ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^4}$ γύρω από το 0, στους δακτυλίους $0 < |z| < 1$, $|z| > 1$.

2. Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{3-z}$ γύρω από το 1, στο δακτύλιο $1 < |z-1| < 2$.

3. Αναπτύξτε σε σειρά Laurent γύρω από το 0 τις συναρτήσεις
$$z^3 \cos(1/z), \quad ze^{1/z^2}, \quad \frac{\sin^2 z}{z},$$
στο δακτύλιο $|z| > 0$.

4. Δείξτε ότι το σημείο $z = 0$ είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο για τις παρακάτω συναρτήσεις:

(i) $f(z) = \dfrac{\sin(4z) - 4z}{z^2}$ (ii) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ (iii) $f(z) = \dfrac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{z^2/2}}$

(iv) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$

5. Βρείτε τους πόλους των συναρτήσεων και προσδιορίστε την τάξη τους:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z+i)^4}$ (ii) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$ (iii) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$

(iv) $f(z) = \dfrac{\cos z - \cos(2z)}{z^6}$

6. Ποιά είναι η τάξη του πόλου $z = 0$ της συνάρτησης
$$f(z) = \frac{1}{(2\cos z - 2 + z^2)^2} \;;$$

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, όπου:

(i) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+2)^2(z+4)}$, $\gamma(t) = 5e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $f(z) = z^7 \cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z \, \cos z}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

8. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$1 - \cos z = z^2 \varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma h(z)dz$, όπου

$$h(z) = \frac{1}{1-\cos z} \; + \; z^5 \sin\left(1/z^2\right), \qquad \gamma(t) = e^{it}, \; t \in [0, 2\pi].$$

9. (i) Έστω g ολόμορφη πάνω σε μια περιοχή του 0 με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$Res\left(\frac{1}{z^3 g(z)}, \, 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 \; - \; g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3} \, .$$

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(e^z - 1)\sin z}\,, \quad \text{όπου } \; \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

10. Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)\, dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}\,,$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.