Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας (ΣΗΕ)

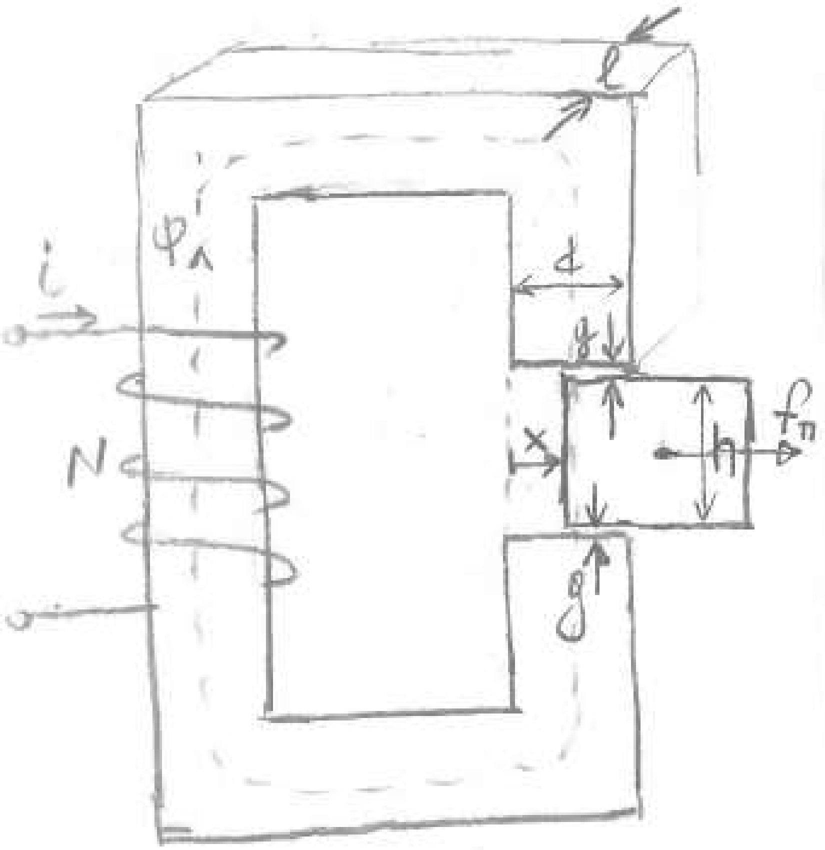
Ηλεκτρομηχανική Μετατροπή Ενέργειας

Ασκήσεις

Σταύρος Αθ. Παπαθανασίου
Καθ. ΕΜΠ

Εφαρμογή: Δίνεται $N = 1000,\ g = 2\ mm,\quad d = 15\ cm,\quad l = 10\ cm,$
$i = 10\ A\ (ΣΡ, ΕΡ\ με\ f = 50\ Hz),\qquad \mu_r \to \infty,\qquad g \ll h$

Ζητείται η δύναμη στον οπλισμό. Επίσης το ρεύμα στο πηνίο και η δύναμη στον οπλισμό, όταν το πηνίο διεγείρεται από τάση 230 Vrms/50 Hz. $R_{πηνίου}$=0.5 Ω.



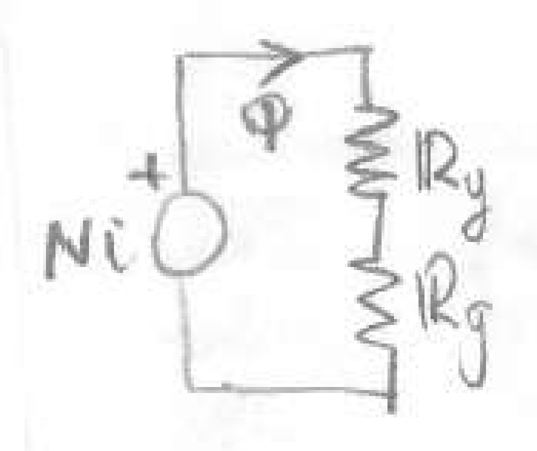
Επειδή $\mu_r \to \infty$ και $g \ll h$, το πεδίο στον σίδηρο είναι αμελητέο (όλη ενέργεια στο διάκενο). Άρα:

$$Ni = 2H_g g = \frac{2gB_g}{\mu_0} = \frac{2g\varphi}{\mu_0 l(d-x)} = \frac{2g\lambda}{\mu_0 N l(d-x)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\mu_0 l N^2}{2g}(d-x)i$$

όπου ελήφθη υπόψη ότι:

$$B_g = \mu_0 H_g$$
$$\varphi = B_g \cdot S = B_g \cdot l \cdot (d-x)$$
$$\lambda = N\varphi$$



Ομοίως, από το μαγνητικό ισοδύναμο κύκλωμα:

$$\varphi = \frac{\mathcal{F}}{2\mathcal{R}_g} = \frac{Ni}{2\mathcal{R}_g} \rightarrow \lambda = \frac{N^2 i}{2\mathcal{R}_g}$$

όπου

$$\mathcal{R}_g = \frac{1}{\mu_0} \frac{g}{l(d-x)}$$

$$\boxed{\lambda = \lambda(x) = \frac{\mu_0 l N^2}{2g}(d-x)i}$$

$$f_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i,x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\lambda(x)i\right] = \frac{\mu_0 l N^2}{4g}\frac{\partial(d-x)}{\partial x} i^2 \Rightarrow$$

$$f_\pi = -\frac{\mu_0 l N^2}{4g} i^2 \Rightarrow f_\pi = -\frac{4\pi 10^{-7} \cdot 0{,}1 \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} i^2 = -15{,}708 \cdot i^2 \ N$$

α) Αν $i = 10\ A$ **συνεχές** τότε $f_\pi = -1570{,}8\ N < 0$

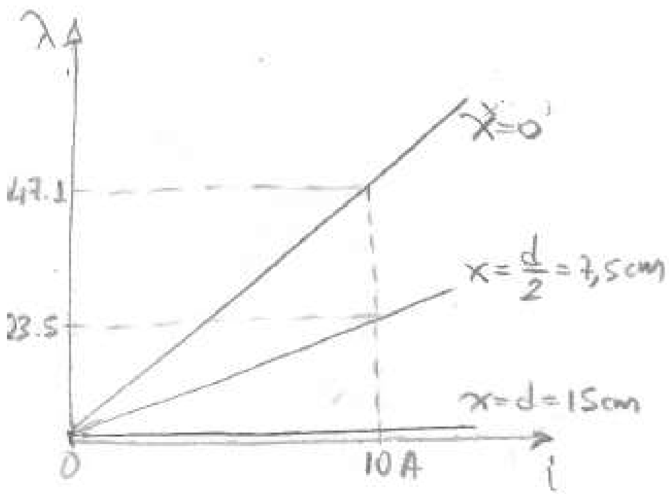
β) Αν $i = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(2\pi 50t)$ τότε $f_\pi = 3141{,}6\, sin^2(100\pi t)\ N$

Ισχύει ότι:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

Άρα

$$f_\pi = -\underbrace{1570{,}8}_{\textbf{μέση τιμή}} + 1570{,}8\, cos\, 200\pi t \ < 0\ N$$



Ασχέτως του είδους και φοράς του ρεύματος, η δύναμη τείνει να κλείσει το διάκενο.

$$\lambda = 31{,}4 \cdot (0{,}15 - x) \cdot i\ \ Wb$$

Άρα για δεδομένη ένταση, η κίνηση του οπλισμού αυξάνει τη ροή και συνεπώς την ενέργεια του πεδίου ($W'_\pi = \frac{1}{2}\lambda i$).

$$\mathcal{R}_g = \frac{1}{\mu_0}\frac{g}{l(d-x)} \rightarrow L = \frac{N^2}{2\mathcal{R}_g} = \frac{N^2\mu_0 l}{2g}(d-x) = \frac{10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}(0{,}15 - x)$$

Για $x = 0,\ L = 4{,}712\ H$

Για $x = 7{,}5\ cm,\ L = 2{,}356\ H$

$$\varphi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{Ni}{2\mathcal{R}_g} \rightarrow \varphi = \frac{\mathrm{N}\mu_0 l}{2g}(d-x)i = \frac{10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}(0{,}15 - x) \cdot 10$$

Για $x = 0,\ \varphi = 0{,}0472\ Wb$

Για $x = 7{,}5\ cm,\ \varphi = 0{,}0236\ Wb$

$$W_\pi = \frac{1}{2}Li^2 \rightarrow W_\pi = \frac{N^2\mu_0 l}{4g}(d-x)i^2$$

Για $x = 0,\ W_\pi = 235{,}6\,J$

Για $x = 7{,}5\,cm,\ \ W_\pi = 117{,}8\,J$

$$f_\pi = \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx} \rightarrow f_\pi = -\frac{N^2\mu_0 l}{4g}i^2 = -\frac{10^6\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}1}{4\cdot 2\cdot 10^{-3}}\cdot 10^2 = -1570{,}8\,N$$

Προσοχή: Πρόσημο (–) ανεξαρτήτως του x

0, ακίνητος οπλισμός

Αν $u(t) = \sqrt{2}V sin\omega t$ τότε:

$$u = ri + L\frac{di}{dt} + i\cancel{\frac{\partial L}{\partial x}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow u = ri + L\frac{di}{dt} \quad \xrightarrow{\text{ΗΜΚ}}$$

$$\tilde{V} = (r + j\omega L)\tilde{I}$$

Για $x = 0$:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{r + j\omega L(x=0)} = \frac{230}{0{,}5 + j100\pi \cdot 4{,}712} = \frac{230}{1480{,}32\angle 89{,}98°} \rightarrow$$
$$\tilde{I} = 0{,}1554\angle -89{,}98°\ A$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 0{,}1554 \cdot sin\left(100\pi t - \frac{89{,}98\pi}{180}\right)\ \mathrm{A}$$
$$f_\pi(t) = -15{,}708 i^2 = -0{,}7584\, sin^2(100\pi t - \theta)\quad N$$

Όμως,

$$sin^2(\omega t - \theta) = \frac{1}{2}[1 - cos(2\omega t - 2\theta)]$$

Άρα,

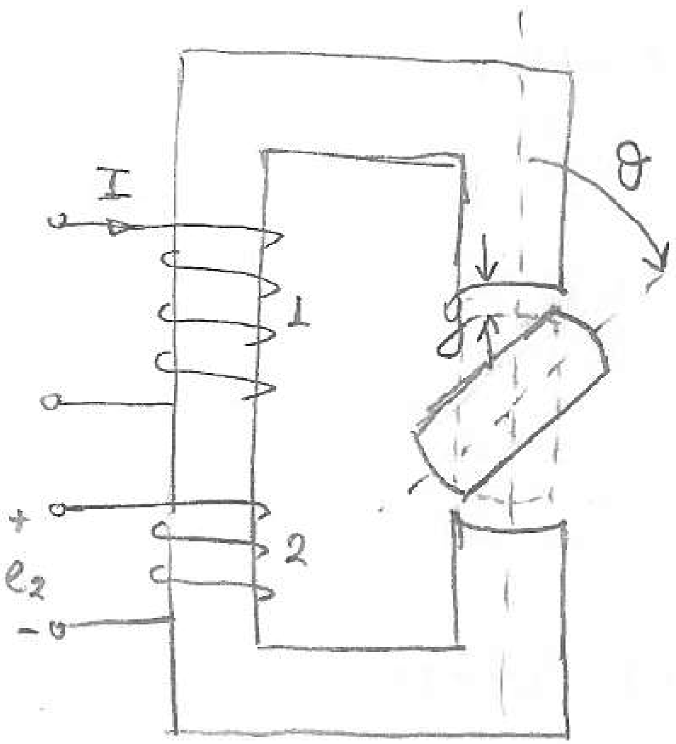
$$f_\pi(t) = \underbrace{-0{,}3792}_{\bar{f}_\pi} + 0{,}3792\, cos\left(2\pi t - \frac{179{,}96\pi}{180}\right)\ N$$

Αν $x = \frac{d}{2} \rightarrow f_\pi$ δεν μεταβάλλεται

Εφαρμογή: Δίνεται ότι

$$N_1 = N_2 = N = 1000, \qquad g = 1\,mm, \qquad A = 100\,cm^2$$

Θυσάνωση και σκεδάσεις αμελούνται



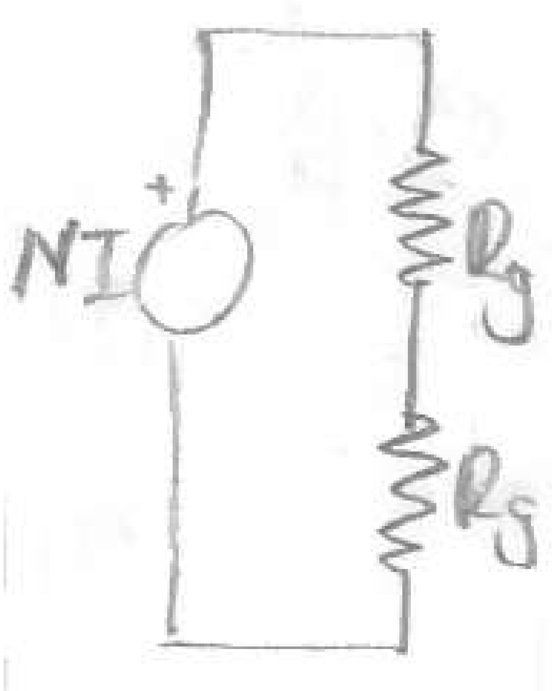
a) Σε ποια θέση του οπλισμού έχουμε L_{1max} και L_{1min}. Να υπολογιστεί η L_{1max}.

b) Εάν ισχύει $L_{1min} = 0{,}1 \cdot L_{1max}$ και $L_1(\theta) = \frac{\mathrm{L_{max}+L_{min}}}{2} + \frac{\mathrm{L_{max}-L_{min}}}{2} cos2\theta$, ποια η ροπή στον οπλισμό όταν $I_1 = 1\,A$ σταθερό και πώς χαρακτηρίζεται η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας;

c) Εάν ο οπλισμός στρέφεται με 100 ΣΑΛ, ποια η τάση στο ανοικτοκυκλωμένο πηνίο 2.

d) Αν το γόνατο της καμπύλης μαγνήτισης του σιδήρου αντιστοιχεί σε $B_\kappa = 1{,}5\,T$, ποιο το μέγιστο ρεύμα του πηνίου 1 ώστε να λειτουργεί η διάταξη στη γραμμική περιοχή;

Λύση (1)



a)

$$\mathcal{R} = 2\mathcal{R}_g = 2 \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{g}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}} = 1{,}5915 \cdot 10^5 \, \frac{\text{Aε}}{\text{Wb}}$$

Άρα

$$L_{max} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{10^6}{1{,}5915 \cdot 10^5} = 6{,}283 \, H$$

L_{max} για $\theta = 0° , 180°$

L_{min} για $\theta = 90° , 270°$

Λύση (2)

b)

$$L_1(\theta) = \mathrm{L_{max}}\left(\frac{1+0{,}1}{2} + \frac{1-0{,}1}{2}cos2\theta\right) = 6{,}283 \cdot (0{,}55 + 0{,}45cos2\theta)$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2}I^2\frac{dL}{d\theta} = -I^2 \cdot \frac{\mathrm{L_{max}} - \mathrm{L_{min}}}{2} \cdot sin2\theta \rightarrow$$

$$T(\theta) = -1^2 \cdot 6{,}283 \cdot 0{,}45 \cdot sin2\theta \rightarrow T(\theta) = -2{,}827 \cdot sin2\theta$$

Ισορροπία όταν $T = 0 \Rightarrow sin2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \kappa\pi \Rightarrow \theta = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Η ισορροπία είναι ευσταθής όταν $\frac{dT}{d\theta} < 0$

Για $\theta = 0$: $\frac{dT}{d\theta} = -2{,}2827cos2\theta = -2{,}2827 < 0$: Ευσταθής

Για $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\frac{dT}{d\theta} = -2{,}2827cos2\theta = 2{,}2827 > 0$: Ασταθής

Για $\theta = \pi$: $\frac{dT}{d\theta} = -2{,}2827cos2\theta = -2{,}2827 < 0$: Ευσταθής

Για $\theta = \frac{3\pi}{2}$: $\frac{dT}{d\theta} = -2{,}2827cos2\theta = 2{,}2827 > 0$:Ασταθής

Λύση (3)

c)

$$e_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N_2}{N_1}\frac{d\lambda_1}{dt} = I\,\frac{dL_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dL_1}{d\theta} = -5{,}654 sin2\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \cdot \frac{100}{60}\frac{rad}{s}$$

$$e_2(t) = -59{,}22 sin2\theta = -59{,}22 sin[2(\omega t + \theta_0)]$$

d)

$$NI = \mathcal{R}\varphi = \mathcal{R}AB \rightarrow B_{max} = \frac{NI}{\mathcal{R}_{min}A} \leq B_\kappa \Rightarrow I \leq \frac{B_\kappa \mathcal{R}_{min} A}{N}$$

$$\mathcal{R}_{min} = 1{,}5915 \cdot 10^5 \,\frac{\text{Aε}}{\text{Wb}} \text{ για } \theta = 0$$

$$I \leq \frac{1{,}5 \cdot 1{,}5915 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{10^3} \rightarrow I \leq 2{,}4\ A$$