

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ II**

**Θεωρήματα Ανοικτής Απεικόνισης και Κλειστού Γραφήματος
Χώροι $L^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$.**

1. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Να δείξετε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος (επί) αν
 - (i) $T(X)$ $\|\cdot\|$ -πυκνό στον Y και
 - (ii) υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq c\|x\|$, $\forall x \in X$.
2. (i) Εάν X χώρος με νόρμα και Z_1, Z_2 γραμμικοί υπόχωροι ώστε Z_1 κλειστός και Z_2 πεπερασμένης διάστασης, να δείξετε ότι ο $Z_1 + Z_2$ είναι κλειστός.
 - (ii) Έστω X, Y χώροι Banach, $Z \subseteq X$ και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Να δείξετε ότι:
 - (α) $T[X \setminus (Z + \text{Ker}T)] = Y \setminus T(Z)$.
 - (β) $T(Z)$ κλειστό αν $Z + \text{Ker}T$ κλειστό.
 - (γ) Εάν Z κλειστός γραμμικός υπόχωρος και ο $\text{Ker}T$ είναι πεπερασμένης διάστασης, να δείξετε ότι ο $T(Z)$ είναι κλειστός.

3. Για κάθε $x \in c_0(\mathbb{N})$ ορίζουμε

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)|.$$

Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|$ είναι καλώς ορισμένη νόρμα και ότι ο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ δεν είναι Banach. [Υπόδειξη: Οι νόρμες $\|\cdot\|, \|\cdot\|_{\infty}$ συγκρίνονται.]

4. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Να δείξετε ότι:
 - (i) Υπάρχει $M > 0$ ώστε: $\forall y \in Y, \exists x \in X$ με

$$y = Tx, \quad \|x\| \leq M\|y\|.$$
 - (ii) Έστω $H : l^1 \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Να δείξετε ότι:
 - (α) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ ώστε

$$Tx_n = He_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

όπου (e_n) η φυσική βάση του l^1 .

(β) Υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $G : l^1 \rightarrow X$ ώστε $T \circ G = H$.

(iii) Εάν Y διαχωρίσιμος, τότε υπάρχει Z διαχωρίσιμος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X ώστε $Y = T(Z)$.

[Υπόδειξη: Υπάρχει $H : l^1 \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί.]

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι ανοικτή απεικόνιση. Να δείξετε ότι εάν ο X είναι Banach, τότε και ο Y είναι Banach.

[Υπόδειξη: Ισχύει κι εδώ το ερώτ. (i) της προηγούμενης άσκησης.]

6. Έστω $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ γραμμικός τελεστής.

(i) Έστω $x, y \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε

$$\langle y - Tz, x - z \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}.$$

Να δείξετε ότι $y = Tx$.

(ii) Υποθέτουμε ότι $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}$. Να δείξετε ότι ο T είναι φραγμένος. [Υπόδειξη: Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.]

7. (i) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq C[0, 1]$ με

$$u_n(t) = 1 - nt, \quad \forall t \in [0, 1/n), \quad u_n(t) = 0, \quad \forall t \in [1/n, 1].$$

Να δείξετε ότι

$$\lim_n \int_0^1 u_n(t)g(t)dt = 0, \quad \forall g \in L^1(0, 1).$$

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\Phi \in [L^\infty(0, 1)]^*$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(u) = u(0), \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Για το παραπάνω συναρτησιακό Φ και χρησιμοποιώντας το ερώτ.(i), να δείξετε επιπλέον ότι δεν υπάρχει $g \in L^1(0, 1)$ τέτοια ώστε

$$\Phi(u) = \int_0^1 u(t)g(t)dt, \quad \forall u \in L^\infty(0, 1).$$

8. (i) Έστω $1 \leq r < p < \infty$. Εάν $u \in L^p(0, 1)$, να δείξετε ότι $\|u\|_r \leq \|u\|_p$.

[Υπόδειξη: Ανισότητα Hölder.]

Συμπεράνατε ότι $L^p(0, 1) \subseteq L^r(0, 1)$.

(ii) Έστω $1 \leq r < p < s < \infty$ και $u \in L^r(0, 1) \cap L^s(0, 1)$. Εάν $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{s},$$

να δείξετε ότι $\|u\|_p \leq \|u\|_r^\alpha \cdot \|u\|_s^{1-\alpha}$.

[Υπόδειξη: Εάν $p' = \frac{r}{\alpha}$, $q' = \frac{s}{(1-\alpha)}$, να παρατηρήσετε ότι

$$1/p' + 1/q' = 1, \quad r/p' + s/q' = p$$

και να εφαρμόσετε την ανισότητα Hölder.]

Συμπεράνατε ότι $L^r(0, 1) \cap L^s(0, 1) \subseteq L^p(0, 1)$.

9. Έστω $(u_n) \subseteq L^p(0, 1)$, $u \in L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$ ώστε

$$\lim_n \|u_n\|_p = \|u\|_p, \quad u_n(t) \rightarrow u(t), \text{ σχεδόν παντού στο } (0, 1).$$

Να δείξετε ότι $\lim_n \|u_n - u\|_p = 0$.

[Υπόδειξη: Λήμμα του Fatou στην ακολουθία συναρτήσεων

$$g_n = [2^{p-1}(|u_n|^p + |u|^p) - |u_n - u|^p], \quad n \geq 1.]$$

10. Έστω $(u_n) \subseteq L^p(0, 1)$, $u \in L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ ώστε

$$\sup_n \|u_n\|_p < \infty, \quad u_n(t) \rightarrow u(t), \text{ σχεδόν παντού στο } (0, 1).$$

Να δείξετε ότι $u_n \xrightarrow{w} u$ στον $L^p(0, 1)$.

[Υπόδειξη: Θ. Egorov και το παρακάτω:

$$\lim_{|E| \rightarrow 0} \int_E g(t) dt = 0, \quad \forall g \in L^1(0, 1).]$$

11. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$u_n(t) = ne^{-nt}, \quad t \in (0, 1), \quad n \geq 1.$$

Να δείξετε ότι

$$\sup_n \|u_n\|_1 < \infty, \quad u_n(t) \rightarrow 0, \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0, 1)$$

αλλά δεν ισχύει ότι $u_n \xrightarrow{w} 0$ στον $L^1(0, 1)$.

[Επομένως, το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης δεν ισχύει για $p = 1$.]

12. Έστω $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $q > 1$. Υποθέτουμε ότι

$$u \cdot v \in L^1(0, 1), \quad \forall v \in L^q(0, 1).$$

Να δείξετε ότι:

(i) υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|u \cdot v\|_1 \leq M \|v\|_q, \quad \forall v \in L^q(0, 1).$$

(Υπόδειξη: Θ. Κλειστού γραφήματος σε κατάλληλο τελεστή.)

(ii) το συναρτησιακό $\Phi_u : L^q(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\Phi_u(v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt, \quad \forall v \in L^q(0, 1)$$

είναι γραμμικό και φραγμένο.

(iii) $u \in L^p(0, 1)$.

[Να θεωρήσετε γνωστό το παρακάτω αποτέλεσμα της Θ. Μέτρου:

“Αν $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε

$$\int_0^1 h(t)v(t)dt = 0, \quad \forall v \in L^q(0, 1),$$

τότε $h(t) = 0$, σ.π. στο $(0, 1)$. ”]