Ασκήσεις (01/06/2021)

① Έστω X τ.γ.χ. κ' $K, F \subset X$ μη κενά, K συμπαγές, F κλειστό, με $K \cap F = \emptyset$.

Να δ.ο. $\exists$ V $\underbrace{\text{ανοικτό}}_{\text{ισορροπ.}}$ με $0 \in V$ ώστε

$$(K+V) \cap F = \emptyset .$$

[<u>υπόδ</u>: Να δ.ο. $\forall x \in K$, $\exists$ W_x ισορροπημένο ανοικτό $\ni 0$ με $x + W_x + W_x \subset F^c$.]

<u>Λύση</u>: $\forall x \in K$, $x \in F^c$ = ανοικτό

$\Rightarrow$ $\exists$ U_x ανοικτό $\ni 0$ / $\underline{x + U_x} \subset F^c$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ W_x$ <u>ανοικτό, ισορροπ.</u> $\mid$ $\underline{0 \in W_x}$, $W_x + W_x \subset U_x$

$$\Longrightarrow \quad \underline{x + W_x + W_x \subset x + U_x \subset F^c, \ \forall x \in K} \qquad (1)$$

Η $\{x + W_x\}_{x \in K}$ είναι ανοικτή κάλυψη του K = συμπαγές $\Longrightarrow \exists\ x_1, x_2, \dots, x_N \in K \mid$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + W_{x_j}) \qquad (2)$$

Θέτουμε $V = \bigcap_{j=1}^{N} W_{x_j}$ = ανοικτό ισορρ. $\ni 0$.

Θα δ.ο. $(K+V)\cap F=\emptyset$.

Έστω $z\in K$, $v\in V$. Θα δ.ο. $z+v\in F^c$.

$(2)\Rightarrow \exists j \mid z\in x_j+W_{x_j} \Rightarrow \underline{z-x_j\in W_{x_j}}$

$$\Rightarrow z+v=\underbrace{(z-x_j)}_{\in W_{x_j}}+x_j+\underset{\in W_{x_j}}{v}\in x_j+W_{x_j}+W_{x_j}\subset F^c. \quad \boxtimes$$

(2) Έστω X τ.γ.χ., $K, F\subset X$ μη κενά.

(i) Εάν K, F συμπαγή, το $K+F$ είναι συμπαγές.

Λύση: $\varphi : X \times X \to X$, $\varphi(x,y) = x+y$

φ συνεχής (αν ο $X \times X$ εφοδιαστεί με την τοπολ. γινόμενο).

F, K συμπαγή $\subset X \Rightarrow K \times F$ συμπαγές στον $X \times X$ (Θ. Tychonoff)

φ συνεχής $\Rightarrow$ $\varphi(K \times F)$ συμπαγές $\Rightarrow$ $K+F$ συμπαγές.

(ii) Εάν K συμπαγές, F κλειστό, το $K+F$ είναι κλειστό.

Λύση: Έστω $x \in (K+F)^c \Rightarrow \underline{x \notin K+F}$

$\Rightarrow \underline{K \cap (x-F) = \emptyset}$

Άσκ. 1 $\Longrightarrow \exists\, V \overbrace{\text{ανοικτό}}^{\text{ισορροπ.}} \ni 0 \mid (K+V)\cap(x-F)=\emptyset.$

Θα δ.ο. $\underline{x+V \subset (K+F)^c}.$

Έστω $v\in V$. Αν $x+v\in K+F$, τότε

$x+v=k+f,\quad k\in K,\quad f\in F$

$$\Longrightarrow \underbrace{x-f}_{\in\; \underline{x-F}} = \underbrace{k-v}_{\in\; K-V=\underline{K+V}}.$$

(Άτοπο)

Άρα, $(K+F)^c$ ανοικτό $\Longrightarrow K+F$ κλειστό.

(iii) Εάν K, F κλειστά, δεν ισχύει γενικά $K+F$ κλειστό.

Π.χ. $K = \{ (x, \frac{1}{x}) : x>0 \}$

$F = \{ (-x, 0) : x>0 \}$

K, F κλειστά στον $\mathbb{R}^2$ με τη συνήθη τοπολογία

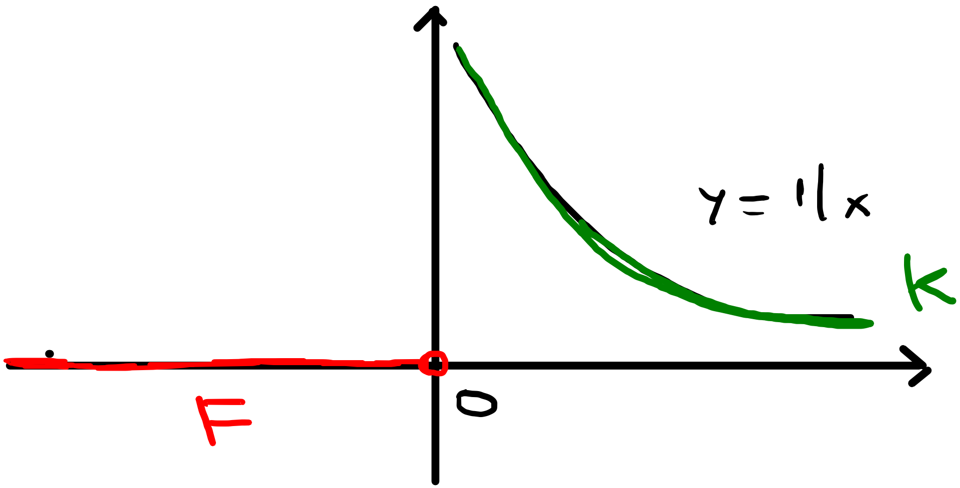
$(n, \frac{1}{n}) \subset K, \quad (-n, 0) \subset F$

$K+F \ni (n, \frac{1}{n}) + (-n, 0) = (0, \frac{1}{n}) \to (0,0)$

$(0,0) = (x, \frac{1}{x}) + (-t, 0) = (x-t, \frac{1}{x})$

(Άτοπο) $\quad (0,0) \notin K+F$

$\Rightarrow$ $K+F$ όχι κλειστό.



③ Έστω X ανακλ. χ. Banach και $(x_n) \subseteq X$ | $\forall f \in X^*$, το $\lim_n f(x_n) \in \mathbb{R}$.
Να δ.ο. $\exists x \in X$ | $x_n \xrightarrow{w} x$.

Λύση: Θα δ.ο. $\exists x \in X \mid \forall f \in X^*, \ f(x_n) \to f(x)$

Δηλ. $e(x)(f) = \lim_n f(x_n), \quad \forall f \in X^*$.

Σημ. ότι $e(X) = X^{**}$ (σημ. X ανακλαστικός)

Θέτουμε $\Lambda : X^* \to \mathbb{R}$ με $\Lambda(f) = \underbrace{\lim_n f(x_n)}, \ \forall f \in X^*$.

Ισχυρισμός: (x_n) $\|\cdot\|$-φραγμένη.

Η $(e(x_n))_{n \geq 1}$ είναι οικογένεια φραγμ. γραμμ. συναρτ. πάνω στον X^*=Banach.

Είναι κ.σ. φραγμένη διότι $\forall f \in X^*$,

$$\sup_{n \geq 1} |e(x_n)(f)| = \sup_n |f(x_n)| < \infty$$

$\xrightarrow{A.O.\Phi.}$ $\sup_n \|e(x_n)\| < \infty \Rightarrow \sup_n \|x_n\| = M < \infty.$

$\forall n, \quad \forall f \in X^*, \quad |f(x_n)| \le \|f\| \cdot \|x_n\| \le M\|f\|$

$\Rightarrow \forall f \in X^*, \quad |\lim_n f(x_n)| \le M\|f\|$

dη λ. $\underline{|\Lambda(f)| \le M \cdot \|f\|}$

$\Rightarrow \quad \Lambda \in X^{**} = e(X) \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \mid$

$\Lambda = e(x) \Rightarrow \forall f \in X^*,$

$f(x) = \Lambda(f) = \lim_n f(x_n) \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{w} x.$

④ Στην άσκ. 3, η υπόθεση "X αναυλαστικός" μπορεί να παραληφθεί ?

Όχι

Π.χ. $X = c_0$ = δεν είναι αναυλ. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

Θέτουμε $x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-\text{όροι}}, 0, 0, 0, \dots)$, $n \geq 1$.

Θα δ.ο. $\forall f \in X^*$, $\lim_n f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Έστω $f \in X^* = c_0^* \Rightarrow \exists\ z \in \ell^1 \mid f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z(k), \forall x \in c_0$.

Τότε, $\forall n \geq 1$,

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) z(k) = \sum_{k=1}^{n} z(k)$$ συγκλίνει γιατί $\sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| < \infty$

Άρα, $\forall f \in c_0^*$, $\lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι $\exists x \in c_0 \mid x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε,

$\forall z \in \ell^1$,

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) z(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z(k)$$

$\Longrightarrow \forall m \geq 1$, $e_m = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ m}}{1}, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$

$$\Longrightarrow \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) e_m(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) e_m(k)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_n x_n(m) = x(m), \quad \forall m \geq 1.$$

Έστω $m \geq 1$. $\forall n \geq m$, $x_n(m) = 1$

[οπότε $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \ldots)$]

$$\Longrightarrow \quad \lim_n x_n(m) = 1 \Longrightarrow x(m) = 1 \quad \forall m \geq 1$$

(Άτοπο) διότι $\lim_{m\to\infty} x(m) = 0$.

⑤ Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ διαχωρ. απειροδ. χ. Hilbert κ' (e_n) ορθοκανονική βάση του H.

(i) Έστω $(x_n) \subset H$, $x \in H$ ώστε

- $\sup_n \|x_n\| < \infty$
- $\langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, e_j \rangle$, $\forall j \geq 1$.

Να δ.ο. $x_n \xrightarrow{w} x$.

(ii) $\forall x \in B_H$ $(\|x\| \leq 1)$, $\exists (x_n) \subset S_X$ $(\|x_n\| = 1)$

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

<u>Απόδ:</u>

<u>(i)</u> $\Leftarrow$ (γ): $\left\{ \begin{array}{l} \sup_n \|x_n\| = M < \infty \\ \langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, e_j \rangle, \ \forall j. \end{array} \right.$

Για να δ.ο. $x_n \xrightarrow{w} x$, από Θ. Riesz, θα πρέπει να δ.ο. $\forall z \in H$, $\langle x_n, z \rangle \xrightarrow{n} \langle x, z \rangle$

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_n, e_j \rangle \langle z, e_j \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle z, e_j \rangle$$

$$\iff \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_n - x, e_j \rangle \langle z, e_j \rangle = 0$$

Αρκεί
$$\lim_n \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \underbrace{x_n - x}_{y_n}, e_j \rangle| \cdot |\langle z, e_j \rangle| = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι $\underline{\langle y_n, e_j \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ \forall j.}$

Έστω $z \in H$, $\varepsilon > 0$.

Επειδή
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle z, e_j \rangle|^2 = \|z\|^2 < \infty,$$

$\exists N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 1)$ ώστε
$$\boxed{\sum_{j>N} |\langle z, e_j \rangle|^2 < \left[\frac{\varepsilon}{2(M + \|x\|)}\right]^2.} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{j>N} |\langle y_n, e_j\rangle| \cdot |\langle z, e_j\rangle| \overset{[\text{Cauchy}}{\underset{\text{Schwarz}]}{\leq}}$$

$$\leq \left(\sum_{j>N} |\langle y_n, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j>N} |\langle z, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle y_n, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j>N}^{\infty} |\langle z, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|y_n\| \cdot \left(\sum_{j>N} |\langle z, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq (M+\|x\|)\left(\sum_{j>N} |\langle z, e_j\rangle|^2\right)^{1/2} \overset{(3)}{<} \varepsilon/2 .$$

Τελικά, $$\sum_{j>N}^{\infty} |\langle y_n, e_j\rangle| \cdot |\langle z, e_j\rangle| < \varepsilon/2, \quad (4) \quad \forall n \geq 1 .$$

Ταυτόχρονα, $\lim_n |\langle y_n, e_j\rangle| = 0, \ \forall j$

$$\Longrightarrow \lim_n |\langle y_n, e_j\rangle| \cdot |\langle z, e_j\rangle| = 0, \ \forall j$$

$$\Longrightarrow \lim_n \sum_{j=1}^{N} |\langle y_n, e_j\rangle| \cdot |\langle z, e_j\rangle| = 0$$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,$

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle y, e_j \rangle| < \varepsilon/2 .$$

(5)

$(4), (5) \Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle y, e_j \rangle| < \varepsilon .$

(ii) Έστω $x \in B_X$ (δηλ. $\|x\| \le 1$).

$\forall n \geq 1$, $\underbrace{\langle e_1, e_2, \dots, e_n, x \rangle}_{\text{κλειστός γραμμικός υπόχ.}} \subsetneq H$ (σημ. $\dim H = \infty$!)

$\Rightarrow$ $\exists\, z_n \in \langle e_1, e_2, \dots, e_n, x \rangle^{\perp}$ ώ' $\|z_n\| = 1$. (6)

Θέτουμε

$$x_n = \sqrt{1 - \|x\|^2}\; z_n + x, \quad n \geq 1.$$

Τότε, $\langle z_n, x \rangle \overset{(6)}{=} 0 \Rightarrow \|x_n\|^2 \overset{(6)}{=} (1 - \|x\|^2) + \|x\|^2 = 1$

$\Rightarrow$ $\|x_n\| = 1$, $n \geq 1$. Επιπλέον, $\forall j$, $\langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, e_j \rangle$.

[Πράγματι: έστω $j \geq 1$. Τότε, $\forall n \geq j$,

αφού $z_n \overset{(6)}{\in} \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, ισχύει $\langle z_n, e_j \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$.]

Από (i), $x_n \xrightarrow{w} x$. $\boxtimes$

<u>Σχόλιο:</u> Ισχύει κάτι γενικότερο:

(6) Έστω X χώρος με νόρμα ώστε $\dim X = \infty$ κ' X^* διαχωρίσιμος. Τότε, $\forall x \in B_X$, $\exists (x_n) \subset S_X$: $x_n \xrightarrow{w} x$.

<u>Απόδειξη:</u> $B_X = \overline{S_X}^w$ (άσκηση 7, φυλλάδιο 1).

Επιπλέον, αφού X^* διαχωρ., ο (B_X, w) <u>είναι μετρικοποιήσιμος</u>

Επομένως, αν $x \in B_X = \overline{S_X}^{w}$, $\exists (x_n) \subset S_X : x_n \xrightarrow{w} x$. ☒

(7) Η υπόθεση "X^* διαχωρ." στην άσκ. (6) μπορεί να παραλειφθεί;

<u>Λύση:</u> <u>όχι</u>. π.χ. $X = \ell^1$, $X^* \equiv \ell^\infty$ = όχι διαχωρίσιμος.

Εάν $(x_n) \subset S_{\ell^1}$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$ $\underset{\text{Ιδιότητα Schur!!}}{\Longrightarrow}$ $\|x_n\| \to 0$ (Άτοπο!)