07/05/2021

<u>Άσκ. 1:</u> Έστω $\emptyset \neq E \subsetneq \mathbb{R}$ ισορροπημένο. Να δ.ο. $\exists r>0 \mid E=(-r,r)$ ή $[-r,r]$.

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ . . -

Έστω E όχι φραγμένο

Έστω $x \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\exists\, a \in E \mid |a| > |x|$

$\Longrightarrow$ $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$ $\xrightarrow{E \text{ ιδιότ.}}$ $\frac{x}{a}\, a \in E$

$\Longrightarrow$ $x \in E$.

Άρα $E = \mathbb{R}$ (Άτοπο!)

Άρα, E φραγμένο.

Θέτουμε $r = \sup\{|a| : a \in E\}$

$\Rightarrow \quad \underline{E \subseteq [-r, r]}$

Θα δ.ο. $\underline{(-r, r) \subset E}$.

Έστω $x \in (-r, r) \Rightarrow |x| < r \Rightarrow \exists\, a \in E \,|$

$|x| < |a| \Rightarrow \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \Rightarrow \frac{x}{a} a \in E$

$\Rightarrow x \in E$.

$$\underline{(-r, r) \subseteq E \subseteq [-r, r]}$$

• Εάν $(-r, r) \subsetneq E$, $\exists\, a \in E \mid |a| = r$.

Τότε, $\forall x \in [-r, r]$, $\left|\frac{x}{a}\right| = \frac{|x|}{r} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{x}{a} a \in E \Rightarrow x \in E$.

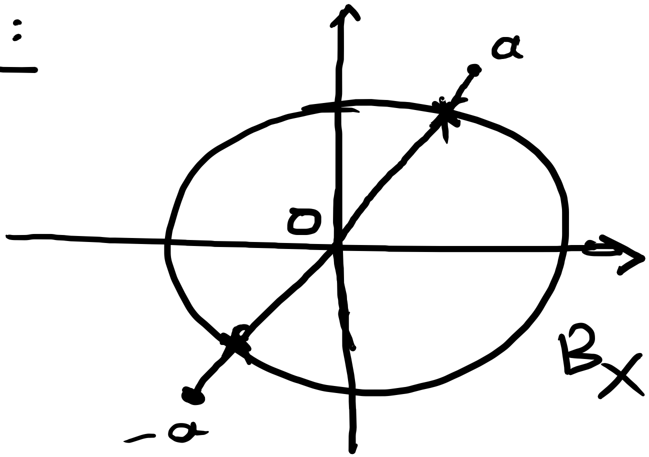
Άρα, $E = [-r, r]$.

• Εάν $(-r, r) = E$, ok. ✓

② Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' A ισορροπημένο $\subset X$ με $A \cap S_X = \emptyset$.

Τότε, $A \subset B_X$.

<u>Λύση:</u>



(A τοπο).

Έστω όχι

$\Rightarrow \exists\, a \in A \mid \|a\| \geq 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\|a\|} a \in A \cap S_X$

[διότι $\dfrac{1}{\|a\|} \leq 1$ κ' A ισορροπ.]

③ Έστω X γραμμ. χ. κ' $\emptyset \neq Y \subset X$ ισορροπ. ώστε $Y + Y \subset Y$. Να δ.ο.

(i) $2^n Y \subset Y, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Y γραμμ. υπόχ. του X.

(i) $$2Y \subset Y + Y \subset Y$$

$$\{y+y \mid y \in Y\} \subset \{y_1 + y_2 \mid y_1, y_2 \in Y\}$$

Εάν ισχύει για κάποιο n, τότε $2^{n+1} Y = 2(2^n Y)$

$$\subset 2Y \subset Y$$

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in Y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid 2^n > |\lambda|$

$$\Rightarrow \left| \frac{\lambda}{2^n} \right| < 1$$

Αλλά, $\underline{2^n y \in Y = \text{ισορροπ.}}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\cancel{2^n}} \cancel{2^n} y \in Y \Rightarrow \underline{\lambda y \in Y}.$$

Άρα, Y γραμμ. υπόχ. του X.

(4) Έστω X γραμμ. χ. κ' $\emptyset \neq A \subset X$ απορροφούν κ' $\underline{x}, \underline{y} \in X$. Να δ.ο. $\exists\, a \in A$ κ' $\lambda \in (0,1)$ |

$$y = (1-\lambda)x + \lambda(y+a)$$

<u>Λύση:</u> Έστω ότι καθορίσαμε τα ζητούμενα λ, a.

$$y = (1-\lambda)x + \lambda y + \lambda a$$

$$\iff (1-\lambda)(y-x) = \lambda a$$

$$\iff \frac{1-\lambda}{\lambda}(y-x) = a$$

$$\to t \iff \lambda = \frac{1}{1+t}$$

A απορροφάιν $\Rightarrow \exists\, t>0 \mid \quad t(y-x) \in A$

Θέτω $\quad \lambda = \dfrac{1}{1+t} \Rightarrow \dfrac{1-\lambda}{\lambda} = t$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1-\lambda}{\lambda}(y-x) = \alpha \in A.$

Άσκηση: $\quad (X, \|\cdot\|) \qquad f \in X^*$

$(X^*, w^*) \ni f \longmapsto \|f\|$ κάτω ημισυνεχής

δηλ. $\forall c>0$, το $\{f \in X^* : \|f\| > c\}$ είναι w^*-ανοιχτό.

Αρκεί να δ.ο. ότι το

$$F = \{ f \in X^* : \|f\| \leq c \}$$

είναι w^*-κλειστό.

Έστω $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο $\subset F$ με $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \in X^*$.

Τότε, $\forall x \in X$, $f_\lambda(x) \to f(x)$

επί $|f_\lambda(x)| \leq \|f_\lambda\| \cdot \|x\| \leq c\|x\|$,

$\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall x \in X$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq c\|x\| \,, \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \quad \|f\| \leq c \quad \Rightarrow \quad f \in F.$$

ΑΣΚΗΣΗ

$(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ανακλαστικός $1<p<\infty$

$e: \ell^p \to (\ell^p)^{**}$ $\quad e(x)(f) = f(x)$, $f \in (\ell^p)^*$, $x \in \ell^p$

Θα δ.ο. e επί.

Έστω $\Lambda \in (\ell^p)^{**}$ θα δ.ο. $\exists\, x \in \ell^p \mid$ $\forall f \in (\ell^p)^*$, $\Lambda(f) = f(x)$.

$$\begin{tikzcd}
\ell^q \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\Lambda\circ T"'] & (\ell^p)^* \arrow[d, "\Lambda"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

T ισομ. επί

$T(z)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z(n)$ $\quad \forall z \in \ell^q$, $\forall x \in \ell^p$

$S : \ell^p \to (\ell^q)^*$

$$S(x)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z(n), \quad \forall x \in \ell^p, \ \forall z \in \ell^q$$

$(1/p + 1/q = 1)$ $\qquad$ S isom. suri

$$\Lambda \circ T \in (\ell^q)^* \overset{S \text{ suri}}{\Longrightarrow} \exists x \in \ell^p \mid \underline{\Lambda \circ T = S(x)}$$

È ora $\quad f \in (\ell^p)^* \overset{T \text{ suri}}{\Longrightarrow} \exists z \in \ell^q \mid \underline{f = T(z)}$

$$\Lambda(f) = \Lambda(T(z)) = (\Lambda \circ T)(z) = S(x)(z)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z(n) = T(z)(x) = f(x)$$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω H διαχωρ. χ. Hilbert κ' (e_n) ορθοκανονική βάση κ' $(x_n) \subset H$. ΤΠΕΙ:

<u>(i)</u> (x_n) w – συγκλίνουσα

<u>(ii)</u> $\forall k$, το $\lim\limits_{n} \langle x_n, e_k \rangle \in \mathbb{R}$ κ' (x_n) $\|\cdot\|$ – φραγμένη.

<u>(i) ⇒ (ii)</u> Υποθ. ότι $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow (x_n)$ $\|\cdot\|$ φραγμένη

$\delta_k : H \longrightarrow \mathbb{R}$ $\delta_k(x) = \langle x, e_k \rangle$ $k \geq 1$

$\delta_k \in H^* \Longrightarrow \forall n,$ $\delta_k(x_n) \longrightarrow \delta_k(x) \Longrightarrow$

$\Rightarrow \quad \langle x_n, e_k \rangle \xrightarrow{n} \langle x, e_k \rangle, \quad \forall k.$

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> $\quad \forall k, \quad \lim_n \langle x_n, e_k \rangle = \lambda_k \in \mathbb{R}$

<u>Ισχυρισμός:</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$ (?)

Θέτουμε $\displaystyle x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \in H.$

Θα δ.ο. $x_n \xrightarrow{w} x.$

Έστω $f \in H^* \Rightarrow \exists a \in H \mid f(z) = \langle z, a \rangle$
$\forall z \in H.$

Θα δ.ο. $f(x_n) \to f(x)$

δηλ. $\langle x_n, a\rangle \xrightarrow{n} \langle x, a\rangle$

δηλ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, e_k\rangle \langle a, e_k\rangle \xrightarrow{n} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \langle a, e_k\rangle$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle x_n, e_k\rangle - \underbrace{\langle x, e_k\rangle}_{\lambda_k}\right) \langle a, e_k\rangle \right| \xrightarrow{n} 0$$

$\varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \mid$

$$\sum_{k > N} |\langle a, e_k \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{N} \left| (\langle x_n, e_k \rangle - \lambda_k) \cdot \langle a, e_k \rangle \right| = 0$$

y'

$\exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0,$

$$\sum_{k=1}^{N} \left| (\langle x_n, e_k \rangle - \lambda_k) \cdot \langle a, e_k \rangle \right| < \varepsilon/2$$

$+\ \ +\ +\ \ \cdots$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω X, Y χώροι με νόρμα κ' $T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Να δ.ο.

(i) T φραγμένος ανν $\forall g \in Y^*$, $g \circ T \in X^*$

$$\left(X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R} \right)$$

(ii) T φραγμένος ανν T $w-w$ συνεχής

Λύση: (i) Εάν T φραγμένος, προφανώς

$\forall g \in Y^*$, $g \circ T \in X^*$.

Υποθέτουμε ότι $\forall g \in Y^*$, $g \circ T \in X^*$.

Θα δ.ο. T φραγμένος

δηλ. $\sup\{ \|T(x)\| : \|x\| = 1\} < \infty$

$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Θέτουμε $e : Y \to Y^{**}$, $e(y)(g) = g(y)$, $\forall g \in Y^*$, $\forall y \in Y$

e ισομετρία

Αρκεί να δ.ο. $\sup\{ \|e(T(x))\| : x \in S_X\} < \infty$

Θεωρούμε την οικογένεια φραγμ. γραμμ. συναρτ.

$$e(T(x)) : Y^* \to \mathbb{R}, \quad x \in S_X$$

Είναι κατά σημείο φραγμένη, διότι:

$$\forall g \in Y^*, \quad |e(T(x))(g)| = |g(T(x))| =$$

$$= |(g \circ T)(x)| \overset{(\text{υπόθεση})}{\leq} \|g \circ T\| \cdot \|x\|$$

$$= \|g \circ T\|$$

Δηλ. $\forall g \in Y^*, \quad \sup\limits_{x \in S_X} |e(T(x))(g)| < \infty$

$$\xRightarrow[\text{Α.Ο.Φ.}]{Y^* \text{ Banach}} \quad \sup_{x \in S_X} \| e(T(x)) \| < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{x \in S_X} \| T(x) \| < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad T \text{ φραγμένος.}$$

(ii) Υποθ. ότι $T : X \to Y$ φραγμένος.

Θα δ.ο. είναι $w - w$ συνεχής.

- Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ δίκτυο με $x_\lambda \xrightarrow{w} x \in X$.

$\forall g \in Y^*$, $\quad g(T(x_\lambda)) = (g \circ T)(x_\lambda) \longrightarrow (g \circ T)(x)$

$$= g(T(x))$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g \circ T"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

διότι $g \circ T \in X^*$.

Άρα, T $w - w$ συνεχής.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι .

$$T : (X, w) \to (Y, w)$$

είναι συνεχής. Θα δ.ο. T φραγμένος.

$\underline{\forall g \in Y^*}$, το $g : (Y, w) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής

$\Rightarrow$ $g \circ T : (X, w) \to \mathbb{R}$ συνεχές

$\Rightarrow$ $\underline{g \circ T \in X^*}$.

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ T φραγμένος.

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω X χώρος Banach. ΤΠΕΙ:

(i) X αυτοπαθής

(ii) Εάν $Z < X^*$ που χωρίζει σημεία στον X, τότε $\overline{Z}^{\|\cdot\|} = X^*$.

Λύση: **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Έστω ότι $\overline{Z}^{\|\cdot\|} \subsetneq X^*$

$\overset{\text{Θ.H-B}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \Lambda \in X^{**} \mid \underline{\|\Lambda\| = 1}$, $\Lambda|_{\overline{Z}^{\|\cdot\|}} = 0$

$\Longrightarrow \underline{\Lambda(Z) = 0}$

Αλλά $e: X \to X^{**}$ επί (αφού X αυτοπ.)

$\Rightarrow \exists x \in X \mid \Lambda = e(x)$

Τότε, $\forall f \in Z$, $\Lambda(f) = e(x)(f) = f(x)$

$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{}}$

Ζ χωρίζει σημεία $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \Lambda = 0$ (ΑΤΟΠΟ!)

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> $\quad e : X \to X^{**}$ Θα δ.ο. e επί.

- Έστω $\Lambda \in X^{**} \setminus \{0\} \Rightarrow \ker\Lambda$ $\|\cdot\|$-κλειστός <u>γνήσιος</u> γραμμ. υπόχ. του X^{*} $\Rightarrow \ker\Lambda$ <u>δεν</u> είναι $\|\cdot\|$-πυκνός στον X^{*} $\xRightarrow{\text{(ΥΠΟΘΕΣΗ)}}$ <u>δεν</u> χωρίζει σημεία στον X $\Rightarrow \exists\, x \in X \mid x \neq 0$ κ'

$\forall f \in \ker\Lambda,\quad f(x) = 0 \Leftrightarrow e(x)(f) = 0,\ \forall f \in \ker\Lambda$

$\Rightarrow \quad \ker\Lambda \subset \ker e(x)$

$\Rightarrow \quad \exists\, \mu \in \mathbb{R} \mid \quad e(x) = \mu\Lambda$. Επειδή $x \neq 0$,

είναι $\mu \neq 0 \Rightarrow \Lambda = e\left(\frac{1}{\mu}x\right) \in e(X)$.