ΑΣΚΗΣΕΙΣ 03/06/2021

(1) Έστω X χώρος Banach.

(i) Εάν $(f_n) \subset X^*$ w^*-συγκλίνουσα, τότε $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Λύση: Έστω $f_n \xrightarrow{w^*} f$, $f \in X^*$. Τότε,

$$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x), \quad \forall x \in X.$$

$\forall x \in X$, $\sup_n |f_n(x)| < \infty \Longrightarrow$ η (f_n) είναι

κ.σ. φραγμένη $\xRightarrow[\text{Α.Ο.Φ.}]{X \text{ Banach!}}$ $\sup_n \|f_n\| < \infty$

(ii) Υποθέτουμε ότι X διαχωρ. χ. Banach κ' (x_n) $\|\cdot\|$-πυκνό στην $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : X^* \to \ell^2$$

με

$$T(f) = \left(\frac{f(x_n)}{n} \right)_{n \geq 1}.$$

(α) T καλώς ορισμένος, γραμμικός, φραγμένος, 1-1.

(ΔΕΙΤΕ το!)

(β) ο T είναι ακολουθιακά w^*-w συνεχής.

Λύση: Αρκεί να το δείξω για το 0.

Έστω $f_n \xrightarrow{w^*} 0$. Θα δ.ο. $T(f_n) \xrightarrow{w} 0$ στον ℓ^2

$$\iff \forall y \in \ell^2, \quad \langle T(f_n), y \rangle_{\ell^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \forall y \in \ell^2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} T(f_n)(k)\, y(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \forall y \in \ell^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n(x_k)}{k}\, y(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

[Αρκεί $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f_n(x_k)}{k}\, y(k) \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\forall y \in \ell^2$ με $\|y\|_2 = 1$]

Έστω $y \in \ell^2$ με $\|y\|_2 = 1$.

(i) $\Longrightarrow$ $\sup_n \|f_n\| = M < \infty$

Έστω $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists N \mid \left(\sum_{k>N} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2M}$ (1)

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k>N} \left| \frac{f_n(x_k)}{k} y(k) \right| \leq \sum_{k \geq N} \frac{\|f_n\| \cdot \|x_k\|}{k} |y(k)|$$

$$\leq M \sum_{k>N} \frac{1}{k} |y(k)| \underset{(1)}{\overset{C-S}{\leq}} \varepsilon / 2$$

Επιπλέον, για $1 \leq k \leq N$, $f_n(x_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |f_n(x_k)| \cdot \frac{|y(k)|}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{f_n(x_k) y(k)}{k} \right| < \varepsilon/2$$

Τελικά, $\forall n \geq n_0$, $$\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{f_n(x_k) y(k)}{k} \right| < \varepsilon.$$

(γ) Να δ.ο. ό $T|_{B_{X^*}}$ είναι w^*–w συνεχής.

<u>Λύση:</u> X διαχωρ. $\Longrightarrow$ (B_{X^*}, w^*) <u>μετρικοποιήσιμος</u>!!

Αλλά (β) $\Longrightarrow$ $T|_{B_{X^*}} : (B_{X^*}, w^*) \to (\ell^2, w)$ είναι ακολουθιακά συνεχής, άρα κ' συνεχής. (+)

(+) εάν E <u>μετρικός χώρος</u>, Y τοπολογικός κ' $T: E \to Y$ ακολουθιακά συνεχής, τότε T συνεχής.

(2) Έστω X, Y χώροι με νόρμα (X Banach!)

κ' $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ ώστε:

(H1): $\forall x \in X$, η $Y \ni y \mapsto a(x, y)$ είναι γραμμική συνεχής.

(H2): $\forall y \in Y$, η $X \ni x \mapsto a(x, y)$ είναι γραμμική συνεχής.

Να δ.ο. $\exists C > 0 \,|\, \forall (x, y) \in X \times Y$,

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \cdot \|y\|.$$

Λύση: Θεωρούμε τον τελεστή $T : X \to Y^*$ με

$$T(x)(y) = a(x,y), \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Λόγω της (H1), ο T είναι καλώς ορισμένος.

$$\left[Y \ni y \xmapsto{T(x)} a(x,y) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X. \right]$$

T γραμμικός (βλ. (H2)).

Ισχυρ. T φραγμένος Θα χρησιμοποι. το Θ. Κλειστού Γραφήματος (X, Y^* Banach).

Έστω $x_n \to x$, $T(x_n) \to g$, $x \in X$, $g \in Y^*$.

Θα δ.ο. $g = T(x)$, δηλ. $g(y) = a(x,y)$, $\forall y \in Y$.

Έχουμε: $\forall y \in Y$,

$$\left.\begin{array}{l} T(x_n)(y) \longrightarrow g(y) \\ \quad \| \\ a(x_n, y) \xrightarrow{(H2)} a(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow g(y) = a(x,y) = T(x)(y) \quad \forall y \in Y$$

$$\Rightarrow \quad g = T(x).$$

Ο T είναι φραγμένος $\Rightarrow \exists\, C>0 \mid \forall x \in X$, $\|T(x)\| \leq C\|x\| \Rightarrow \forall (x,y) \in X \times Y$,

$$|a(x,y)| = |T(x)(y)| \leq \|T(x)\| \cdot \|y\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|. \quad \boxtimes$$

(3) Έστω $u \in L^\infty(0,1)$, $u \not\equiv 0$.

<u>(i)</u> <u>Εάν</u> $0 < c < \|u\|_\infty$ κ'

$E_c = \{ t \in (0,1) : \ |u(t)| > c \}$, να δ.ο.

$$\left[\lambda(E_c) > 0 \text{ κ' } c\left(\lambda(E_c)\right)^{1/p} \leq \|u\|_p \leq \|u\|_\infty, \forall p \in [1,\infty). \right]$$

όπου λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Αν ήταν $\lambda(E_c) = 0$, τότε το c θα ήταν ουσιώδες φράγμα της u (Άτοπο), αφού

$c < \|u\|_\infty = \inf\{$τα ουσιώδη φράγματα της $u\}$.

Άρα, $\underline{\lambda(E_c) > 0}$. Τότε,

$$\|u\|_p^p = \int_0^1 |u(t)|^p dt \geq \int_{E_c} |u(t)|^p dt$$

$$\geq \int_{E_c} c^p dt =$$

$$= c^p \lambda(E_c)$$

$$\Longrightarrow \underline{\|u\|_p \geq c\left[\lambda(E_c)\right]^{1/p}}, \quad \forall p \in [1, \infty).$$

Επίσης, $|u(t)|^p \leq \|u\|_\infty^p$, σ.π.

$$\Rightarrow \int_0^1 |u(t)|^p dt \leq \int_0^1 \|u\|_\infty^p = $$

$$= \|u\|_\infty^p$$

$$\Rightarrow \underline{\|u\|_p \leq \|u\|_\infty}.$$

(ii) Να δ.ο. $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$.

Λύση: Έστω $p_n \to \infty$ και $0 < c < \|u\|_\infty$. Τότε, από (i),

$$c\,\lambda(E_c)^{1/p_n} \le \underbrace{\|u\|_{p_n}}_{= a_n} \le \|u\|_\infty, \ \forall n$$

Σταθεροποιώ $c \in (0, \|u\|_\infty)$. $\forall n \geq 1$,

$$c\lambda(E_c)^{1/p_n} \le a_n \le \|u\|_\infty$$

Αφού $\lim_n \lambda(E_c)^{1/p_n} = 1$, παίρνω

$$c \leq \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n \leq \|u\|_\infty .$$

Η τελευταία ισχύει $\forall c \in (0, \|u\|_\infty)$.

Παίρνοντας το όριο καθώς $c \to \|u\|_\infty$, έχουμε

$$\|u\|_\infty \leq \underline{\lim}_n a_n \leq \overline{\lim}_n a_n \leq \|u\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}_n a_n = \underline{\lim}_n a_n = \|u\|_\infty$$

$\Rightarrow \lim a_n = \|u\|_\infty$

Δηλ. $\lim_n \|u\|_{p_n} = \|u\|_\infty$.

(iii) Θέτουμε $\gamma_n = \int_0^1 |u(t)|^n \, dt, \; n \geq 1$.

$$= \|u\|_n^n .$$

(α) Να δ.ο. $\gamma_n^{1/n} \leq \dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \; \forall n \geq 1$.

(β) Να δ.ο. $\lim_n \dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|u\|_\infty$.

Λύση:

(α) $\gamma_n = \int_0^1 |u|^n \cdot 1, \quad n \geq 1.$

$p = \frac{n+1}{n}, \quad q = \frac{p}{p-1} = n+1, \quad 1/p + 1/q = 1$

$$\gamma_n \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^1 (|u|^n)^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^1 1^q\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_0^1 |u|^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot 1 = \gamma_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \gamma_n^{\frac{n+1}{n}} \leq \gamma_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_n^{1+\frac{1}{n}} \leq \gamma_{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_n^{1/n} \leq \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

(b) Even $0 < c < \|u\|_\infty$,

$$E_c = \{t : |u(t)| > c\}$$

(i)

$$\Longrightarrow \quad c\,\lambda(E_c)^{1/n} \leq \underline{\|u\|_n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow c\,\lambda(E_c)^{1/n} \leq \gamma_n^{1/n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Επιπλέον,

$$\gamma_{n+1} = \int_0^1 |u|^{n+1} = \int_0^1 |u|^n \cdot |u|$$

$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 |u|^n$$

$$= \|u\|_\infty \cdot \gamma_n$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \underline{\leq \|u\|_\infty}, \quad \forall n \geq 1.$$

Άρα,

$$c\,\lambda(E_\varepsilon)^{1/n} \leq \gamma_n^{1/n} \overset{(a)}{\leq} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Για σταθερό $c \in (0, \|u\|_\infty)$, αφού $\lim_n \lambda(E_\varepsilon)^{1/n} = 1$, έχουμε

$$c \leq \varliminf_n \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \varlimsup_n \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \|u\|_\infty.$$

Για $c \to \|u\|_\infty$, παίρνουμε τελικά

$$\lim_n \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|u\|_\infty.$$