ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ II
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log} z}{z} dz,$$
όπου $\gamma = [1,\ i]$.

2. Εάν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Real}(z_1) \leq 0,\ \mathrm{Real}(z_2) \leq 0$, να δείξετε ότι
$$|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2},\ z \in \mathbb{C}$.
(i) Να δείξετε ότι
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$
όπου $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [0, \pi],\ R > 0$.
(ii) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$
[*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή καμπύλη $\gamma_R + [-R, R],\ R > 0$.]

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^2(z-4)}$ όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z| = R$ όταν (i) $R = 1$, (ii) $R = 3$ (iii) $R = 5$.

5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^2} dz,$$
όπου
(i) $\gamma(t) = \dfrac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ (ii) $\gamma(t) = 1 + \dfrac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2(z-4)} dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z| = R$ όταν (i) $R = 1$, (ii) $R = 3$ (iii) $R = 5$.

7. Να δείξετε ότι
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \frac{\pi}{3},$$
ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $1/z$ πάνω στην έλλειψη $\gamma(t) = 2\cos t + 3i \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.

8. Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση e^z/z πάνω στον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z|=1$, να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = 0.$

9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^2-1},$$
όπου $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t\in[-\pi/2,\ \pi/2],\ \ R>1.$
[*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy πάνω στην κλειστή καμπύλη $\gamma_R + [Ri, -Ri]$.]

10. Έστω f ολόμορφη στον κλειστό δίσκο $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|\le 1\}$ και $\gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi]$.
(i) Να δείξετε ότι
$$\int_\gamma \overline{f(z)}dz = 2\pi i\overline{f'(0)}.$$
(ii) Να υπολογίσετε το
$$\int_\gamma \overline{z\cos z}dz.$$

11. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση $f : D[0,R]\to\mathbb{C}$, όπου $D[0,R]=\{z\in\mathbb{C} : |z|\le R\},\ R>0.$
Εάν $f(z_0)=0$, για κάποιο z_0 με $|z_0|<R$, να δείξετε ότι
$$|f(0)| \le \frac{M_R|z_0|}{R-|z_0|},$$
όπου $M_R=\max\{|f(z)| : |z|=R\}$.
[*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy στα σημεία z_0, 0 και για τον κύκλο $\gamma_R(t)=Re^{it},\ \ t\in[0,2\pi]$.]

12. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση $f : D(0,1)\to D(0,1)$, όπου $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$. Να δείξετε ότι
$$|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \le \frac{1}{(1-|z|)^2}, \quad \text{για κάθε } z\in D(0,1).$$
[*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικοί τύποι του Cauchy για $|z|<r<1$ και για τον κύκλο $\gamma_r(t)=re^{it},\ \ t\in[0,2\pi]$.]

13. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n\ge 2$ και με μεγιστοβάθμιο όρο a_nz^n.
(i) Να δείξετε ότι
$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{P(z)}{a_nz^n} - 1\right| = 0.$$
Συμπεράνατε ότι υπάρχει $R_0>0$ τέτοιο ώστε για $|z|>R_0$,
$$|P(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n.$$
(ii)Να δείξετε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{P(z)}dz = 0,$$
όπου $\gamma_R(t)=Re^{it},\ t\in[0,2\pi],\ R>0$.
(iii) Εάν γ απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη που περικλείει όλες τις ρίζες του $P(z)$, να δείξετε ότι
$$\int_\gamma\frac{1}{P(z)}dz = 0.$$

14. Έστω f ακέραια συνάρτηση. Αν η f'' είναι φραγμένη κατά μέτρο, δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

15. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f = u + iv$. Αν $u^2 \leq v^2$, να δείξετε ότι f σταθερή.
[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε τη συνάρτηση e^{f^2}.]

16. Εάν $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $\mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι f=σταθερή. [*Υπόδειξη*: θεωρήστε τη συνάρτηση $g(z) = e^{if(z)}$.]

17. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με $|f(z)| \leq Me^{aRe(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, όπου M, a θετικές πραγματικές σταθερές. Να δείξετε ότι $f(z) = Ce^{az}$, $z \in \mathbb{C}$, για κάποια σταθερά C.

18. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε
$$|f(z)| \ \leq \ A|z|^2 \ + \ B, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$
όπου A, B θετικές σταθερές. Να δείξετε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.
[*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για την $f'''(z_0)$ πάνω σε κύκλο $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$.]

19. Να βρεθεί το
$$\max_{|z|\leq 1} \left| \frac{z^2}{z+2} \right|$$
και τα σημεία στα οποία λαμβάνεται.

20. Να βρεθεί το
$$\max_{|z|\leq 1} |z^2 + z - 1|$$
και τα σημεία στα οποία λαμβάνεται.

21. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση $f : D[0,1] \to D[0,1]$ με $f(0) = i$, όπου $D[0,1] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

22. Έστω f ολόμορφη πάνω στον κλειστό δίσκο $D[0,1]$ τέτοια ώστε
$$|f(z)| \ > \ 1, \quad \text{για } |z| = 1.$$
Αν $f(0) = i$, να δείξετε ότι υπάρχει z_0 ώστε
$$|z_0| < 1, \quad f(z_0) = 0.$$

23. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση f πάνω στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3\}$, τέτοια ώστε
$$|f(z)| \leq 1, \text{ για } |z| = 1 \quad \text{και} \quad |f(z)| \leq 9, \text{ για } |z| = 3.$$
Να δείξετε ότι $|f(z)| \leq |z|^2$, για κάθε $z \in \Delta$.