ΛΥΣΗ ΑΣΚ. 13, ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

<u>(i)</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : X \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = |f(x)|$, $x \in X$.

Η φ είναι w-συνεχής. [Πράγματι· αν $(x_\lambda) \subseteq X$ δίκτυο με $x_\lambda \xrightarrow{w} x$,

τότε $f(x_\lambda) \to f(x) \Rightarrow |f(x_\lambda)| \to |f(x)|$.]

Επειδή B_X w-συμπαγές (σημ. ότι X αυτοπαθής),

το $\varphi(B_X)$ είναι συμπαγές $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists z_0 \in B_X \mid \varphi(z_0) = \sup \varphi(B_X)$

δηλ. $|f(z_0)| = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|$.

Τότε, $\|f\| \leq \|f\| \cdot \|z_0\| \Rightarrow 1 \leq \|z_0\| \leq 1 \Rightarrow \|z_0\| = 1$.

Θέτουμε $x_0 = \begin{cases} z_0, & \text{αν } f(z_0) \geq 0 \\ -z_0, & \text{αν } f(z_0) < 0 \end{cases}$. Τότε,

$\|x_0\| = 1$ κ' $f(x_0) = |f(z_0)| = \|f\|$.

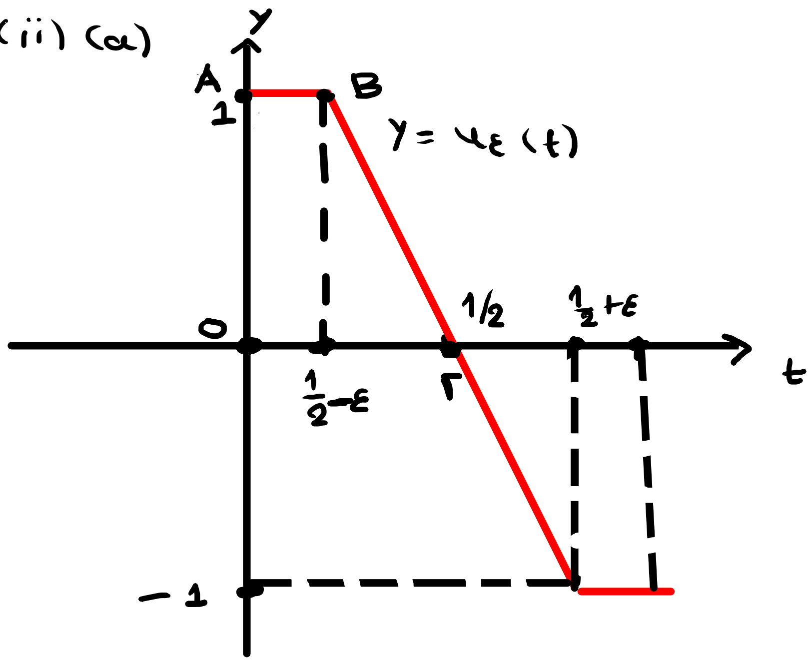
Β' ΤΡΟΠΟΣ

Hahn-Banach $\Rightarrow$ $\exists\, F \in X^{**}$: $\|F\| = 1$, $F(f) = \|f\|$.

Αλλά η $e: X \to X^{**}$ είναι επί, οπότε $\exists\, x_0 \in X$: $F = e(x_0)$.

Τότε, $\|x_0\| = \|e(x_0)\| = \|F\| = 1$, $f(x_0) = e(x_0)(f) = F(f) = \|f\|$.

(ii) (α)



$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \\ (1-2t)/2\varepsilon, & t \in [\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon] \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}+\varepsilon, 1] \end{cases}$$

(b) $\forall u \in C[0,1]$,

$$|f(u)| \leq \int_0^{1/2} |u(t)|dt + \int_{1/2}^1 |u(t)|dt \leq \|u\|_\infty \left(\int_0^{1/2} dt + \int_{1/2}^1 dt\right)$$
$$= \|u\|_\infty$$

$\Rightarrow$ f φραγμένο κ' $\|f\| \leq 1$.

- Έστω $\varepsilon \in (0,1/2)$ κ' $u_\varepsilon \in C[0,1]$ όπως στο (a). Τότε,

$$f(u_\varepsilon) = \int_0^{1/2} u_\varepsilon(t)dt - \int_{1/2}^1 u_\varepsilon(t)dt = \int_0^1 |u_\varepsilon(t)|dt =$$

$= 2$ εμβαδό τραπ. $(OAB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1 - \varepsilon$

κ' άρα

$$1 - \varepsilon = f(u_\varepsilon) \leq \|f\| \cdot \|u_\varepsilon\|_\infty = \|f\|, \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Για $\varepsilon \to 0^+$, παίρνουμε $1 \leq \|f\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \|f\| = 1.$

Υποθέτουμε ότι $\exists\ u \in C[0,1] \mid$

$$\|u\|_\infty = 1, \quad f(u) = \|f\| = 1.$$

Τότε,

$$1 = \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} u(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{1/2} [1 - u(t)]\,dt + \int_{1/2}^{1} [1 + u(t)]\,dt = 0 \quad \xRightarrow{(-1 \le u \le 1)}$$

$$\int_0^{1/2} [1 - u(t)]\,dt = \int_{1/2}^{1} [1 + u(t)]\,dt = 0 \quad \Rightarrow$$

$(-1 \leq u \leq 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-u(t)=0, & \forall t \in [0,1/2] \\ 1+u(t)=0, & \forall t \in [1/2,1] \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad u|_{[0,1/2]} = 1, \quad u|_{[1/2,1]} = -1$ (Άτοπο), διότι

u συνεχής στο $[0,1]$.

Άρα, δεν υπάρχει $u \in C[0,1] \mid \|u\|_\infty = 1, \ f(u) = \|f\|$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι ανακλαστικός.

$\boxtimes$