Θ. Laurent

Προπαρασκευαστικά λήμματα

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$, $\gamma_r(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

κ'

$f:\gamma_r^* \to \mathbb{C}$ συνεχής.

Θέτουμε

$$\varphi_k(w)=\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}},\ w\in\gamma_r^*,\quad k\in\mathbb{Z}$$

κ'

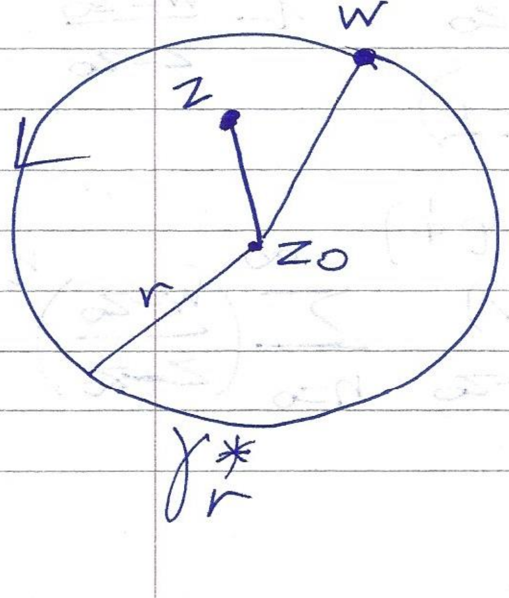
$$a_k=\int_{\gamma_r}\varphi_k(w)dw,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

<u>Λήμμα 1:</u> Εάν $z\in\mathbb{C}$ με $|z-z_0|<r$, τότε

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw=\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}dw=$$



$$=\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}dw.$$

Αλλά, $\forall w\in\gamma_r^*$,

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{r}<1,$$

οπότε η γεωμετρική σειρά

Δίνει $$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k.$$

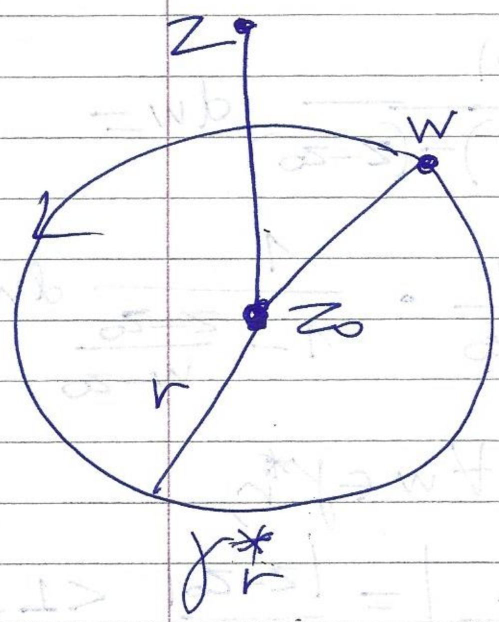
Άρα, $$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right](z-z_0)^k. \qquad \boxtimes$$

<u>Λήμμα 2:</u> Εάν $|z-z_0|>r$, τότε

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k.$$

<u>Απόδειξη:</u> $\forall w \in \gamma_r^*$,



$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= -\frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$$

$\left(\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$

(γεωμ. σειρά)

$$= -\frac{f(w)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$=$

③

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad w \in \gamma_r^*.$$

Στο παραπάνω άθροισμα θέτω $k=-n-1$, οπότε $n=-(k+1)$ και

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)(w-z_0)^{-(k+1)}}{(z-z_0)^{-k}} =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k,$$

$\forall w \in \gamma_r^*$.

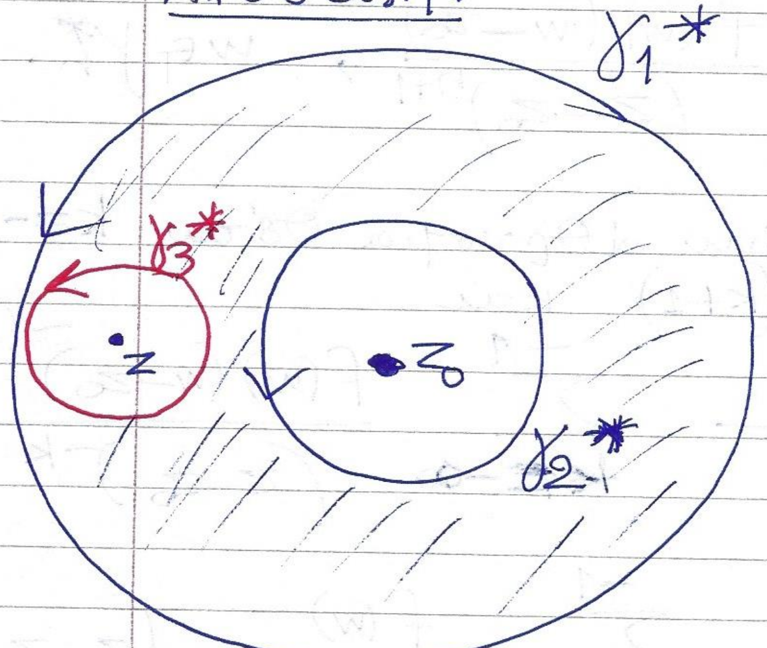
Άρα, $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \right] (z-z_0)^k$ $\boxtimes$

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ κ' γ_1, γ_2 δύο θετικά προσανατολισμένοι κύκλοι κοινού κέντρου z_0 με $\gamma_2^* \subset \text{int}\gamma_1^*$ κ' f συνάρτηση ολόμορφη στο $\text{int}\gamma_1^* \setminus \{z_0\}$ κ' συνεχής στο γ_1^*. Εάν $z \in \text{int}\gamma_1^* \cap \text{ext}\gamma_2^*$, τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma_1} \varphi_k(w) dw \right] (z-z_0)^k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\int_{\gamma_2} \varphi_k(w) dw \right] (z-z_0)^k.$$

Απόδειξη:



Επιλέγω θετικά προσαν. κύκλο γ_3 κέντρο z με

$\gamma_3^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$.

Επειδή η f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του γ_3, από Ο.Τ. Cauchy παίρνω

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $w \longmapsto \dfrac{f(w)}{w-z}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*$, οπότε από την Γενικ-Αρχή Παραμόρφ. παίρνουμε

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\xrightarrow[1,2]{\text{Λήμματα}}$ αποδεικτέα. $\boxtimes$

<u>Λήμμα 4:</u> Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$ κ' φ ολόμορφη στο $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ θετικά προσανατολ. κλειστές καμπύλες ώστε $z_0 \in \text{int}\,\gamma^* \cap \text{int}\,\tilde{\gamma}^*$, $\gamma \cup \tilde{\gamma}^* \subset D(z_0, R)$.

Τότε, $\int_\gamma \varphi(w)\,dw = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(w)\,dw$.

<u>Απόδειξη:</u>

Επιλέγω θετικά προσαν. κύκλο η κέντρου z_0 με $\eta \subset \text{int}\,\gamma^* \cap \text{int}\,\tilde{\gamma}^*$.

Η φ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, η^* (αντ- μεταξύ των $\tilde{\gamma}^*, \eta^*$) $\xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \varphi(w)\,dw = \int_\eta \varphi(w)\,dw = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(w)\,dw. \quad \boxtimes$$

ΘΕΩΡΗΜΑ LAURENT Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" δίσκο $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$).

Τότε, $\exists ! (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ |

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

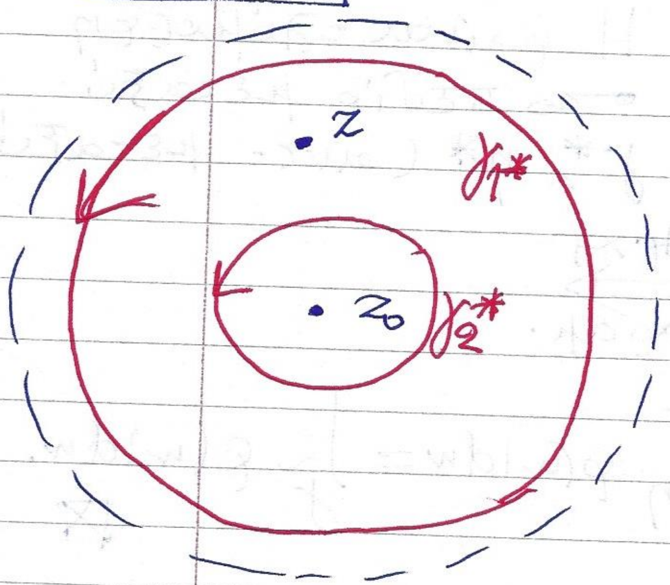
Επιπλέον, αν γ τυχαία θετικά προσαν. κλειστή καμπύλη με

$$z_0 \in \operatorname{int}\gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R),$$

τότε

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη:



Έστω $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Θεωρούμε δύο θετικά προσαν. κύκλους γ_1, γ_2 κοινού κέντρου z_0 με

$$z \in \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$$

κ'

$$\gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^*, \quad \gamma_1^* \subset D(z_0, R).$$

Λήμμα 3 $\Longrightarrow$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_1}\varphi_k(w)dw\right](z-z_0)^k+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\int_{\gamma_2}\varphi_k(w)dw\right](z-z_0)^k,$$

όπου $\varphi_k(w)=\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}$, $w\in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$,

$k\in\mathbb{Z}$.

Έστω γ τυχαία θετικά προσαν. κλειστή καμπύλη με

$z_0\in \operatorname{int}\gamma^*$, $\gamma^*\subset D(z_0,R)$.

Επειδή η φ_k είναι ολόμορφη στον $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$,

Λήμμα 4 $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma_1}\varphi_k=\int_{\gamma_2}\varphi_k=\int_{\gamma}\varphi_k$,

$k\in\mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{\gamma}\varphi_k(w)dw\right](z-z_0)^k.$$

$\boxtimes$