Μετασχηματισμός γινομένων σε αθροίσματα

3.8 Θεωρούμε τις γνωστές ισότητες (§3.2, 3.3)

$$\text{ημα συνβ} + \text{ημβ συνα} = \text{ημ}(\alpha+\beta)$$
$$\text{ημα συνβ} - \text{ημβ συνα} = \text{ημ}(\alpha-\beta)$$
$$\text{συνα συνβ} - \text{ημα ημβ} = \text{συν}(\alpha+\beta)$$
$$\text{συνα συνβ} + \text{ημα ημβ} = \text{συν}(\alpha-\beta)$$

Με πρόθεση κατά μέλη των δύο πρώτων προκύπτει η ισότητα

$$\boxed{2\text{ημα συνβ} = \text{ημ}(\alpha+\beta) + \text{ημ}(\alpha-\beta)}$$

ενώ με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο άλλων προκύπτουν αντίστοιχα

$$\boxed{\begin{aligned} 2\text{συνα συνβ} &= \text{συν}(\alpha+\beta) + \text{συν}(\alpha-\beta) \\ 2\text{ημα ημβ} &= \text{συν}(\alpha-\beta) - \text{συν}(\alpha+\beta) \end{aligned}}$$

Οι ισότητες (1), (2) και (3) μετασχηματίζουν γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμ
σε αθροίσματα ή διαφορές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $2\text{ημ}75^0\text{συν}15^0 = \text{ημ}(75^0+15^0) + \text{ημ}(75^0-15^0) = \text{ημ}90^0 + \text{ημ}60^0 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

2. $\text{ημ}37{,}5^0\ \text{ημ}7{,}5^0 = \frac{1}{2}\left[\text{συν}(37{,}5^0-7{,}5^0) - \text{συν}(37{,}5^0+7{,}5^0)\right] = \frac{1}{2}(\text{συν}30^0 - \text{συν}45^0)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:**
$4\text{ημ}2x\,\text{συν}3x\,\text{ημ}5x = 1 - \text{συν}4x + \text{συν}6x - \text{συν}10x$

Είναι: $4\text{ημ}2x\,\text{συν}3x\,\text{ημ}5x = 2\text{ημ}2x(2\text{ημ}5x\,\text{συν}3x) = 2\text{ημ}2x[\text{ημ}(5x+3x) + \text{ημ}(5x-3x)] =$

$= 2\text{ημ}2x(\text{ημ}8x + \text{ημ}2x) = 2\text{ημ}2x\,\text{ημ}8x + 2\text{ημ}^2 2x$

$= \text{συν}(8x-2x) - \text{συν}(8x+2x) + 1 - \text{συν}4x = \text{συν}6x - \text{συν}10x + 1 - \text{συν}4x$

$= 1 - \text{συν}4x + \text{συν}6x - \text{συν}10x.$