Θ. Eberlein – Smulian

Θεώρημα 1: Έστω X χώρος με νόρμα κ' $A \subset X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) A w – συμπαγές

(ii) A ακολουθιακά w – συμπαγές, δηλ. κάθε ακολουθία στο A έχει w – συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θα αποδείξουμε μόνο την κατεύθυνση (i) $\Rightarrow$ (ii).

Θα χρειαστούμε κάποια μικρή προετοιμασία.

Λήμμα 1: Έστω τ, τ' τοπολογίες σε σύνολο $X \neq \emptyset$ με $\tau \subset \tau'$. Υποθέτουμε ότι

$$(X, \tau) \ T_2 \text{ κ' } (X, \tau') \text{ συμπαγής.}$$

Τότε, $\tau = \tau'$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω F τ'-κλειστό $\subset X$

$\Longrightarrow$ F τ'-συμπαγές $\xRightarrow{\tau \subset \tau'}$ F τ-συμπαγές

$\xRightarrow{(X,\tau)\, T_2}$ F τ-κλειστό

$\Longrightarrow$ $\tau \supset \tau'$ $\Longrightarrow$ $\tau = \tau'$. $\boxtimes$

<u>Λήμμα 2:</u> Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subset X$ w-συμπαγές. Εάν υπάρχει $D \subset X^*$ <u>αριθμήσιμο</u> <u>που χωρίζει σημεία</u> στον X, τότε ο $(A, \tau_w|A)$ είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη:</u> ο (X, τ_D) είναι μετρικοποιήσιμος (βλ. αρχείο ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΤΟΠΟΛ. I - σελ. 25 - Πρότ. 13)

$\Longrightarrow$ ο $(A, \tau_D|A)$ είναι μετρικοποιήσιμος.

Προφανώς, $\tau_D \subset \tau_W$ (αφού τα στοιχεία του D είναι στοιχεία του X^* κ' άρα w-συνεχή)

$$\Longrightarrow \quad \tau_D|A \subset \tau_W|A.$$

Αλλά, $(A, \tau_W|A)$ συμπαγής

$$\overset{\text{Λήμμα 1}}{\Longrightarrow} \quad \tau_W|A = \tau_D|A$$

$$\Longrightarrow \quad (A, \tau_W|A) \text{ μετρικοποιήσιμος.}$$

$\boxtimes$

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $A \subset X$ w-συμπαγές. Τότε, $(A, \tau_W|A)$ μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $(x_n) \subset X$ $\|\cdot\|$-πυκνό. $\forall n \geq 1$, από Θ. H-B, $\exists f_n \in X^*$ ώστε

$$\|f_n\| = 1, \quad f_n(x_n) = \|x_n\|.$$

Θα δ.ο. το $D = \{f_n : n \geq 1\}$ χωρίζει σημεία στον X.

Έστω $x \in X$ ώστε $f_n(x) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \geq 1 \mid \|x - x_N\| < \varepsilon/2$.

Τότε,
$$\|x\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N\|$$
$$< \varepsilon/2 + f_N(x_N) = \varepsilon/2 + f_N(x_N - x)$$
$$\leq \varepsilon/2 + \|x_N - x\| < \varepsilon, \ \underline{\forall \varepsilon > 0}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0.$$

Λόγω του Λήμματος 2, ο $(A, \tau_w|_A)$ είναι μετρικοποιήσιμος. $\boxtimes$

<u>Απόδειξη Θ. 1, (i) $\Rightarrow$ (ii)</u>:

Έστω $A \subset X$ w-συμπαγές κ' $(x_n) \subset A$. Θέτουμε
$$Y = \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}^{\|\cdot\|}.$$

Ο Y είναι διαχωρίσιμος. [Το σύνολο
$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \mid k \geq 1, \ r_j \in \mathbb{Q}, \ 1 \leq j \leq k \right\}$$
είναι αριθμήσιμο πυκνό στον Y.]

Το Y είναι w — κλειστό (<u>Θ-Mazur!</u>)

κ' αφού A w—συμπαγές, το $A \cap Y$

είναι w—συμπαγές $\subset Y \overset{\text{Λήμμα 3}}{\Longrightarrow}$

$(A \cap Y, \tau_w|A \cap Y)$ <u>μετρικοποιήσιμος</u>
<u>(συμπαγής)</u>

$\Longrightarrow$ η (x_n) έχει w—συγκλίνουσα

υπακολουθία μέσα στο $A \cap Y \subset A$.

$\boxtimes$