1η Σειρά ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν α) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, β) $\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{(z_1 z_2)}$, γ) $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$
2. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δείξετε ότι αν ενα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές έχει μια γνησίως μιγαδική ρίζα z_1 τότε υποχρεωτικά ο συζυγής μιγαδικός $\overline{z_1}$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου.
3. Να υπολογίσετε τις εκφράσεις α) $\frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^6}$, β) $\sqrt[3]{1+i}$, γ) $27^{1/3}\ i^{-1/2}$
4. Δείξτε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $z \neq -1$ μοναδιαίου μέτρου δύναται να αναπαρασταθεί ως $z = \frac{1+it}{1-it}$ με $t \in R$.
5. Δεν συνίσταται η αυτόματη μεταφορά σχέσεων από την πραγματική στη μιγαδική ανάλυση. Επί παραδείγματι αποδείξτε ότι $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \neq 1$ εάν $Im(z) \neq 0$. Εντούτοις αποδείξτε ότι ισχύει $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z.
6. Προσδιορίστε την εικόνα του χωρίου $A = \left\{z \in \mathbb{C}:\ |Rez| \leq \frac{\pi}{2},\ Imz \geq 0\right\}$ υπό το μετασχηματισμό $f(z) = \sin z$.
7. Δείξτε ότι $\left|e^{ie^{\bar{z}}}\right| = e^{e^x \sin y}$ όταν $z = x + iy$.
8. Να προσδιοριστούν οι (προφανώς) μη πραγματικές ρίζες των εξισώσεων α) $\sin z + \cos z = 2$, β) $e^z = i$ και γ) $\sin z - \cos z = i$.
9. α) Εργαστείτε με τις συνθήκες Cauchy-Riemann (σε καρτεσιανή ή σε πολική μορφή) και αποφανθείτε περί της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης $f(z) = z|z|,\ z \in C$. β) Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας διαμέσου του ορισμού της παραγώγου. γ) Υπάρχει τόπος στον οποίον η συνάρτηση $f(z)$ να είναι αναλυτική;
10. Να προσδιοριστεί το σημειοσύνολο του C όπου η συνάρτηση $g(z) = x^2 + iy^3$ (με $z = x + iy$) είναι παραγωγίσιμη. Είναι σε κάποιο χωρίο η συνάρτηση g αναλυτική;
11. Γνωρίζουμε πως η συνάρτηση $\mathrm{g(z) = f(x, y) + i(xy)}$ είναι παντού αναλυτική (όπου f πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών). Είναι η συνάρτηση $\mathrm{h(z) = f(x, y) + i(x + y)}$ αναλυτική;
12. Να προσδιορίσετε το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης $f(z) = e^z cos(z)$.
13. Να αναπτυχθούν σε σειρές Laurent οι ακόλουθες συναρτήσεις στους αντίστοιχους δακτυλίους
    i) $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ α) $2< |z| <3$ β) $3 < |z| < \infty$
    ii) $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ α) $1< |z| <2$ β) $0< |z-2| < 3$
    iii) $\frac{1}{z^2+2z-12}$ $0 < |z+2| < 4$
14. Βρείτε τους πόλους των συναρτήσεων και προσδιορίστε την τάξη τους α) $f(z) = \frac{1}{z^4+z^3-2z^2}$, β) $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$, γ) $f(z) = \tan(z)$
15. Να βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε κάθε μεμονωμένο ανώμαλο σημείο για τη συνάρτηση f:

i) $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^2(z^2+1)}$

ii) $f(z) = e^{(z+\frac{1}{z})}$

iii) $f(z) = \frac{1}{z\, sin(z)}$

iv) $f(z) = \frac{1}{(z^4+z^3-2z^2)}$