)$ επιβεβαιώνεται μέσα από τον μη μηδενισμό της ορίζουσας Wronski αυτών:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} & 1 - \frac{x^2}{2} \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}} & -x \end{vmatrix} = -x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0, \ x \neq 0.$$

(β) Αν θεωρήσουμε ότι το a_4 είναι αυθαίρετο τότε η $y_2(x)$ θα εμπεριείχε ένα πολλαπλάσιο της $y_1(x)$. Δηλαδή η $y_2(x) = a_o\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + a_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n (n+2)!}$, με a_o, a_4 αυθαίρετες σταθερές, που είναι η γενική λύση της ΔΕ.

(γ) Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από το μικρότερο δείκτη $r_2 = 0$, και έχοντας προσδιορίσει τη λύση $y_2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, να εφαρμόσουμε τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης για να προσδιορίσουμε το άλλο μέλος του θεμελιώδους συνόλου λύσεων, δηλαδή την $y_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. (Μπορείτε να το επιχειρήσετε).

<u>**Παράδειγμα 2**</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0, \ 0 < x < L \tag{2.1}$$

για κάποιο $L > 0$.

<u>Επίλυση:</u> Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x) = \frac{-3}{x(1-x)}$ και $q(x) = \frac{2}{x(1-x)}$. Οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ δεν ορίζονται στο $x_o = 0$, άρα δεν είναι αναλυτικές στο μηδέν. Επομένως το σημείο $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Εξετάζουμε αν το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ:

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-3}{(1-x)} = -3 = p_o \text{ και } \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(1-x)} = 0 = q_o. \tag{2.2}$$

Από τις σχέσεις (2.2) έπεται ότι το μηδέν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ.

Η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) - 3r = r(r-4) \Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 0$ είναι οι εκθέτες ιδιομορφίας.

Τα αναπτύγματα Taylor για τις αναλυτικές συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ έχουν ακτίνα σύγκλισης $\rho = 1$, δηλαδή συγκλίνουν $|x| < 1$. Επομένως οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_i)\, x^n$ που αντιστοιχούν στις λύσεις της ΔΕ: $y_i(x) = x^{r_i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_i)\, x^n$ θα έχουν ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον ίση με 1. Αναζητούμε λοιπόν μία γενική λύση η οποία θα συγκλίνει τουλάχιστον για $0 < x < 1$.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (2.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ:

$$x^2(1-x)y'' - 3xy' + 2xy = 0, \qquad (2.3)$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$

και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (2.3), οπότε έχουμε:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n+1} -$

$3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+1} = 0.$

Στον δεύτερο και στον τελευταίο όρο της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη $(n+1=n')$ και μετονομάζοντας $n' = n$ προκύπτει:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)(r+n-2)a_{n-1}\, x^{r+n} -$

$3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + \ +2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-1)-3r\}a_o x^r +$

$\sum_{n=1}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1)-3(r+n)\}a_n - \{(r+n-1)(r+n-2)-2\}a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-4)\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)(r+n-4)a_n - (r+n)(r+n-3)a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - (r+n)(r+n-3)a_{n-1}]x^{r+n} = 0, \qquad (2.4)$$

όπου $f(r) = r(r-4)$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $0 < x < L$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \qquad (2.5)$$

$$f(r+n)a_n - (r+n)(r+n-3)a_{n-1} = 0, n = 1,2,3,\ldots \qquad (2.6)$$

Η σχέση (2.5) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 0. \qquad (2.7)$$

Η σχέση (2.6) είναι το αναδρομικό σχήμα το οποίο θα εφαρμόσουμε για κάθε δείκτη r_i με σκοπό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές $a_n(r_i)$.

(i) Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = 4$. Η σχέση (2.6) για $r_1 = 4$ γίνεται:

$$(r_1+n)(r_1+n-4)a_n = (r_1+n)(r_1+n-3)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$(4+n)na_n = (4+n)(n+1)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{(n+1)}{n}a_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Για } n=1 & a_1 = \frac{2}{1}a_o \\ \text{Για } n=2 & a_2 = \frac{3}{2}a_1 \\ \text{Για } n=3 & a_3 = \frac{4}{3}a_2 \\ \vdots & \\ \text{Για } n=n & a_n = \frac{(n+1)}{n}a_{n-1} \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_n = \frac{(n+1)!a_o}{n!} = (n+1)a_o\ ,\ \ n \geq 1.$

Επιλέγοντας $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = x^4\,[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n] = x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\ ,\ 0 < x < L \qquad (2.8)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, έχουμε

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)} = |x|\cdot 1 < 1$. Άρα $L = 1$.

Επομένως η λύση $y_1(x)$ συγκλίνει για $0 < x < 1$.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση $r_2 = 0$. Η αναδρομική σχέση (2.6) για $r_2 = 0$ γίνεται:

$$(r_2 + n)(r_2 + n - 4)a_n = (r_2 + n)(r_2 + n - 3)a_{n-1}, n = 1,2,3 \ldots$$
$$n(n-4)a_n = n(n-3)a_{n-1}, n = 1,2,3 \ldots$$
$$(n-4)a_n = (n-3)a_{n-1}, n = 1,2,3 \ldots$$

Για $n = 1$ $\quad (-3)a_1 = (-2)a_o \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}a_o$

Για $n = 2$ $\quad (-2)a_2 = (-1)a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{3}a_0$

Για $n = 3$ $\quad (-1)a_3 = 0\cdot a_2 \Rightarrow a_3 = 0$

Για $n = 4$ $\quad 0\cdot a_4 = a_3 = 0 \Rightarrow a_4$ αυθαίρετο

Επιλέγοντας το a_4 να είναι ίσο με το μηδέν, προκύπτει από το αναγωγικό σχήμα ότι όλοι οι συντελεστές $a_n,\ n \geq 4$ είναι μηδενικοί. Επομένως, για $a_o = 3$ η δεύτερη λύση είναι:

$$y_2(x) = 3 + 2x + x^2 \qquad (2.9)$$

Η (2.9) ως πολυωνυμική συνάρτηση συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+4} + c_2(3 + 2x + x^2), \quad 0 < x < 1 \qquad (2.10)$$

Σημείωση: Τα παραπάνω μπορεί να αποδειχθούν με παρόμοιο τρόπο και για το διάστημα $-1 < x < 0$. Επομένως το διάστημα σύγκλισης της λύσης-σειράς γύρω από το κανονικό ιδιάζον σημείο 0 καθορίζεται από το διάστημα $0 < |x| < 1$.

Παρατήρηση 2.1: Γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ |x| < 1$,

αν πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω σχέση με x και μετά την παραγωγίσουμε, θα έχουμε

$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1},\ \ |x| < 1$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ \ |x| < 1$

$\frac{x^4}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+4},\ \ |x| < 1$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η λύση $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+4} = \frac{x^4}{(1-x)^2}, |x| < 1$.

Επομένως η συνάρτηση $\tilde{y}_1(x) = \frac{x^4}{(1-x)^2}$ αποτελεί λύση της ΔΕ η οποία επεκτείνεται και έξω από το διάστημα $|x| < 1$, συγκεκριμένα αποτελεί λύση της ΔΕ για $x \neq 1$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1\frac{x^4}{(1-x)^2} + c_2(3 + 2x + x^2), \quad x \neq 0{,}1.$$

Παράδειγμα 3: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$xy'' - (x+2)y' + 3y = 0,\ 0 < x < L, \qquad (3.1)$$

όπου $L > 0$.

Επίλυση: Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x) = \frac{-(x+2)}{x}$ και $q(x) = \frac{2}{x}$. Οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ δεν είναι αναλυτικές στο $x_o = 0$. Επομένως το σημείο $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Εξετάζουμε αν το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ:

$$\lim_{x\to 0}xp(x) = \lim_{x\to 0}(-x-2) = -2 = p_o \text{ και } \lim_{x\to 0}x^2q(x) = \lim_{x\to 0}2x = 0 = q_o. \quad (3.2)$$

Από τις σχέσεις (3.2) έπεται ότι το μηδέν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Οι συναρτήσεις $xp(x), x^2q(x)$ ως πολυωνυμικές συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως $L = \infty$.
Η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) - 2r = 0 \Rightarrow r(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 0$ είναι οι εκθέτες ιδιομορφίας.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (3.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ

$$x^2y'' - x(x+2)y' + 3xy = 0 \tag{3.3}$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$
$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (3.3), οπότε έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+1} = 0.$

Στον δεύτερο και στον τελευταίο όρο της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη $(n+1 = n')$ και μετονομάζοντας $n' = n$ προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}\, x^{r+n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-1) - 2r\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1) - 2(r+n)\}a_n - \{(r+n-1) - 3\}a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-3)\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)(r+n-3)a_n - (r+n-4)a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - (r+n-4)a_{n-1}]x^{r+n} = 0,\ x > 0. \tag{3.4}$$

όπου $f(r) = r(r-3)$.
Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \tag{3.5}$$

$$f(r+n)a_n - (r+n-4)a_{n-1} = 0, n = 1,2,3,\ldots \tag{3.6}$$

Η σχέση (3.5) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 0. \tag{3.7}$$

Η σχέση (3.6) είναι το αναδρομικό σχήμα το οποίο θα εφαρμόσουμε για κάθε δείκτη r_i με σκοπό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές $a_n(r_i)$.
(i) Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = 3$. Η σχέση (3.6) για $r_1 = 3$ γίνεται:

$$(r_1+n)(r_1+n-3)a_n = (r_1+n-4)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$(3+n)na_n = (n-1)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{(n-1)}{n(n+3)}a_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Για $n = 1, a_1 = 0 \cdot a_o = 0$. Επομένως, όλοι οι συντελεστές είναι μηδενικοί εκτός από το a_o. Επιλέγοντας $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = x^3, x \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση $r_2 = 0$. Η αναδρομική σχέση (3.6) για $r_2 = 0$ γίνεται:

$$(r_2 + n)(r_2 + n - 3)a_n = (r_2 + n - 4)a_{n-1}, n = 1,2,3 \dots$$

$$n(n-3)a_n = (n-4)a_{n-1}, n = 1,2,3 \dots$$

Για $n = 1$ $\quad (-2)a_1 = (-3)a_o \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}a_o$

Για $n = 2$ $\quad (-2)a_2 = (-2)a_1 \Rightarrow a_2 = a_1 = \frac{3}{2}a_0$

Για $n = 3$ $\quad 0 \cdot a_3 = (-1)a_2$ αδύνατον, διότι αν το $a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$.

Επομένως, δεν υπάρχει λύση η οποία μπορεί να γραφεί υπό μορφή δυναμοσειράς.

Για να προσδιορίσουμε την δεύτερη λύση θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του υποβιβασμού τάξης.

Εναλλακτικά, αποδεικνύεται ότι όταν η διαφορά των δεικτών $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, τότε η δεύτερη λύση είναι της μορφής:

$$y_2(x) = \alpha y_1(x) lnx + x^{r_2}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_2)x^n], \quad x > 0 \qquad (3.9)$$

όπου η σταθερά α μπορεί να είναι μηδέν. Αντικαθιστώντας τη (3.9) στη ΔΕ προσδιορίζουμε τους συντελεστές b_n αλλά και τη σταθερά α.

-Στη προκειμένη περίπτωση θα εφαρμόσουμε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης.
Υποθέτουμε ότι $y_2(x) = u(x)x^3$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (3.1), οπότε προκύπτει ότι: $u'' + \left(\frac{4}{x} - 1\right)u' = 0$. Επιλύοντας τη τελευταία ΔΕ, βρίσκουμε ότι $u' = e^x x^{-4} \Rightarrow u = \int e^x x^{-4} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-4}}{n!} dx =$
$\int (\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-4}}{n!}) dx = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2!x} + \frac{1}{3!} lnx + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)n!}$

Άρα $y_2(x) = u(x)x^3 = \frac{1}{3!}x^3 lnx - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)n!}, \ x > 0 \qquad (3.10)$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 \left(\frac{1}{3!}x^3 lnx - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)n!}\right), \ x > 0 \qquad (3.11)$$

Παράδειγμα 4: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0, \ \ 0 < x < L, \qquad (4.1)$$

όπου $L > 0$.

Επίλυση: Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x) = \frac{(1-x)}{x}$ και $q(x) = \frac{-1}{x}$. Οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ δεν είναι αναλυτικές στο $x_o = 0$. Επομένως το σημείο $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ.
Εξετάζουμε αν το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ:

$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0}(1-x) = 1 = p_o$ και $\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0 = q_o$. (4.2)

Από τις σχέσεις (4.2) έπεται ότι το μηδέν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Οι συναρτήσεις $xp(x), x^2q(x)$ ως πολυωνυμικές συναρτήσεις συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως $L = \infty$.

Η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0$ είναι οι εκθέτες ιδιομορφίας.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (4.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ:

$$x^2y'' + x(1-x)y' - xy = 0 \qquad (4.3)$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$
$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (4.3), οπότε έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+1} = 0.$

Στους δύο τελευταίους όρους της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη $(n+1=n')$ και μετονομάζοντας $n' = n$ προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=1}^{\infty}\,(r+n-1)a_{n-1}\, x^{r+n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow \{r(r-1)+r\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1)+(r+n)\}a_n - (r+n)a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow r^2 a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)^2 a_n - (r+n)a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - (r+n)a_{n-1}]x^{r+n} = 0, \qquad (4.4)$$

όπου $f(r) = r^2$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \qquad (4.5)$$

$$f(r+n)a_n - (r+n)a_{n-1} = 0, n = 1,2,3,\ldots \qquad (4.6)$$

Η σχέση (4.5) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0. \qquad (4.7)$$

Η σχέση (4.6) για $r_1 = 0$ γίνεται:

$$(r_1+n)^2 a_n = (r_1+n)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$
$$n^2 a_n = n a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$
$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Επομένως, όλοι οι συντελεστές a_n προσδιορίζονται συναρτήσει του a_o, από τη σχέση:

$$a_n = \frac{1}{n!}a_o, \qquad n = 1,2,3\ldots$$

Επιλέγοντας $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x,\ x \in \mathbb{R} \qquad (4.8)$$

Ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης μπορεί να προκύψει με υποβιβασμό τάξης, αλλά θα αναφέρουμε εδώ μία τεχνική που είναι κατ' ουσία ίδια με εκείνη που εφαρμόσαμε για να βρούμε τη δεύτερη λύση της εξίσωσης Euler όταν οι ρίζες της δείκτριας εξίσωσης είναι ίσες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y(x;r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ με r μία συνεχή μεταβλητή και βρίσκουμε τα a_n συναρτήσει του r επιλύοντας την αναδρομική σχέση (4.6) .
Οι συντελεστές $a_n(r)$ οφείλουν να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_n(r) = \frac{1}{(r+n)}a_{n-1}, n \geq 1 \qquad (4.9)$$

Από την τελευταία σχέση για $n = 1,2,3\ldots n$ έπεται

$$\left.\begin{aligned} a_1(r) &= \frac{a_o}{(r+1)} \\ a_2(r) &= \frac{a_1(r)}{(r+2)} \\ &\vdots \\ a_n(r) &= \frac{a_{n-1}(r)}{(r+n)} \end{aligned}\right\}$$

Οπότε $a_n(r) = \frac{a_o}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}, n = 1,2,3 \dots$ (4.10)

Αν επιδράσουμε με τον τελεστή, $L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x(x-1)\frac{d}{dx} - x$, επί της συνάρτησης $y(x;r)$ παίρνουμε

$L(y(x;r) = f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - (r+n)a_{n-1}]\, x^{r+n}$, με $f(r) = r^2$

Δηλαδή, $L(y(x;r) = f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)a_n - a_{n-1}]\, x^{r+n}$.

Επειδή ακριβώς οι συντελεστές $a_n(r)$ έχουν επιλεγεί να ικανοποιούν τη σχέση (4.9) προκύπτει

$$L(y(x;r) = f(r)a_o x^r, \forall x > 0$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση μερικώς ως προς r και αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι παραγωγίσεις ως προς ανεξάρτητες μεταβλητές μετατίθενται, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r}L(y(x;r) = L\left(\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right) = f'(r)a_o x^r + f(r)a_o x^r \ln x = 2ra_o x^r + r^2 a_o x^r \ln x$$

Με δεδομένο ότι για $r = r_1 = 0$ το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης μηδενίζεται, προκύπτει ότι μία δεύτερη λύση της ΔΕ είναι η

$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right|_{r=r_1=0} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^n\right)\right|_{r=r_1=0} = x^r \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^n|_{r=r_1=0} + x^r \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(r)\, x^n|_{r=r_1=0} = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n$. Άρα

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n, \quad x > 0 \qquad (4.11)$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $a_n{}'(0)$, παραγωγίζουμε τη σχέση (4.10) ως προς r οπότε

$$\frac{d}{dr}a_n(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{a_o}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}\right), n = 1,2,3 \dots$$

$$\begin{aligned} a_n{}'(r) &= -a_o\left[\frac{(r+2)(r+3)\dots(r+n) + \cdots + (r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}{(r+1)^2(r+2)^2\dots(r+n)^2}\right] \\ &= -a_o\left[\frac{1}{(r+1)^2(r+2)\dots(r+n)} + \cdots + \frac{1}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)^2}\right] \\ &= \frac{-a_o}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}\left[\frac{1}{(r+1)} + \cdots + \frac{1}{(r+n)}\right] \\ &= -a_n(r)\left[\frac{1}{(r+1)} + \cdots + \frac{1}{(r+n)}\right] \end{aligned}$$

Για $r = 0$ έχουμε

$$a_n{}'(0) = -a_n(0)\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = -\frac{a_o}{n!}H_n$$

όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Θέτοντας $a_o = 1$, η δεύτερη λύση της εξίσωσης είναι:

$$y_2(x) = e^x \ln x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n\, x^n, \quad x > 0 \qquad (4.12)$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι : $y(x) = c_1 e^x + c_2 \left(e^x lnx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n\, x^n\right), x > 0$ (4.13)

Παρατήρηση 4.1:Μπορείτε να εφαρμόσετε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης και να διαπιστώσετε ότι η δεύτερη λύση δίνεται από τη σχέση (4.12).

5. Εξίσωση Bessel τάξης *p*

Θα μελετήσουμε την εξίσωση Bessel τάξης p:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0 \tag{5.1}$$

για διάφορές τιμές της παραμέτρου p. Είναι μία εξίσωση που ανακύπτει σε πολλά προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής όπως στη μελέτη δυναμικών φαινομένων με χαρακτήρα ταλάντωσης – σε δομές περιγραφόμενες από την κυλινδρική γεωμετρία, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή αφορά την πολική απόσταση.

Προφανώς κάθε ΔΕ Bessel έχει το σημείο $x_o = 0$ ως κανονικό ιδιάζον σημείο και $\lim_{x\to 0} xp(x) = 1 = p_o$, $\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 - p^2) = -p^2 = q_o$.

Η δείκτρια εξίσωση είναι $f(r) = r^2 - p^2 = 0$ και επομένως οι δείκτες ιδιομορφίας είναι $r_1 = p, r_2 = -p$.

Όταν $r_1 - r_2 = 2p \notin \mathbb{Z}^+$ τότε υπάρχει μία δεύτερη λύση γραμμικά ανεξάρτητη που αντιστοιχεί στη ρίζα $r_2 = -p$.

Όταν $r_1 - r_2 = 2p \in \mathbb{Z}^+$ τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $p = m + \frac{1}{2}, m = 0,1,2 \ldots$

Στην περίπτωση αυτή, βρίσκουμε πάλι μία δεύτερη λύση γραμμικά ανεξάρτητη της πρώτης της μορφής: $y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

(ii) $p = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία δεύτερη λύση , γραμμικά ανεξάρτητη της πρώτης της μορφής:

$$y_2(x) = \alpha y_1(x) lnx + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k$$

<u>**Εξίσωση Bessel τάξης ½**</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, x > 0 \tag{5.2}$$

<u>Επίλυση</u>: Για τη ΔΕ (5.2) ισχύει:

$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xp(x) = 1 = p_o$

$q(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \Rightarrow x^2 q(x) = x^2 - \frac{1}{4} \to -\frac{1}{4} = q_o$, καθώς το $x \to 0$.

Επομένως, η δείκτρια εξίσωση είναι: $f(r) = 0 \Rightarrow r(r-1) + rp_o + q_o = 0 \Rightarrow$ $r(r-1) + r - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(r + \frac{1}{2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0$, με ρίζες τους δείκτες $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$.

Η διαφορά δεικτών είναι ακέραιος και αυτό μας προειδοποιεί για προσεκτική αντιμετώπιση του μικρότερου δείκτη. Όμως $p = \frac{1}{2}$, οπότε είναι η περίπτωση (i).

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ τη συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ έχουμε:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} +$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0.$

Κάνοντας την μετατόπιση του δείκτη στον τελευταίο όρο προκύπτει:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} +$
$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow \left\{r(r-1) + r - \frac{1}{4}\right\} a_o x^r + \left\{(r+1)r + (r+1) - \frac{1}{4}\right\} a_1 x^{r+1} +$
$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left\{(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4}\right\} a_n + a_{n-2}\right] x^{r+n} = 0,$

η οποία γράφεται

$f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0,$

όπου $f(r) = \left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right)$.

Επομένως,

$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0 \;\; (a_o \neq 0)$ (5.3)

$f(r+1)a_1 = 0$ (5.4)

Η αναδρομική σχέση: $f(r+n)a_n + a_{n-2} = 0,\; n \geq 2$ (5.5)

Η σχέση (5.3) προσδιορίζει τους εκθέτες ιδιομορφίας $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$.

(i) Ας εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = \frac{1}{2}$. Από την σχέση (5.4) έχουμε ότι $a_1 = 0$.

Η σχέση (5.5) για $r_1 = \frac{1}{2}$ γίνεται:

$$\left(r_1 + n + \frac{1}{2}\right)\left(r_1 + n - \frac{1}{2}\right) a_n = -a_{n-2}, n \geq 2$$

$(n+1)na_n = -a_{n-2}, n \geq 2$ (αναδρομική σχέση με βήμα 2). (5.6)

Επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (5.6) όπου $n = 2k$ έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+1)}, k \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -\frac{a_o}{2\cdot 3} \\ a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 5} \\ \vdots \\ a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+1)} \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{(2n+1)!}$, $n \geq 1.$

Η πρώτη λύση $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου είναι η συνάρτηση

$y_1(x) = a_o x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\right] = a_o x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = a_o x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$

$y_1(x) = a_o \frac{sinx}{\sqrt{x}}, x > 0$ (5.7)

Επιλέγοντας $a_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, η λύση $y_1(x)$ συμβολίζεται με $J_{1/2}(x)$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, sinx$$

και ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel πρώτου είδους ½ τάξης.***

Παρατηρούμε ότι $J_{1/2}(x) \to 0$, καθώς το $x \to 0$.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση: $r_2 = -\frac{1}{2}$, η αναδρομική σχέση (5.5) γίνεται

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)n}, n \geq 2 \tag{5.8}$$

Από τη σχέση (5.4) παρατηρούμε ότι

$f(r_2+1)a_1 = f\left(-\frac{1}{2}+1\right)a_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)a_1 = 0 \Rightarrow 0 \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a_1$αυθαίρετο.

Έχουμε επομένως την ευχέρεια να επιλέξουμε $a_1 = 0$, γεγονός που οδηγεί στο μηδενισμό όλων των συντελεστών με περιττό δείκτη

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (5.8) όπου $n = 2k$, έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k-1)2k}, k \geq 1$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_o}{1\cdot 2} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{3\cdot 4} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{(2n-1)2n} \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{(2n)!}$, $n \geq 1.$

Η δεύτερη λύση $y_2(x)$ του θεμελιώδους συνόλου είναι η συνάρτηση

$$y_2(x) = a_o x^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] = a_o x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{cos x}{\sqrt{x}},\ x > 0 \tag{5.9}$$

η οποία για $a_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, γράφεται $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos x.$

Παρατηρούμε ότι $J_{-1/2}(x) \to \infty$ καθώς $x \to 0.$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x),\ \ x > 0 \tag{5.10}$$

<u>Παρατήρηση 5.1</u>: Είναι ενδιαφέρον ότι στο προηγούμενο παράδειγμα, στην περίπτωση (ii) $r_2 = -\frac{1}{2}$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $a_1 \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, από την αναδρομική σχέση (5.8) οι συντελεστές με περιττό δείκτη θα μας οδηγήσουν στη λύση $\frac{sin x}{\sqrt{x}}$, στην οποία οδηγηθήκαμε ούτως ή άλλως στηριζόμενη στο μεγαλύτερο δείκτη $r_1 = \frac{1}{2}$.

<u>Εξίσωση Bessel μηδενική τάξης</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0,\ \ x > 0 \tag{5.11}$$

<u>Επίλυση</u>: Για τη ΔΕ (5.11) ισχύει:

$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xp(x) = 1 = p_o,$

$q(x) = 1 \Rightarrow x^2q(x) = x^2 \to 0 = q_o$, καθώς το $x \to 0.$

Επομένως η δείκτρια εξίσωση είναι $f(r) = 0 \Rightarrow r(r-1) + rp_o + q_o = 0 \Rightarrow$

$f(r) = r(r-1) + r = 0 \Rightarrow f(r) = r^2 = 0$, με ρίζες τους δείκτες $r_1 = r_2 = 0.$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ τη συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0.$$

Κάνοντας την μετατόπιση στον τελευταίο όρο προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$
$r^2 a_o x^r + (r+1)^2 a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[(r+n)^2 a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0.$
Η τελευταία γράφεται
$f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0.$
Επομένως,

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \ \ (a_o \neq 0) \qquad (5.12)$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \Rightarrow \quad (r+1)^2 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \qquad (5.13)$$

και η αναδρομική σχέση: $f(r+n)a_n + a_{n-2} = 0,\ n \geq 2$

$$(r+n)^2 a_n = -a_{n-2}, n \geq 2 \qquad (5.14)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη (5.14) το $r = 0$ και επικεντρωθούμε στους συντελεστές με άρτιο δείκτη θα έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k^2}, k \geq 1.$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_o}{2^2\cdot 1} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2\cdot 2^2} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n^2} \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα
$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{2^{2n}(n!)^2}\ ,\ n \geq 1.$
Επομένως, προκύπτει μία λύση

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},\ x \in \mathbb{R} \qquad (5.15)$$

Η δυναμοσειρά λύση (5.15) συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και είναι αναλυτική στο $x = 0$. Η λύση αυτή ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel πρώτου είδους μηδενικής τάξης*** και συμβολίζεται με $J_o(x)$.

$$J_o(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (5.16)$$

Ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης μπορεί να προκύψει με υποβιβασμό τάξης, αλλά θα αναφερθούμε στη τεχνική που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 4 (όπου οι ρίζες της δείκτριας εξίσωσης είναι ίσες). Θεωρούμε τη συνάρτηση $y(x;r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ με r μία συνεχή μεταβλητή και βρίσκουμε τα a_n συναρτήσει του r επιλύοντας τις σχέσεις (5.13) και (5.14). Οι συντελεστές $a_n(r)$ οφείλουν να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_{2k+1}(r) = 0, k = 1,2,3 \ldots \qquad (5.17)$$

$$a_{2k}(r) = -\frac{a_{2k-2}(r)}{(r+2k)^2}, k \geq 1 \qquad (5.18)$$

Από την τελευταία σχέση για $k = 1,2,3 \ldots n$ έπεται

$$\left.\begin{aligned} a_2(r) &= -\frac{a_o}{(r+2)^2} \\ a_4(r) &= -\frac{a_2(r)}{(r+4)^2} \\ &\vdots \\ a_{2n}(r) &= -\frac{a_{2n-2}(r)}{(r+2n)^2} \end{aligned}\right\}$$

Οπότε $a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n a_o}{(r+2)^2(r+4)^2\ldots(r+2n)^2}, n = 1,2,3 \ldots$ (5.19)

Αν επιδράσουμε με τον τελεστή $L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + x^2$ επί της συνάρτησης $y(x;r)$ παίρνουμε

$L(y(x;r) = f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n}$, με $f(r) = r^2$

Επειδή ακριβώς οι συντελεστές $a_n(r)$ έχουν επιλεγεί να ικανοποιούν τις σχέσεις (5.17) και (5.18) προκύπτει

$$L(y(x;r) = f(r)a_o x^r, \forall x \in \mathbb{R}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση μερικώς ως προς r και αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι παραγωγίσεις ως προς ανεξάρτητες μεταβλητές μετατίθενται, βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial r}L(y(x;r) = L\left(\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right) = f'(r)a_o x^r + f(r)a_o x^r lnx = 2ra_o x^r + r^2 a_o x^r lnx$$

Με δεδομένο ότι για $r = r_1 = 0$ το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης μηδενίζεται προκύπτει ότι μία δεύτερη λύση της ΔΕ είναι η

$w(x) = \left.\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right|_{r=r_1=0} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)\right|_{r=r_1=0} = x^r\, lnx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^n|_{r=r_1=0} + x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'(r)\, x^n|_{r=r_1=0} = lnx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n = J_o(x) lnx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'\, x^n$

Επικαλούμενοι τη σχέση (5.19) έχουμε ότι

$$a_{2n}{}'(r) = (-1)^{n+1} 2a_o \left[\frac{(r-2)(r+4)^2 \dots (r+2n)^2 \dots + (r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)}{(r+2)^4(r+4)^4 \dots (r+2n)^4}\right]$$
$$= (-1)^{n+1} 2a_o \left[\frac{1}{(r+2)^3(r+4)^2 \dots (r+2n)^2} + \dots + \frac{1}{(r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)^3}\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1} 2a_o}{(r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)^2}\left[\frac{1}{(r+2)} + \dots + \frac{1}{(r+2n)}\right]$$
$$= -2a_{2n}(r)\left[\frac{1}{(r+2)} + \dots + \frac{1}{(r+2n)}\right]$$

Για $r = 0$ έχουμε

$$a_n{}'(0) = -2a_{2n}(0)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right] = -2\frac{(-1)^n a_o}{2^{2n}(n!)^2 2} H_n = \frac{(-1)^{n+1} a_o}{2^{2n}(n!)^2} H_n$$

όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Θέτοντας $a_o = 1$, η δεύτερη λύση της εξίσωσης Bessel μηδενικής τάξης είναι:

$w(x) = J_o(x) lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} H_n\, x^{2n}, \ \ x > 0.$

Στις εφαρμογές για λόγους συγκεκριμένης κανονικοποίησης, η δεύτερη λύση δεν είναι ακριβώς η $w(x)$ αλλά ένας γραμμικός συνδυασμός των $J_o(x)$ και $w(x)$:

$\frac{2}{\pi} w(x) + \frac{2}{\pi}(\gamma - ln2) J_o(x)$ η οποία ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους μηδενικής τάξης***, συμβολίζεται με $Y_o(x)$ και υπολογίζεται τελικά ως

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(ln\frac{x}{2} + \gamma\right) J_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} H_n\, x^{2n}\right], x > 0 \qquad (5.20)$$

Όπου $\gamma = 0.5772 \dots$ είναι μία σταθερά γνωστή ως σταθερά Euler.

Η γενική λύση της ΔΕ Bessel μηδενικής τάξης για $x > 0$ είναι

$$y(x) = c_1 J_o(x) + c_2 Y_o(x), x > 0$$

Παρατηρούμε ότι η $J_o(x) \to 1$ καθώς το $x \to 0$, ενώ η $Y_o(x)$ έχει λογαριθμική ιδιομορφία στο $x = 0$. Αν επιθυμούμε λύσεις ομαλές στο $x_o = 0$, αυτές δεν μπορεί να είναι παρά πολλαπλάσια αποκλειστικά της συνάρτησης $J_o(x)$.

<u>Εξίσωση Bessel πρώτης τάξης</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0, x > 0. \quad (5.21)$$

<u>Επίλυση</u>: Για τη ΔΕ (5.21) ισχύει:

$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xp(x) = 1 = p_o$,

$q(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow x^2q(x) = x^2 - 1 \to -1 = q_o$, καθώς το $x \to 0$.

Επομένως η δείκτρια εξίσωση είναι $f(r) = 0 \Rightarrow r(r-1) + rp_o + q_o = 0 \Rightarrow$
$r(r-1) + r - 1 = 0 \Rightarrow (r+1)(r-1) = 0$, με ρίζες τους δείκτες $r_1 = 1, r_2 = -1$.
Η διαφορά δεικτών είναι ακέραιος και αυτό μας προειδοποιεί και πάλι για προσεκτική αντιμετώπιση του μικρότερου δείκτη.

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ τη συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ έχουμε:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0.$

Κάνοντας την μετατόπιση στον τελευταίο όρο προκύπτει:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow \{r(r-1) + r - 1\}a_o x^r + \{(r+1)r + (r+1) - 1\}a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1) + (r+n) - 1\}a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0,$

Η οποία γράφεται

$f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0.$

Επομένως,

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0 \Rightarrow (r-1)(r+1) = 0 \ \ (a_o \neq 0) \quad (5.22)$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \quad (5.23)$$

Η αναδρομική σχέση: $f(r+n)a_n + a_{n-2} = 0, \ n \geq 2$ (5.24)

Η σχέση (5.22) προσδιορίζει τους εκθέτες ιδιομορφίας $r_1 = 1, r_2 = -1$.

(i) Ας εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση, $r_1 = 1$. Από την σχέση (5.23) έχουμε ότι $a_1 = 0$.
Η σχέση (5.24) για $r_1 = 1$ γίνεται:

$$(r_1 + n + 1)(r_1 + n - 1)a_n = -a_{n-2}, n \geq 2$$

$(n+2)na_n = -a_{n-2}, n \geq 2$ (η αναδρομική σχέση με βήμα 2). (5.25)

Επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (5.25) όπου $n = 2k$ έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2)} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2k(k+1)}, k \geq 1$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_o}{2^2\cdot 1\cdot 2} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2\cdot 2\cdot 3} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+1)} \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{2^{2n} n!(n+1)!}\ , \ n \geq 1.$

Επιλέγοντας $a_o = \frac{1}{2}$, η πρώτη λύση $y_1(x)$ του θεμελιώδους συνόλου, συμβολίζεται με $J_1(x)$ και ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel πρώτου είδους πρώτης τάξης,***

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(n+1)!}\right] = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, x \in \mathbb{R} \qquad (5.26)$$

Η σειρά (5.26) συγκλίνει απολύτως για κάθε x, οπότε η $J_1(x)$ είναι παντού αναλυτική.

(ii) Για να βρούμε τη δεύτερη λύση εξετάζουμε την περίπτωση για $r_2 = -1$.

Από τη σχέση (5.23) έπεται

$$f(r+1)a_1 = 0 \Rightarrow f(r_2+1)a_1 = 0 \Rightarrow f(0)a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Η σχέση (5.24) για $r_2 = -1$ γίνεται:

$$(r_2 + n + 1)(r_2 + n - 1)a_n = -a_{n-2}, n \geq 2$$

$n(n-2)a_n = -a_{n-2}, n \geq 2$ (η αναδρομική σχέση με βήμα 2). (5.27)

Επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Στην αναδρομική σχέση (5.27) παρατηρούμε ότι για $n = 2$ έχουμε $0 \cdot a_2 = -a_o$. Όμως $a_o \neq 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει λύση στη μορφή: $y(x) = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Σε αυτή την περίπτωση ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης είναι πολύ πιο πολύπλοκος και δεν θα δοθεί εδώ. Μπορεί να δειχθεί ότι η μορφή της δεύτερης λύσης είναι:

$$y_2(x) = \alpha J_1(x) lnx + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right] \qquad (5.28)$$

Ο προσδιορισμός της σταθεράς α και των συντελεστών b_n μπορεί να γίνει με απευθείας αντικατάσταση της έκφρασης (5.28) στην ΔΕ (5.21). Πραγματοποιώντας την αντικατάσταση αυτή βρίσκουμε ότι $\alpha = -1$, $b_{2n+1} = 0$ (εφόσον $a_1 = 0$) και $b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(H_n + H_{n-1})}{2^{2n} n!(n-1)!}$, $n = 1,2 \ldots$

Επομένως,

$$y_2(x) = -J_1(x) lnx + x^{-1}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1})}{2^{2n} n!(n-1)!} x^{2n}\right],\ x > 0 \quad \text{όπου } H_o = 0.$$

Η δεύτερη λύση της εξίσωσης Bessel συμβολίζεται με $Y_1(x)$ και λαμβάνεται συνήθως ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $J_1(x)$ και $y_2(x)$. Η $Y_1(x)$ ορίζεται ως

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[(\gamma - ln2)J_1(x) - y_2(x)], x > 0$$

και ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους πρώτης τάξης***.

Η γενική λύση της ΔΕ (5.21) είναι

$$y(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x), \qquad x > 0$$

Παρατηρούμε ότι, ενώ η J_1 είναι αναλυτική στο $x = 0$, η Y_1 γίνεται μη φραγμένη καθώς το $x \to 0$.

Παρατηρήσεις:

(i) Μία από τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel είναι:

$$J_{p+1}(x) = \frac{2\pi}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

Έτσι όλες οι συναρτήσεις Bessel τάξης $n \in N \cup \{0\}$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των $J_o(x)$ και $J_1(x)$.

(ii) Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους $J_p(x)$, είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}^+$, περιελίσσονται άπειρες φορές γύρω από τον άξονα x (άρα έχουν άπειρες ρίζες) και μοιάζουν με αποσβεννύμενες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις. Ασυμπτωτικά, προσεγγίζονται από μία συνάρτηση της μορφής: $A\frac{1}{\sqrt{x}}cos(x-a), x \to \infty$.

Οι συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους $Y_p(x)$, παρουσιάζουν την ίδια κατάσταση με τις $J_p(x)$, παντού στο $\mathbb{R}^+$, εκτός από την περιοχή του μηδενός όπου απειρίζονται. Ασυμπτωτικά, προσεγγίζονται από μία συνάρτηση της μορφής: $B\frac{1}{\sqrt{x}}sin(x-a), x \to \infty$.

Οι ρίζες των $J_p(x)$ και $Y_p(x)$ είναι ακανόνιστα κατανεμημένες όχι όμως εντελώς. Εφ' όσον ασυμπτωτικά προσεγγίζονται από συνημίτονο και ημίτονο, η απόσταση μεταξύ διαδοχικών ριζών, τείνει να γίνει ίση με π.