(2)

Άσκηση 2:

Λύση: α) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$ τότε αφού η f συνεχής και $[a,b]$ κλειστό και φραγμένο έχουμε ότι η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, υπάρχει $x_0\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν $f(x_0)=\theta$, $\theta>0$ έχουμε το ζητούμενο.

Όμοια για $f(x)<0$.

β) Εάν συμβαίνουν και τα δύο ενδεχόμενα, αφού η f συνεχής υπάρχει $x_0\in[a,b]: f(x_0)=0$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 3:

Λύση: α) Έστω $x\in\mathbb{R}$. Από πυκνότητα ρητών υπάρχει $(x_n)\subset\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $x_n\to x$. Αφού η f συνεχής, από αρχή μεταφοράς: $f(x_n)\to f(x)$.

Η $(f(x_n))$ είναι η μηδενική ακολουθία και επομένως $f(x)=0$. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε την $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε το α).

Άσκηση 4:

Λύση: Εφαρμόζουμε την παρακάτω πιο γενική πρόταση.

Πρόταση: Έστω $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Τότε το σύνολο $\Sigma_f = \{x \in \mathbb{R} : g_1(x) = g_2(x)\}$ είναι το σύνολο των σημείων συνέχειας της f.

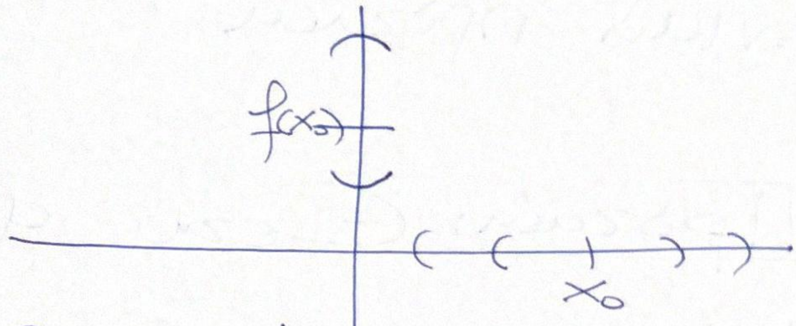
Απόδειξη: Έστω $x_0 \notin \Sigma_f$. Τότε υπάρχει $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ με $x_n \to x_0$ και αφού η g_1 είναι συνεχής από αρχή μεταφοράς: $g_1(x_n) \to g_1(x_0)$ και επομένως, $f(x_n) \to g_1(x_0)$.

Επίσης, υπάρχει $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $y_n \to x_0$ και αφού η g_2 είναι συνεχής $g_2(y_n) \to g_2(x_0)$, δηλαδή $f(y_n) \to g_2(x_0)$.

Αφού $f(x_n) \to g_1(x_0)$ και $f(y_n) \to g_2(x_0)$ έχουμε ότι αν $x_0 \notin \Sigma_f$ η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Έστω τώρα $x_0 \in \Sigma_f$, δηλαδή

$g_1(x_0) = g_2(x_0)$



Έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε αφού η g_1 συνεχής υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta_1$

$$\Rightarrow |g_1(x) - g_1(x_0)| < \varepsilon.$$

Επίσης αφού η g_2 συνεχής υπάρχει $\delta_2 > 0$ τ.ω.: αν $|x - x_0| < \delta_2$

$$\Rightarrow |g_2(x) - g_2(x_0)| < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν

$$|x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Άσκηση 5:

Λύση: Ορισμός ορίων: Για $\varepsilon = f(0)$ έχουμε ότι υπάρχει $M>0$:

$$f(x) < f(0) \text{ για κάθε } x$$

με $|x|>M$.

Επειδή η f συνεχής στο $[-M, M]$ και το $[-M, M]$ είναι κλειστό και φραγμένο έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [-M, M]$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in [-M, M]$

Αν $x \notin [-M, M]$ τότε $|x|>M$ και επομένως, αφού $0 \in [-M, M]$ έχουμε ότι

$$f(x) < f(0) \leq f(x_0).$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq f(x_0)$ και άρα η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο x_0.

Άσκηση 6:

Λύση: α) Η g είναι γν. φθίνουσα:

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$

$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g γν. φθίνουσα

· $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

· $x \geq f(x) \overset{f \text{ φθ.}}{\Rightarrow} f(x) \leq f(f(x))$

$\Rightarrow f(f(x)) - f(x) \geq 0$

$\Rightarrow g(f(x)) \geq 0$.

Επειδή $x \geq f(x) \Rightarrow f(x) - x \leq 0$

$\Rightarrow g(x) \leq 0$

Επομένως, $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$.

· Όμοια, για $x \leq f(x)$,

$g(f(x)) \leq 0$ και $g(x) \geq 0$.

Συνεπώς, $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

β) Θεωρούμε την g όπως στο α) η οποία είναι συνεχής αφού η f συνεχής.

Αν $c \in \mathbb{R}$ τότε $g(c) \cdot g(f(c)) \leq 0$ (5)

Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει x_0 μεταξύ των c και $f(c)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = x_0.$$

Επειδή η f είναι φθίνουσα είναι και 1-1, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

<u>Άσκηση 7:</u>

<u>Λύση</u>: α) Έστω $\varepsilon > 0$ τότε για $\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0$ έχουμε ότι αν $|x-y| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < C \cdot \delta = \varepsilon.$$

β) Από Θεώρημα Μέσης Τιμής για κάθε x, y με $x \neq y$ υπάρχει ξ μεταξύ των x και y ώστε

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| = |f'(\xi)|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x-y| \text{ για κάθε } x, y \in I.$$

Επομένως, η f είναι Lipschitz.

Άσκηση 8:

α) Για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$

β) 1) => 2) Έστω ότι η f ομ. συνεχής και $(x_n), (y_n) \subset X$ ακολουθίες με $x_n - y_n \to 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n - y_n \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - y_n| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.
Επομένως, αφού η f ομοιόμορφα συνεχής για κάθε $n \geq n_0$: $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$
δηλαδή, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

2) => 1) Έστω ότι για κάθε $(x_n), (y_n) \subset X$ με $x_n - y_n \to 0$ έχουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Υποθέτουμε πως η f δεν είναι ομ. συνεχής.

Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με $|x - y| < \delta$ και
$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Αν $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $(x_n), (y_n) \subset X$ με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Επομένως, $x_n - y_n \to 0$ και
$f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο.

γ) Παρατηρούμε ότι ενώ

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \to 0$$

έχουμε ότι: $f(x_n) - f(y_n) \to 1 \neq 0$.

δ) Έστω ότι η f δεν είναι ομ. συνεχής. Τότε υπάρχουν $(x_n), (y_n)$ στο $[a,b]$ και κάποιο $\varepsilon > 0$ ώστε $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει x_{k_n} υπακολουθία της x_n και $x \in [a,b]$ ώστε $x_{k_n} \to x$.

Όμως $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$ και συνεπώς

$$y_{k_n} \to x.$$

Εφόσον η f είναι συνεχής από αρχή μεταφοράς θα έχουμε ότι

$$f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to f(x) - f(x) = 0$$

το οποίο αντιφάσκει με το ότι

$$|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$$

και άρα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο.