Ασκήσεις:

(1) Έστω $(u_n) \subset L^p(0,1)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ώστε

- $\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $u \in L^p$
- $u_n(t) \to v(t)$, σ.π.,

όπου $v : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη.

Ποιά είναι η σχέση των u, v;

Λύση: Επειδή $\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow$

$\exists$ υπακολουθία $(u_{k_n}) \mid u_{k_n}(t) \to u(t)$ σ.π.

Ταυτόχρονα, $u_{k_n}(t) \to v(t)$, σ.π. $\Longrightarrow u(t) = v(t)$ σ.π.

(2) Έστω $u, v \in L^1(0,1)$ με $u, v \geq 0$ ώστε $u(t) \cdot v(t) \geq 1$, σ.π. στο $(0,1)$. Να δ.ο.

$$\int_0^1 u(t)\,dt \cdot \int_0^1 v(t)\,dt \geq 1.$$

(Υπόδ: Hölder για $p = q = 2$)

<u>Λύση:</u>

$$\int_0^1 \sqrt{u(t)}\,\sqrt{v(t)}\,dt \leq$$

$$\leq \left[\int_0^1 \left(\sqrt{u(t)}\right)^2 dt\right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^1 \left(\sqrt{v(t)}\right)^2 dt\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \sqrt{u(t)v(t)}\, dt \leq \int_0^1 u(t)\, dt \cdot \int_0^1 v(t)\, dt$$

Αλλά $\quad u \cdot v \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{u \cdot v} \geq 1$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \sqrt{u \cdot v} \geq \int_0^1 1\, dt = 1$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \int_0^1 u \cdot \int_0^1 v .$$

(3) (Θ. Vitali) Έστω $(u_n) \subset L^1(0,1)$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη

δηλ. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall E \subset (0,1)$ με

$\lambda(E) < \delta$, ισχύει $\int_E |u_n| < \varepsilon, \ \forall n \geq 1$.

Υποθέτουμε ότι $u_n(t) \to u(t)$, σ.π.

όπου $u \in L^1$.

Να δ.ο. $\|u_n - u\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

(Υπόδειξη: Θ. Egorov.)

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0 \xRightarrow{\text{υπόθεση}} \exists \delta_1 > 0 \mid \forall E \subset (0,1)$ με $\lambda(E) < \delta_1$, ισχύει

$$\int_E |u_n| < \varepsilon/3, \quad \forall n \geq 1.$$

Επειδή $u \in L^1(0,1)$, $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall E \subset (0,1)$, με $\lambda(E) < \delta_2$, ισχύει

$$\int_E |u| < \varepsilon/3$$

Θέτουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τότε, $\forall E \subset (0,1)$

με $\lambda(E) < \delta$, ισχύει:

$$\int_E |u_n - u| \leq \int_E |u_n| + \int_E |u| < 2\varepsilon/3 \quad \forall n \geq 1 \qquad (1)$$

Θ. Egorov $\Longrightarrow \exists\, E \subset (0,1) \,|\, \lambda(E) < \delta$

κ' $u_n \to u$ ομοιόμορφα στο E^c

$\Longrightarrow \exists\, n_0 \,|\, \forall n \geq n_0,\ \forall t \in E^c,\quad |u_n(t) - u(t)| < \varepsilon/3$

$$\Longrightarrow \int_{E^c} |u_n - u| \leq \frac{\varepsilon}{3}\lambda(E^c) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}\lambda((0,1)) = \frac{\varepsilon}{3}$$

$\forall n \geq n_0$ (2)

Tf Zind, $\forall n \geq n_0$,

$$\|u_n - u\|_1 = \int_E |u_n - u| + \int_{E^c} |u_n - u| \overset{(1),(2)}{\leq}$$

$$< 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \quad \boxtimes$$