ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)
2. **Νόμοι του Νεύτωνα**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt02)
3. **Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt03)
4. **Έργο – Ισχύς – Ενέργεια – Διατηρητικές Δυνάμεις (ΒΛΕΠΕ: Chapt04)**

5. Αρμονικές Ταλαντώσεις

Η ενότητα των αρμονικών ταλαντώσεων είναι ιδιαίτερα σημαντική επειδή αφορά όλα τα συστήματα τα οποία ευρίσκονται σε ευσταθή ισορροπία. Όπως δείξαμε και στην ενότητα τη σχετική με τις διατηρητικές δυνάμεις και με τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U = U(x)$, όταν ένα σύστημα βρίσκεται στην περιοχή ενός σημείου x_0 ευσταθούς ισορροπίας, τότε, για μικρές απομακρύνσεις από το σημείο αυτό, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor.

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_{x_0}(x-x_0)^3 + ...$$

Επειδή το x_0 έχει επιλεγεί ω σημείο ευσταθούς ισορροπίας, ισχύει $\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} = 0$ και $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} = k > 0$, οπότε, αν αρκεστούμε στην πρώτη σημαντική τάξη ως προς την απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας, που είναι ο τετραγωνικός όρος, έχουμε ότι η δυναμική ενέργεια, ως συνάρτηση της απομάκρυνσης $\eta = x - x_0$ από το σημείο ισορροπίας, γράφεται $U(\eta) \approx U_0(x_0) + \frac{1}{2}k\eta^2$, έχει, δηλαδή τη μορφή δυναμικής ενέργειας αρμονικού ταλαντωτή. Αυτή η συζήτηση δείχνει τη σημασία των αρμονικών ταλαντώσεων σε διαφορετικά συστήματα, μηχανικά, ηλεκτρικά, ακουστικά, οπτικά, κ.α..

Προκειμένου να προχωρήσουμε σε στοιχειωδώς επαρκή ανάλυση των αρμονικών ταλαντώσεων, θα προτάξουμε μία μικρή μαθηματική παρένθεση, για τους μιγαδικούς αριθμούς και για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

5.1 Μαθηματική Παρένθεση

Μιγαδικοί Αριθμοί

Αν ορίσουμε ως <u>φανταστική μονάδα</u> το σύμβολο «i», με την ιδιότητα $(\pm i)^2 = -1 \;\Rightarrow\; \pm i = \sqrt{-1}$, τότε ονομάζουμε <u>φανταστικό αριθμό</u> κάθε παράσταση της μορφής, $A = \pm i\,y$, όπου y: πραγματικός αριθμός. Κατ' αναλογία με τον «άξονα-*x*» των πραγματικών αριθμών, ορίζουμε τον «άξονα-*y*» των φανταστικών αριθμών, στον οποίον διατάσσουμε του φανταστικούς αριθμούς iy, και τον χαράσσουμε κάθετα στον άξονα-*x*.

Ορίζουμε ως <u>μιγαδικό αριθμό</u> $\tilde{z}$, κάθε παράσταση που γράφεται ως άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού αριθμού, $\tilde{z} = x + iy$. Ο αριθμός αυτός μπορεί να αναπαρασταθεί στο επίπεδο των αξόνων x και y, (που αναφέραμε προηγουμένως, και το οποίο ονομάζεται <u>μιγαδικό επίπεδο</u>), ως σημείο με συντεταγμένες τα x και y, που ονομάζονται πραγματικό, $x = \mathrm{Real}\{\tilde{z}\}$, και φανταστικό, $y = \mathrm{Im}\{\tilde{z}\}$, μέρος του μιγαδικού αριθμού, αντίστοιχα.

Ορίζουμε, επίσης, ως συζυγή μιγαδικό $\tilde{z}^*$ κάθε μιγαδικού αριθμού $\tilde{z} = x + iy$, τον μιγαδικό αριθμό $\tilde{z}^* = x - iy$.

Ορίσουμε ως <u>μέτρο του μιγαδικού αριθμού</u> $\tilde{z}$ τον πραγματικό αριθμό $z = |\tilde{z}| = \sqrt{\tilde{z}\tilde{z}^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ορίζουμε επίσης ως <u>φάση του μιγαδικού αριθμού</u> $\tilde{z}$ την γωνία φ που σχηματίζει, με τον άξονα των πραγματικών αριθμών x, η ευθεία που ενώνει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου (x=0, y=0) με τον μιγαδικό αριθμό, για την οποία ισχύει, $\tan\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, ισοδύναμα: $\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{x}{|\tilde{z}|} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\dfrac{x}{|\tilde{z}|}\right)$.

Για δύο μιγαδικούς αριθμούς $\tilde{z}_1 = x_1 + iy_1$ και $\tilde{z}_2 = x_2 + iy_2$, ορίζονται οι εξής αλγεβρικές πράξεις

Πρόσθεση: $\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

Πολλαπλασιασμός: $\tilde{z}_1\tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$

Δαίρεση: $\dfrac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \dfrac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2}\dfrac{\tilde{z}_2^*}{\tilde{z}_2^*} = \dfrac{\tilde{z}_1\tilde{z}_2^*}{|z_2|} = \dfrac{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Γενικεύοντας τις προηγούμενες σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε όλες τις δυνάμεις $\tilde{z}^n$ του μιγαδικού αριθμού $\tilde{z} = x + iy$, οπότε, για κάθε συνάρτηση $f = f(x)$ που αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά, μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f(\tilde{z})$, της μιγαδικής μεταβλητής $\tilde{z}$, μέσω της αντίστοιχης δυναμοσειράς. Με αυτήν την έννοια, μέσω του αναπτύγματος Taylor, ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση: $\exp(\tilde{z}) = 1 + \dfrac{\tilde{z}}{1!} + \dfrac{\tilde{z}^2}{2!} + \dfrac{\tilde{z}^3}{3!} + \ldots$, η οποία διατηρεί τη χαρακτηριστική της ιδιότητα, να παραμένει αμετάβλητη μετά από παραγώγιση ως προς $\tilde{z}$.

Όταν το όρισμα της προηγούμενης εκθετικής συνάρτησης είναι καθαρά φανταστικό, $\tilde{z} = ia$, τότε, αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμα Taylor, και αναπτύσσοντας ομαδοποιούμε τους όρους των άρτιων δυνάμεων, που είναι πραγματικοί εναλλασσόμενου προσήμου, και τους όρους των περιττών δυνάμεων, που είναι φανταστικοί, επίσης εναλλασσόμενου προσήμου. Η πρώτη ομάδα (πραγματικών όρων) αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα Taylor του συνημιτόνου, και η δεύτερη ομάδα (φανταστικών όρων) αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα Taylor του ημιτόνου (ποαλλαπλασιασμένου ×i), οπότε παίρνουμε την σχέση που είναι γνωστή ως «τύπος του Euler», σύμφωνα με τον οποίον $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$ (1)

Οπότε: $\tilde{z} = x + iy = |\tilde{z}|\cos(\phi) + i|\tilde{z}|\sin(\phi) = |\tilde{z}|\big(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\big) \Rightarrow \boxed{\tilde{z} = |\tilde{z}|e^{i\varphi}}$ (2)

Εκφράζοντας με αυτό τον τρόπο τους μιγαδικούς αριθμούς, διαπιστώνουμε ότι οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ των μιγαδικών $\tilde{z}_1 = A_1e^{i\varphi_1}$ και $\tilde{z}_2 = A_2e^{i\varphi_2}$ αριθμών μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\tilde{z}_1\tilde{z}_2 = A_1e^{i\varphi_1}A_2e^{i\varphi_2} = A_1A_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (3)$$

$$\tilde{z}_1/\tilde{z}_2 = \left(A_1e^{i\varphi_1}\right)/\left(A_2e^{i\varphi_2}\right) = (A_1/A_2)e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad (4)$$

Από: $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$, και $e^{-ia} = \cos(-a) + i\sin(-a) = \cos(a) - i\sin(a)$

Παίρνουμε τις σχέσεις: $\cos(a) = \dfrac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$, $\sin(a) = \dfrac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$. (5 α,β)

Διαφορικές εξισώσεις

Οι διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται στις δύο μεγάλες κατηγορίες, (α) της «συνήθεις» διαφορικές, και (β) τις διαφορικές με μερικές παραγώγους..

Στα προβλήματα των αρμονικών ταλαντώσεων θα αντιμετωπίσουμε ένα είδος από τις «συνήθεις» διαφορικές, που χαρακτηρίζονται ως «γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, n-τάξης, με σταθερούς συντελεστές», και είναι της μορφής

$$c_n \frac{d^n y}{dx^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + c_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + c_1 \frac{dy}{dx} + c_0 y = b(x), \tag{6}$$

όπου, $(c_n, \quad c_{n-1}, \quad , \quad \ldots \quad +c_2, \quad c_1, \quad c_0)$: γνωστές σταθερές, και $b(x)$: γνωστή συνάρτηση.

Η διαφορική ονομάζεται ομογενής, αν $b(x) = 0$, και μη-ομογενής, αν $b(x) \neq 0$.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση μίας γραμμικής μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με $y = y_0 + y_p$, όπου:

y_0 : η γενική λύση της ομογενούς, και

y_p : μία μερική (ή, ειδική) λύση της μη-ομογενούς

Η γενική λύση y_0 της γραμμικής ομογενούς με σταθερούς συντελεστές

$$c_n \frac{d^n y}{dx^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + c_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + c_1 \frac{dy}{dx} + c_0 y = 0, \tag{7}$$

υπολογίζεται αναζητώντας λύσεις της μορφής $y = Ae^{\rho x}$, η αντικατάσταση της οποίας στη διαφορική εξίσωση δίνει

$$\left(c_n \rho^n + c_{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + c_2 \rho^2 + c_1 \rho + c_0\right) Ae^{\rho x} = 0.$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε *x*, πρέπει να ισχύει

$$c_n \rho^n + c_{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + c_2 \rho^2 + c_1 \rho + c_0 = 0 \tag{8}$$

Η τελευταία σχέση λέει ότι η μορφή $y = Ae^{\rho x}$ μπορεί να είναι λύση της διαφορικής, υπό την προϋπόθεση ότι το ρ είναι ρίζα του «χαρακτηριστικού πολυωνύμου», $c_n \rho^n + c_{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + c_2 \rho^2 + c_1 \rho + c_0$, της διαφορικής εξίσωσης.

Επειδή, στη γενική περίπτωση, ένα πολυώνυμο n-τάξης έχει n-το-πλήθος ρίζες, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, τότε η γενική λύση της ομογενούς θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός όλων αυτών των μερικών της λύσεων

$$y = A_1 e^{\rho_1 x} + A_2 e^{\rho_2 x} + \ldots + A_{n-1} e^{\rho_{n-1} x} + A_n e^{\rho_n x} \tag{9}$$

[Όταν μία ρίζα ρ_k είναι διπλή, τότε το αντίστοιχο τμήμα της λύσης αποδεικνύεται ότι είναι της μορφή $(a_0 + a_1 x) e^{\rho_k x}$].

Οι σταθερές ολοκλήρωσης $A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες είναι διατυπωμένες με τη μορφή γνωστών τιμών για τη συνάρτηση *y* και τις παραγώγους της, (μέχρι n-1:τάξης), για συγκεκριμένο *x*=*x*$_0$,

$$y(x_0) = y_0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = y_1, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_0} = y_2, \quad \ldots \quad , \quad \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_{x_0} = y_{n-1} \tag{10}$$

Η αντικατάσταση της (9) σε κάθε μία από της αρχικές συνθήκες (10) οδηγεί σε ένα (n×n)-γραμμικό σύστημα, με αγνώστους τις σταθερές $A_i, \quad i = 1, 2, ..., n$.

Η μερική (ή, ειδική) λύση y_p της γραμμικής μη-ομογενούς με σταθερούς συντελεστές

$$c_n \frac{d^n y}{dx^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + c_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + c_1 \frac{dy}{dx} + c_0 y = b(x)$$

αποδεικνύεται ότι είναι μία συνάρτηση που έχει την αναλυτική μορφή του μη-ομογενούς όρου. Μία καταγραφή της μορφής των μερικών λύσεων της ομογενούς y_p φαίνεται στον επόμενο Πίνακα, σε σχέση με τη μορφή του μη-ομογενούς όρου $b(x)$.

Μη-Ομογενής Όρος: b(x)	***Μερική Λύση Μη-Ομογενούς:*** y_p
Πολυώνυμο	*Πολυώνυμο*
Γραμμικός Συνδυασμός Εκθετικών	*Γραμμικός Συνδυασμός Εκθετικών με ίδιο εκθέτη*
Γραμμικός Συνδυασμός sin , cos	*Γραμμικός Συνδυασμός sin, cos με ίδιο όρισμα*
Πολυώνυμο × *Εκθετικό*	*Πολυώνυμο* × *Ίδιο Εκθετικό*
Γραμμικός Συνδυασμός όλων των παραπάνω	*Γραμμικός Συνδυασμός των αντίστοιχων λύσεων*

[Βλ. W. E. Boyce / R. C. DiPrima, Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Πανεπ. Εκδ. ΕΜΠ, 2012, σελ.154, 185, 197, και Παραδείγματα από τη Φυσική στις σελ. 203-232. Επίσης, για μία εισαγωγή στο θέμα των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, με παραδείγματα και εφαρμογές από τη Φυσική, μεταξύ άλλων, βλ. και: Σ. Τραχανάς, Διαφορικές Εξισώσεις, Τόμος 1, κεφ. 6, σελ. 171-248, ΠΕΚ 1989]

5.2 Απλός αρμονικός ταλαντωτής και ταλαντωτής με απόσβεση

Η διαφορική εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή σε μία διάσταση έχει τη μορφή $m\ddot{x} + kx = 0$, και έχει επιλυθεί με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, (μέσω της αλλαγής μεταβλητής: $(d\upsilon/dt) = (d\upsilon/dx)(dx/dt) = \upsilon(d\upsilon/dx)$, στο Παράδειγμα 2.2.3. Η γενική λύση έχει βρεθεί με τη μορφή $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, όπου το πλάτος: A, και η φάση: φ είναι οι δύο «σταθερές ολοκλήρωσης» της διαφορικής εξίσωσης, οι οποίες θα πρέπει να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες $x_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}_{t=0} = \upsilon_0$.

Η ίδια διαφορική του απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς τριβές θα μπορούσε να επιλυθεί και με τη μέθοδο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και τη χρήση μιγαδικών παραστάσεων. Πράγματι, αν αναζητήσουμε λύση της μορφής $x(t) = Ce^{\rho t}$, η αντικατάστασή της στη διαφορική εξίσωση $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, (όπου $\omega_0^2 = k/m$), θα δώσει τι χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho^2 + \omega_0^2 = 0$, με δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho_{1,2} = \pm i\omega_0$. Επομένως η Γενική λύση θα είναι ένας γραμμικό συνδυασμός των δυνατών λύσεων και θα έχει τη μορφή

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \qquad (1)$$

Οι δύο σταθερές, που στη γενικότερη περίπτωση είναι μιγαδικές,

$$C_1 = a_1 + i\beta_1, \qquad C_2 = a_2 + i\beta_2 \qquad (2)$$

θα προσδιοριστούν επίσης από τις αρχικές συνθήκες, $x_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}_{t=0} = \upsilon_0$, οι οποίες αν εφαρμοσθούν στην προηγούμενη λύση (1), οδηγούν στις σχέσεις:

$$C_1 + C_2 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \{a_1 + a_2 = x_0, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 0\}$$

και $$i\omega_0 \left(C_1 - C_2\right) = \upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \{a_1 - a_2 = 0, \qquad \beta_2 - \beta_1 = \upsilon_0 / \omega_0\}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει $a_1 = a_2 = \dfrac{x_0}{2}, \qquad \beta_2 = -\beta_1 = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}$

Αν αντικατασταθούν αυτά τα αποτελέσματα στη (2) και στη συνέχεια αντικατασταθούν οι σταθερές C_1, C_2 στην (1), τότε παίρνουμε για την μετατόπιση $x(t)$ την έκφραση

$$x(t) = x_0 \frac{e^{+i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} - i\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\frac{e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} = x_0 \frac{e^{+i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{\upsilon_0}{\omega_0}\frac{e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} =$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)} \qquad (3)$$

Η τελευταία σχέση (3) είναι ισοδύναμη με τη γενική έκφραση $x(t) = A\cos\left(\omega t - \varphi\right)$. Πράγματι, αν συγκριθεί το ανάπτυγμά της: $x(t) = A\left(\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) + \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)\right)$, με τη σχέση (3), παίρνουμε

$$\{A\cos\varphi = x_0, \qquad A\sin\varphi = \upsilon_0 / \omega_0\} \quad \Rightarrow \quad \left\{A = \sqrt{x_0^2 + (\upsilon_0 / \omega_0)^2}, \qquad \tan\varphi = \upsilon_0 /(x_0\omega_0)\right\} \qquad (4)$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, όταν υπάρχει τριβή η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (5)$$

όπου έχουμε ορίσει ως «εύρος» : $\gamma = r/2m$, μία παράμετρο με διαστάσεις αντίστροφου χρόνου, η φυσική σημασία της οποίας θα φανεί στη συνέχεια της ανάλυσης.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5) είναι το

$$\rho^2 + 2\gamma\rho + \omega_0^2 = 0, \qquad \text{με ρίζες τις:} \quad \rho_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (6\ )$$

Το είδος των λύσεων εξαρτάται από το πρόσημο της υπόριζης ποσότητας στην (6) και, επομένως, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, γνωστές ως περιπτώσεις *ασθενούς απόσβεσης* $\left(\gamma < \omega_0\right)$, *ισχυρής απόσβεσης* $\left(\gamma > \omega_0\right)$, και *κρίσιμης απόσβεσης* $\left(\gamma = \omega_0\right)$.

(α) *Ασθενής απόσβεση* $\left(\gamma < \omega_0\right)$. Σε αυτή την περίπτωση, οι ρίζες (6) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου γράφονται $\rho_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \;\Rightarrow\; \rho_{1,2} = -\gamma \pm i\omega'$, όπου $\omega'^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$.
Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής θα γράφεται:

$$x(t) = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{+i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right). \qquad (7)$$

Αλλά, το τμήμα που είναι μέσα στην παρένθεση έχει την μορφή της λύσης (1), του απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς τριβές, (με μόνη διαφορά την αντικατάσταση της συχνότητας $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, από την νέα συχνότητα $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$), το οποίο όπως είδαμε είναι ισοδύναμο με την μορφή $\left(C_1 e^{+i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right) = A\cos(\omega' t + \varphi)$, όπου οι σταθερές A και φ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5) γράφεται $$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad (8)$$

Από όπου φαίνεται ότι, στην περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης, το σύστημα έχει πάλι ταλαντωτική συμπεριφορά, με μία νέα συχνότητα $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ και με ένα εκθετικά μειούμενο «πλάτος», με το χρόνο, της μορφής $Ae^{-\gamma t}$. Τόσο το ποσοστό μείωσης του πλάτους με το χρόνο $\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = -\gamma = -\frac{r}{2m}$, όσο και η νέα συχνότητα $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$ εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά (m,k,r) του συστήματος και είναι ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.

(β) Ισχυρή απόσβεση $(\gamma > \omega_0)$. Σε αυτή την περίπτωση οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι: $\rho_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \gamma'$, όπου $\gamma' = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$, και $\gamma' < \gamma$. Επομένως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{+\gamma' t} + C_2 e^{-\gamma' t}\right), \tag{9}$$

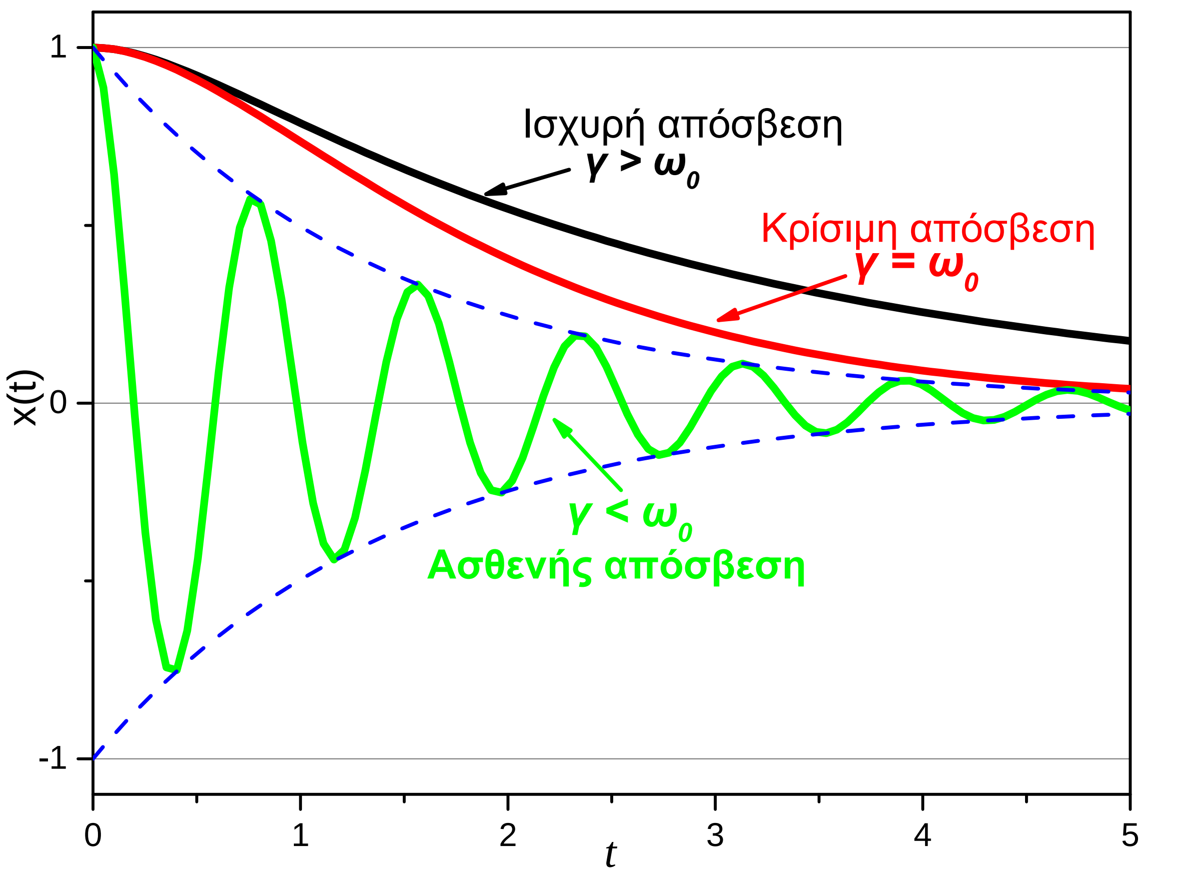
που είναι μία συνολικώς εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένου του $\gamma' < \gamma$. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $x_{t=0} = x_0$, $\dot{x}_{t=0} = \upsilon_0$, έχουμε:

$$C_1 + C_2 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \{a_1 + a_2 = x_0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 0\} \tag{10}$$

$$-\gamma(C_1 + C_2) + \gamma'(C_1 - C_2) = \upsilon_0 \Rightarrow (C_1 - C_2) = \frac{\upsilon_0 + \gamma x_0}{\gamma'} \Rightarrow \left\{a_1 - a_2 = \frac{\upsilon_0 + \gamma x_0}{\gamma'}, \beta_1 - \beta_2 = 0\right\} \tag{11}$$

Από τις σχέσεις (10) και (11) παίρνουμε

$$a_1 = \frac{\upsilon_0 + (\gamma + \gamma')x_0}{2\gamma'}, \quad a_2 = \frac{\upsilon_0 + (\gamma - \gamma')x_0}{2\gamma'}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0$$



Ισχυρή, κρίσιμη, και ασθενής απόσβεση αρμονικού ταλαντωτή με ιξώδη τριβή (γ) Κρίσιμη απόσβεση $\left(\gamma=\omega_0\right)$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε διπλή ρίζα, $\rho_{1,2}=-\gamma$. και η γενική λύση, γράφεται

$$x(t)=\left(C_1+C_2 t\right)e^{-\gamma t} \qquad (12)$$

Και σε αυτή την περίπτωση, έχουμε μία εκθετική μείωση του $x(t)$ με το χρόνο, όπως και στην περίπτωση της ισχυρής απόσβεσης, άρα και στις δύο περιπτώσεις, το σύστημα επανέρχεται στην κατάσταση ισορροπίας σε άπειρο (θεωρητικά) χρόνο, με μη-ταλαντωτική συμπεριφορά. [Και κατά την κρίσιμη και κατά την ισχυρή απόσβεση, υπάρχει ένα ενδεχόμενο να έχουμε μία μόνο διέλευση από το σημείο ισορροπίας, σε πεπερασμένο χρόνο, και μετά το σύστημα να τείνει ασυμπτωτικά προς την ηρεμία. Αυτό συμβαίνει όταν αρχική απομάκρυνση και αρχική ταχύτητα είναι ετερόσημα μεγέθη και η ολική αρχική ενέργεια, κινητική και ελαστική, είναι μεγαλύτερη από τις απώλειες, που σημειώνονται λόγω απόσβεσης μέχρι να φτάσει το σώμα για πρώτη φορά στη σημείο ισορροπίας. (Βλ Παράδειγμα 5.5)]

Αυτό που μπορεί να διαπιστώσει κανείς, όσον αφορά τη σύγκριση μεταξύ ισχυρής και κρίσιμης απόκρισης είναι ότι, για ταυτόσημες αρχικές συνθήκες, ένα σύστημα με κρίσιμη απόσβεση επανέρχεται προς την κατάσταση ισορροπίας με πιο γρήγορο ρυθμό από το σύστημα με ισχυρή απόσβεση. Στη δεύτερη περίπτωση (ισχυρή απόσβεση) ο συντελεστής απόσβεσης r είναι τόσο μεγάλος που «φρενάρει» το σύστημα δυσκολεύοντάς του την επιστροφή σε κατάσταση ισορροπίας.

Όσον αφορά στον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης, από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$C_1=x_0, \qquad C_2-\gamma C_1=\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad C_2=\upsilon_0+\gamma x_0 .$$

Άρα, η λύση γράφεται

$$x(t)=\left[x_0+\left(\upsilon_0+\gamma x_0\right)t\right]e^{-\gamma t} \qquad (13)$$

5.3 Αρμονικός ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση και εξωτερική διέγερση

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ένα ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση, (όπως είναι κάθε πραγματικός ταλαντωτής), χαρακτηρίζεται από μία ταλάντωση μειούμενη με το χρόνο. Για να συντηρηθεί σε ταλάντωση ένα τέτοιο σύστημα θα πρέπει να διεγείρεται από μία εξωτερική δύναμη. Αυτή η εξωτερική διέγερση είναι, συνήθως, μία περιοδική συνάρτηση του χρόνου, η οποία δεν είναι αναγκαστικά αρμονική, (θα μπορούσε να έχει τη μορφή ενός περιοδικού παλμού μικρής διάρκειας). Επειδή, όπως μπορεί να δειχθεί (π.χ., με ανάλυση Fourier), κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μία σειρά Fourier, που αποτελείται από ημιτονοειδείς ή συνημιτονοειδείς όρους μίας θεμελιώδους συχνότητας και των αρμονικών της, αρκεί να μελετήσουμε την συμπεριφορά του συστήματος για μία διέγερση αρμονικού χαρακτήρα, και να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα για όλες τις άλλες συνιστώσες μία περιοδικής διέγερσης.

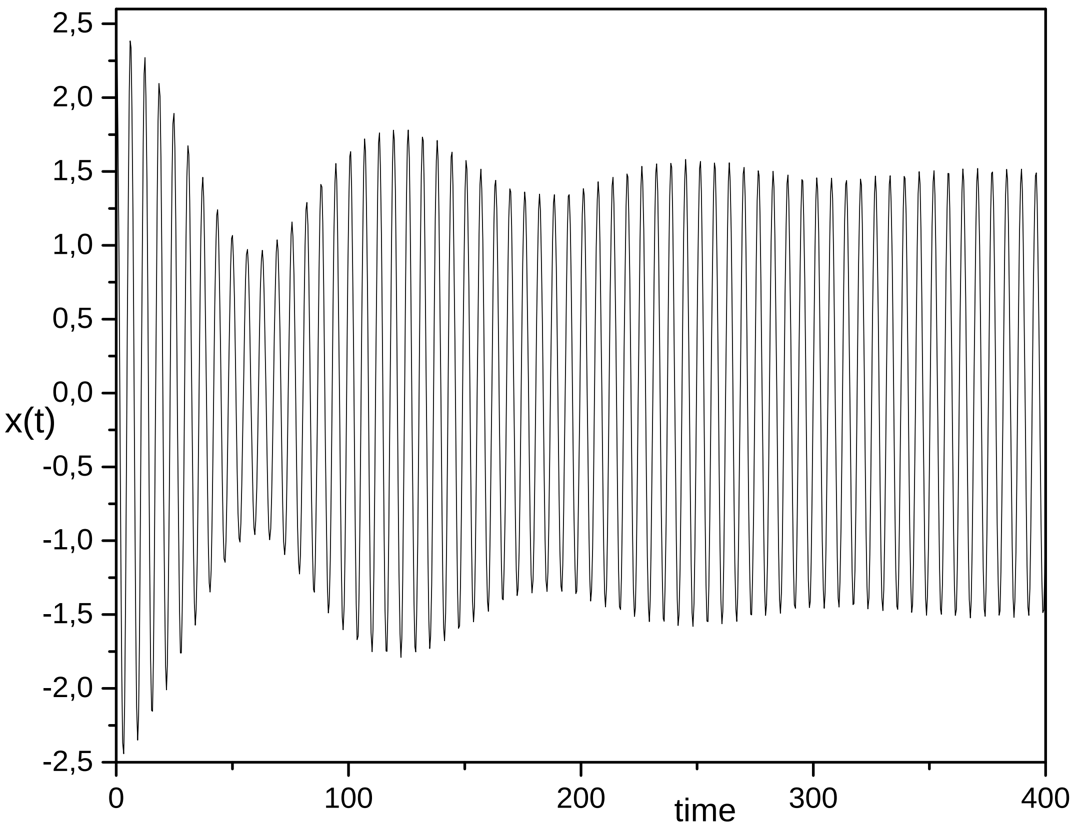
Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η εξωτερική δύναμη είναι της μορφής $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, οπότε η διαφορική εξίσωση κίνησης γράφεται $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F_0\cos(\omega t)$, ή ισοδύναμα

$$\ddot{x}+\frac{r}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=f_0\cos(\omega t) \qquad (14)$$

Στα παραπάνω, υποθέτουμε ότι η συχνότητα ω της εξωτερικής διέγερσης είναι διαφορετική από τις χαρακτηριστικές συχνότητες $\omega_0=\sqrt{k/m}$ και $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$, και θα μπορούσε να μεταβάλλεται με ελεγχόμενο τρόπο (όπως θα χρειαστεί, π.χ., κατά τη μελέτη των φαινομένων συντονισμού).

Η εξίσωση (14) είναι μη-ομογενής γραμμική με σταθερούς συντελεστές και, επομένως, η γενική της λύση θα είναι <u>γραμμικός συνδυασμός</u> μίας <u>γενικής λύσης της</u>

ομογενούς και μίας ειδικής λύσης της πλήρους. Επειδή είδαμε, στην προηγούμενη παράγραφο 6.2, ότι η γενική λύση της ομογενούς (δηλ., του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, αλλά πριν εφαρμοσθεί εξωτερική δύναμη) είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου (ταλαντωτική, για την περίπτωση ασθενούς απόσβεσης), είναι φανερό ότι μετά από την παρέλευση αρκετού χρόνου, (της τάξης μερικών πολλαπλασίων του $1/\gamma$), αυτή η γενική λύση θα χάσει της σημασία της και θα επικρατήσει η ειδική λύση της μη-ομογενούς, η οποία είναι γνωστή και ως μόνιμη λύση, ή, μόνιμη κατάσταση ταλάντωσης , και η οποία, ως έχουσα τη μορφή του μη-ομογενούς όρου, θα έχει τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης. Αυτό το συμπέρασμα διατυπώνεται και ως δήλωση ότι «ένας ταλαντωτής, υπό εξωτερική διέγερση, ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη». όπου υπονοείται ότι αυτό συμβαίνει μετά από επαρκή χρόνο, ώστε να «σβήσει» η γενική λύση της ομογενούς, η οποία έχει τη συχνότητα $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Στο ενδιάμεσο, μεταβατικό, χρονικό διάστημα οι δύο λύσεις συνυπάρχουν και το αποτέλεσμα είναι ένα διακρότημα το οποίο «σβήνει» σταδιακά, αφήνοντας τελικά «στο παιχνίδι» την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης, η οποία ταλαντώνεται με περίπου σταθερό πλάτος (βλ. σχήμα)



Μεταβατική λύση και μόνιμη λύση του αρμονικού ταλαντωτή με ασθενή απόσβεση και εξωτερική διέγερση

Θα υπολογίσουμε τη μόνιμη ειδική λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης με δύο τρόπους, (α) με τη βοήθεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων και (β) με τη βοήθεια των μιγαδικών συναρτήσεων. Από αυτή τη διαδικασία θα φανεί η λογιστική απλότητα του δεύτερου τρόπου αλλά και το αναπαραστατικό πλεονέκτημα της μεθόδου, που έχει ως αποτέλεσμα να έχει υιοθετηθεί σε πολλά πεδία ανάλυσης αντίστοιχων προβλημάτων.

Ειδική λύση της Μη-Ομογενούς (με τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

Για την μη-ομογενή εξίσωση, αναζητούμε ειδική λύση με τη μορφή του μη-ομογενούς όρου, που θα πρέπει όμως να περιλαμβάνει και μία φάση,

$$y_p = A\cos(\omega t - \varphi) = A\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin\varphi\right]$$

Η φάση είναι απαραίτητη ώστε, μέσω του αναπτύγματος, να προκύψουν και όροι ημιτόνου, που φαίνεται ότι προκύπτουν στη διαφορική μέσω του όρου των τριβών. Αντικαθιστώντας στην διαφορική τη δοκιμαστική λύση και τις παραγώγους της

$$x_p = A\cos(\omega t-\varphi) = A\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin\varphi\right]$$
$$\dot{x}_p = -A\omega\sin(\omega t-\varphi) = -A\omega\left[\sin(\omega t)\cos(\varphi)-\cos(\omega t)\sin\varphi\right]$$
$$\ddot{x}_p = -A\omega^2\cos(\omega t-\varphi) = -A\omega^2\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin\varphi\right]$$

παίρνουμε

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t) \quad \Rightarrow$$
$$-A\omega^2\cos(\omega t-\varphi)+2\gamma\left(-A\omega\sin(\omega t-\varphi)\right)+\omega_0^2 A\cos(\omega t-\varphi) = f_0\cos(\omega t) \Rightarrow$$
$$-A\omega^2\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin\varphi\right]$$
$$-2\gamma A\omega\left[\sin(\omega t)\cos(\varphi)-\cos(\omega t)\sin\varphi\right]$$
$$+\omega_0^2 A\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin\varphi\right] = f_0\cos(\omega t)$$

Οι δύο σταθερές Α και φ, της ειδικής λύσης θα υπολογιστούν εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων $\cos(\omega t),\sin(\omega t)$ στην τελευταία σχέση, (ή, μεταφέροντας όλους τους όρους στο ένα σκέλος και εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων $\cos(\omega t),\sin(\omega t)$ με μηδέν).

$$-A\omega^2\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin\varphi\right]-2\gamma A\omega\left[\sin(\omega t)\cos(\varphi)-\cos(\omega t)\sin\varphi\right]$$
$$+\omega_0^2 A\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin\varphi\right] = f_0\cos(\omega t) \qquad (15)$$

οπότε:

$$\cos(\omega t)\left[-A\omega^2\cos(\varphi)+2\gamma A\omega\sin\varphi+\omega_0^2 A\cos(\varphi)-f_0\right]+$$
$$+\sin(\omega t)A\left[-\omega^2\sin\varphi-2\gamma\omega\cos(\varphi)+\omega_0^2\sin\varphi\right]=0$$

Άρα: $\left[-A\omega^2\cos(\varphi)+2\gamma A\omega\sin\varphi+\omega_0^2 A\cos(\varphi)-f_0\right]=0$ (16 α)

και $\left[-\omega^2\sin\varphi-2\gamma\omega\cos(\varphi)+\omega_0^2\sin\varphi\right]=0$ (16 β)

Από (16β): $\tan\phi = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$,

από (16α): $A = \dfrac{f_0/\cos\varphi}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2\gamma\omega\tan\varphi} = \dfrac{f_0\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2\gamma\omega\tan\varphi}$, και αντικαθιστώντας το $\tan\varphi$ από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε, τελικά:

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}}} \text{ (17 a)} \qquad \text{και} \qquad \boxed{\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}} \text{ (17 β)}$$

Ειδική λύση της Μη-Ομογενούς (με μιγαδικές συναρτήσεις)

Η αναζήτηση της ειδικής λύσης της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (μόνιμη κατάσταση) γίνεται με πολύ μεγαλύτερη λογιστική ευκολία, όταν εργαστούμε με τη βοήθεια μιγαδικών συναρτήσεων, αντιμετωπίζοντας τον μη-ομογενή όρο ως το πραγματικό μέρος μίας κατάλληλης μιγαδικής συνάρτησης.

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = \mathrm{Re}\left\{f_0 e^{i\omega t}\right\}$$

Με τη βοήθεια της προηγούμενης γραφής, το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε μία διαφορική εξίσωση όπου ο μη-ομογενής όρος είναι μιγαδικός, $f_0 e^{i\omega t}$, οπότε, και η ειδική λύση θα είναι μία μιγαδική συνάρτηση, $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, το πραγματικό μέρος της οποίας, $\mathrm{Re}\{\tilde{x}(t)\}$, θα είναι η ειδική λύση της αρχικής μη-ομογενούς εξίσωσης. Με αυτή την οπτική, η μιγαδική μορφή της διαφορικής εξίσωσης γράφεται

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = f_0 e^{i\omega t} \tag{18}$$

Αναζητούμε μία μιγαδική συνάρτηση, $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, της οποίας ένα γραμμικός συνδυασμός με την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγό της οδηγούν σε ένα πολλαπλάσιο του $e^{i\omega t}$. Επομένως, η αναζητούμενη συνάρτηση θα είναι ένα πολλαπλάσιο του $e^{i\omega t}$ του οποίου ο συντελεστής θα είναι, γενικά, συνάρτηση του ω. Αν γράψουμε $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$, (όπου $\tilde{x}_0$ είναι ένα μιγαδικό πλάτος που εξαρτάται από το ω), αντικαθιστώντας την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο στη σχέση (18) παίρνουμε

$$\left[-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2\right]\tilde{x}_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}\, e^{i\arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}}$$

Άρα, το μιγαδικό πλάτος είναι: $\tilde{x}_0 = \dfrac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} e^{-i\varphi}, \qquad \tan\varphi = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Επανερχόμενοι στην $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$ και αντικαθιστώντας το μιγαδικό πλάτος από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{i\omega t} = \dfrac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} e^{-i\varphi} e^{i\omega t}$

Τελικά:

$$\boxed{\tilde{x} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad \tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}} \tag{19 α,β}$$

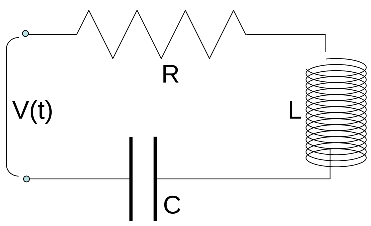
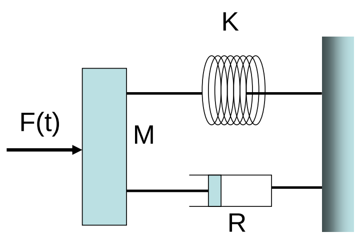
Το πραγματικό μέρος του $\tilde{x}$ από τη σχέση (19) είναι σε συνέπεια με τα αποτελέσματα (17α,β), αλλά η συνολική διαδικασία είναι λογιστικά πολύ οικονομικότερη.

5.4 Φαινόμενα Συντονισμού

Όταν θέλουμε να συντηρήσουμε την κίνηση, σε συστήματα με ταλαντωτική συμπεριφορά και απώλειες, εφαρμόζουμε μία εξωτερική διέγερση, η οποία είναι, συνήθως, επίσης αρμονική με, εν γένει, διαφορετική συχνότητα από την φυσική συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση έχει σημασία η απόκριση του συστήματος καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης.

Θα αναλύσουμε τα ζητήματα απόκρισης συχνότητας με ένα ηλεκτρικό σύστημα το οποίο, όμως, έχει πλήρη αναλογία με το βασικό μηχανικό ανάλογο σύστημα. Το ηλεκτρικό σύστημα είναι το κύκλωμα R–L–C, εν σειρά, με εξωτερική αρμονική διεγείρουσα τάση $V = V(t)$, ελεγχόμενης συχνότητας, που μπορεί να μεταβάλλεται κατά βούληση. Το αντίστοιχο μηχανικό σύστημα είναι το σύστημα μάζας – ελατηρίου – με ιξώδη τριβή και εξωτερική διέγερση με αρμονική δύναμη μεταβλητής συχνότητας. Οι αναλογία των δύο συστημάτων αναδεικνύεται από τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις «κίνησης», και οδηγεί σε αναλογίες αντίστοιχων μεγεθών, όπως φαίνεται παρακάτω, “φορτίο-q”$\Leftrightarrow$ “μετατόπιση-ξ”, και ομοίως για τα υπόλοιπα. Επιπλέον, η ανάλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος οδηγεί με φυσικό τρόπο και στην εισαγωγή της σύνθετης μιγαδικής αντίστασης του συστήματος

Αντιστοιχίες Μεγεθών Ηλεκτρικού – Μηχανικού Ταλαντωτή

	
$I = dq/dt$ $V(t) - L\, dI/dt = RI + \left(1/C\right) q$ $L\ddot{q} + R\dot{q} + \left(1/C\right) q = V(t)$ $\left(q, \quad I = \dot{q}\right)$ $\left(L, R, C\right)$ $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ $E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\right) q^2 + \frac{1}{2} L I^2$	$u = d\xi/dt$ $M\, du/dt + Ru + K\xi = F(t)$ $M\ddot{\xi} + R\dot{\xi} + K\xi = F(t)$ $\left(\xi, \quad u = \dot{\xi}\right)$ $\left(M, R, 1/K\right)$ $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ $E = \frac{1}{2} K \xi^2 + \frac{1}{2} M u^2$

Ας επιλύσουμε το ηλεκτρικό σύστημα, υποθέτοντας πηγή $V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{V_0 e^{-i\omega t}\right\}$. Γράφουμε τον όρο της πηγής με μιγαδική μορφή $\tilde{V}(t) = V_0 e^{-i\omega t}$, και αναζητούμε μόνιμη μιγαδική λύση για το φορτίο q και για το ρεύμα I, της μορφής $\tilde{q} = \tilde{q}_0(\omega) e^{-i\omega t}$, και $\tilde{I} = \dot{\tilde{q}} = -i\omega \tilde{q}_0(\omega) e^{-i\omega t} = \tilde{I}_0(\omega) e^{-i\omega t}$, αντίστοιχα. Επομένως, $\tilde{q}_0 = -\tilde{I}_0 / i\omega = i\tilde{I}_0/\omega$, και $\dot{\tilde{I}} = -i\omega \tilde{I}$, οπότε η εξίσωση του Kirchoff γράφεται:

$$L\,{d\tilde{I}}/{dt}+R\tilde{I}+\left({1}/{C}\right)\tilde{q}=\tilde{V}(t)\Rightarrow\left(-i\omega L+R+{i}/{\omega C}\right)\tilde{I}_0=\tilde{V}_0, \qquad (20)$$

που επιλύεται πλέον απλά: $\tilde{I}_0=\dfrac{\tilde{V}_0}{\left(-i\omega L+R+{i}/{\omega C}\right)}=\dfrac{\tilde{V}_0}{Z}$, όπου $Z=-i\omega L+R+{i}/{\omega C}$ η ***σύνθετη (μιγαδική) αντίσταση*** του κυκλώματος (R, L, C), η οποία μπορεί να γραφεί και ως $Z=R-i\omega L+{i}/{\omega C}=R-i\left[\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right]$. Η σύνθετη μιγαδική αντίσταση γράφεται επίσης

$$\boxed{Z=R-i\left[\omega L-\frac{1}{\omega C}\right]=\sqrt{R^2+\left[\omega L-\frac{1}{\omega C}\right]^2}\,e^{i\phi}}\text{, όπου }\boxed{\varphi=\tau o\xi\varepsilon\varphi\left[-\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right]} \qquad (21\ \alpha,\beta)$$

Οπότε, το μιγαδικό πλάτος του ρεύματος θα είναι $\tilde{I}_0(\omega)={V_0}/{Z(\omega)}$, ή, ισοδύναμα,

$$\tilde{I}_0(\omega)=\frac{V_0}{\left[R^2+\left(\omega L-{1}/{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}}e^{-i\varphi} \qquad (22)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το πλάτος του ρεύματος μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης ω είναι τέτοια ώστε: $\omega L-{1}/{\omega C}=0\ \Rightarrow\ \boxed{\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\equiv\omega_0}$.

(23)

Άρα, το ρεύμα μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης γίνει ίση με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος «$\left(R=0,L,C\right)$, χωρίς εξωτερική διέγερση», οπότε αναφερόμαστε σε **συνθήκη συντονισμού.** Όπως φαίνεται από τη σχέση (21 β), σε συνθήκη συντονισμού η διαφορά φάσης φ, ανάμεσα στο ρεύμα *I* και στην εξωτερική τάση *V*, μηδενίζεται.

Στο αντίστοιχο μηχανικό σύστημα μπορεί να δείξει κανείς ότι το πλάτος της ταχύτητας μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης γίνει ίση με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης $\omega_0=\sqrt{k/m}$, ενώ το πλάτος της μετατόπισης μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης γίνει ίση με μία συχνότητα-συντονισμού-πλάτους $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$, όπως μπορεί να δείξει κανείς υπολογίζοντας, π.χ., το ακρότατο του πλάτους *A* από τη σχέση (17 α).

Είναι σημαντικό να επισημάνει κανείς ότι, τόσο στο μηχανικό όσο και στο ηλεκτρικό σύστημα, **η ισχύς** την οποία παρέχει η «πηγή» στο σύστημα μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης γίνει ίση με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης $\omega_0=\sqrt{k/m}$ $\left(\omega_0=1/\sqrt{LC}\right)$, αντίστοιχα. Αυτό είναι φανερό από το γεγονός ότι, στο μεν μηχανικό σύστημα η ισχύς είναι $P(\omega)=F(\omega)\upsilon(\omega)$, ενώ στο ηλεκτρικό σύστημα η ισχύς είναι $P(\omega)=V(\omega)I(\omega)$. Επομένως, αν η «πηγή» έχει σταθερό πλάτος, ανεξάρτητα από τη συχνότητα $\left(f_0(\omega)=\sigma\tau\alpha\theta.,\ V_0(\omega)=\sigma\tau\alpha\theta.\right)$, η ισχύς μεγιστοποιείται στη συχνότητα μεγιστοποίησης των μεγεθών της ταχύτητας και του ρεύματος αντίστοιχα, άρα στην ω_0.

<u>**ΣΧΟΛΙΑ:**</u> **(1)** Στα ηλεκτρικά κυκλώματα ενδιαφέρει η διαφορά φάσης ανάμεσα στη «διεγείρουσα» τάση *V* και στο ρεύμα *I*, που είναι και τα άμεσα μετρήσιμα μεγέθη, ενώ στα μηχανικά συστήματα, αναφερόμαστε συνήθως στη διαφορά φάσης ανάμεσα στη «διεγείρουσα» δύναμη και στην απομάκρυνση, η οποία είναι το μηχανικό ανάλογο του φορτίου. Το μηχανικό ανάλογο του ρεύματος είναι η ταχύτητα του μηχανικού συστήματος.

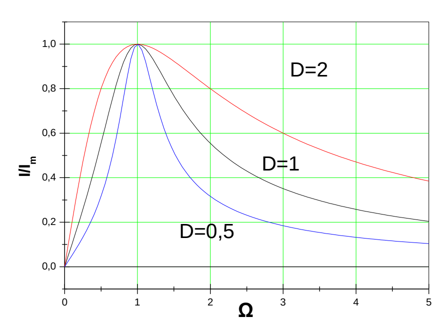
(2) Η επιλογή προσήμου στο μιγαδικό εκθετικό αφήνει ανεπηρέαστο το πραγματικό μέρος της μιγαδικής του τιμής: $\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\{e^{\pm i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\cos(\omega t) \pm i\,\sin(\omega t)\}$. Εν τούτοις επηρεάζει το πρόσημου του φανταστικού μέρους και, βέβαια, το πρόσημο του όρου της ταχύτητας στη διαφορική εξίσωση, $\dot{\tilde{x}} = \pm i\,\omega\,\tilde{x}$, ενώ $\ddot{\tilde{x}} = -\omega^2\,\tilde{x}$. Αυτό, με τη σειρά του, επηρεάζει το πρόσημο της φάσης, αφού αλλάζει το πρόσημο του αριθμητή στις σχέσεις (17 β), (19 β), που δίνουν την $\tan\varphi$. Επομένως, αυτό που γίνεται είναι η καθιέρωση μίας σύμβασης προσήμου, η οποία όμως δεν αποκλείεται να διαφέρει, ανάμεσα σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία (π.χ., μηχανικές ταλαντώσεις, γραμμές μεταφοράς, κ.λπ.)

Επανερχόμενοι στο ηλεκτρικό σύστημα, εισάγοντας την **ανηγμένη συχνότητα** $\Omega = \omega/\omega_0$ και την **ανηγμένη ωμική αντίσταση** $D = R\omega_0 C = R/\omega_0 L$, έχουμε

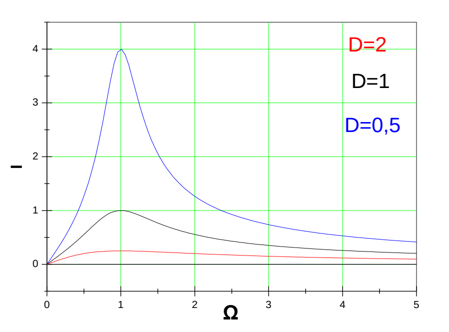
$$Z = R\left(1 + i\frac{1-\Omega^2}{D\Omega}\right) \quad \text{και} \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R\left(1 + i\dfrac{1-\Omega^2}{D\Omega}\right)} = \frac{V\left(1 - i\dfrac{1-\Omega^2}{D\Omega}\right)}{R\left(1 + \left(\dfrac{1-\Omega^2}{D\Omega}\right)^2\right)},$$

με πραγματικό μέρος $\mathrm{Re}\{I\} = \dfrac{V}{R\left(1 + \left(\dfrac{1-\Omega^2}{D\Omega}\right)^2\right)} = \dfrac{I_{\max}}{1 + \left(\dfrac{1-\Omega^2}{D\Omega}\right)^2}$, όπου $I_{\max} = \dfrac{V}{R}$ η μέγιστη τιμή του ρεύματος η οποία λαμβάνει χώρα όταν $\boxed{\Omega = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0}$ (Συντονισμός)

Στα σχήματα που ακολουθούν, φαίνεται η εξάρτηση από την ανηγμένη συχνότητα Ω τόσο της κανονικοποιημένης έντασης $I/I_{\max}$ όσο και της έντασης *I*, (χωρίς κανονικοποίηση), για διαφορετικές τιμές της ανηγμένης ωμικής αντίστασης *D*.



Η **ανηγμένη ένταση ρεύματος**, ως συνάρτηση της **ανηγμένης συχνότητας**



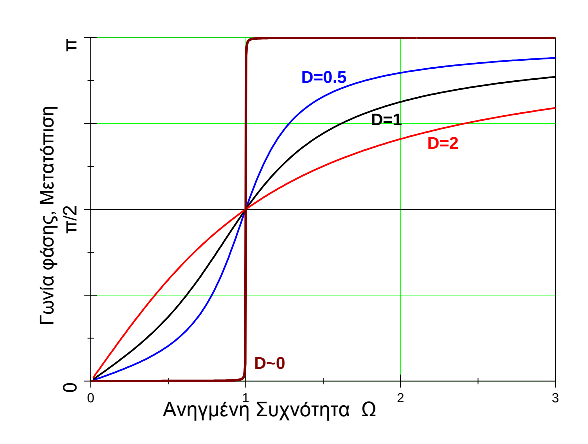
Η **ένταση ρεύματος**, ως συνάρτηση της **ανηγμένης συχνότητας**

Όπως παρατηρούμε από τα προηγούμενα σχήματα, **το ρεύμα** (ή, **η ταχύτητα**, αντίστοιχα) παρουσιάζει πάντα συντονισμό, στην χαρακτηριστική συχνότητα $\omega=\omega_0$ ($\Omega=1$), όσο μεγάλη και αν είναι η τιμή του D. Εκείνο που συμβαίνει, με την αύξηση του D, είναι η διεύρυνση της καμπύλης συντονισμού με ταυτόχρονη μείωση της απόλυτης τιμής του μεγίστου. Στην περίπτωση μηδενικής αντίστασης, οι αντίστοιχες καμπύλες απειρίζονται στη συχνότητα συντονισμού, οδηγώντας στην «καταστροφή» του συστήματος.[1]

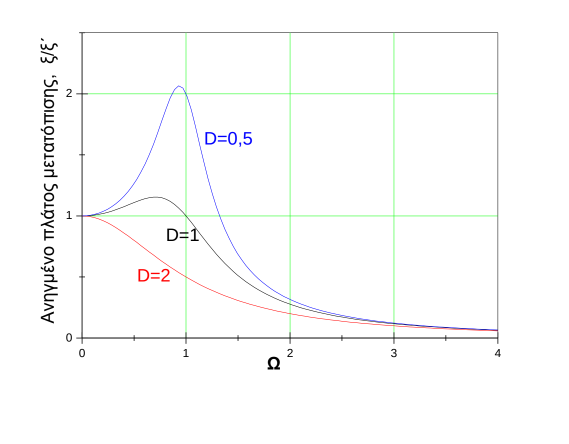
[1] Ως ένα παράδειγμα φαινομένων συντονισμού με καταστρεπτικά αποτελέσματα, δείτε στο δίκτυο στοιχεία σχετικά με την πτώση της γέφυρας Tacoma Narrows (USA, 1940). Η ερμηνεία του συνολικού φαινομένου, στις λεπτομέρειές του, θεωρείται πιο σύνθετη από απλό συντονισμό
https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)
https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw

Επίσης, στο επόμενο σχήμα, φαίνεται η εξάρτηση, από την ανηγμένη συχνότητα Ω, της γωνία φάσης ανάμεσα στη διέγερση και στη μετατόπιση, όπως και της ανηγμένης μετατόπισης του ισοδύναμου μηχανικού προβλήματος ξ/ξ', όπου ξ΄ η στατική μετατόπιση ($\xi'=f_0/k$), (για μηδενική συχνότητα).

Όσον αφορά στη διαφορά φάσης, παρατηρούμε ότι, για πεπερασμένη τιμή της ανηγμένης αντίστασης ($D\neq0$), η διαφορά φάσης αυξάνει σταδιακά από το μηδέν (σε χαμηλές συχνότητες), παίρνει την τιμή των 90^0 όταν η συχνότητα διέγερσης γίνεται ίση με τη συχνότητα ω_0, και καταλήγει σε διαφορά φάσης 180^0 όταν η συχνότητα διέγερσης τείνει στο άπειρο. Στην ιδανική περίπτωση που δεν υπάρχει αντίσταση ($D=0$), η διαφορά φάσης είναι μηδέν για όλη των περιοχή συχνοτήτων $\omega<\omega_0$, και γίνεται 180^0 για $\omega>\omega_0$.



Η γωνία φάσης της μετατόπισης, ως συνάρτηση της ανηγμένης συχνότητας



Η ανηγμένη μετατόπιση, ως συνάρτηση της ανηγμένης συχνότητας

Όπως βλέπουμε στο δεύτερο σχήμα, όσον αφορά **στη μετατόπιση** (ή, **στο φορτίο**, αντίστοιχα), με την αύξηση της τιμής του D, αφ' ενός μετατοπίζεται η συχνότητα συντονισμού σε χαμηλότερες συχνότητες, με ταυτόχρονη μείωση της απόλυτης τιμής του μεγίστου, αφ' ετέρου, από μία τιμή του D και πέρα, παύει να παρατηρείται συντονισμός, καθώς το μέγιστο λαμβάνει χώρα για ω=0 (Ω=0).

Παράγοντας Ποιότητας Αρμονικού Ταλαντωτή με Τριβές

Ένα μέγεθος, στο οποίο συμπυκνώνονται τα χαρακτηριστικά απόσβεσης και συντονισμού, ενός συστήματος με ασθενή απόσβεση, είναι ο λεγόμενος παράγοντας ποιότητας Q (Quality factor) του συστήματος. Ο παράγοντας ποιότητας Q ενός συστήματος ορίζεται μέσω των ενεργειακών χαρακτηριστικών του συστήματος.

Η συνολική ενέργεια ενός συστήματος μηχανικού ταλαντωτή (m,k,r), κάθε χρονική στιγμή t είναι το άθροισμα της κινητικής και της ελαστικής του ενέργειας. Αν

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t)=-\gamma Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\varphi)-A\omega' e^{-\gamma t}\sin(\omega' t+\varphi)=-Ae^{-\gamma t}\left[\gamma\cos(\omega' t+\varphi)+\omega'\sin(\omega' t+\varphi)\right]$$

Άρα η συνολική ενέργεια $E(t)=\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2(t)+\frac{1}{2}k\,x^2(t)$ είναι μία αρκετά σύνθετη συνάρτηση του χρόνου, αλλά μπορούμε να πούμε ότι ένα μέτρο της ενέργειας του συστήματος, σε κάθε περίοδο είναι το τετράγωνο του στιγμιαίου πλάτους $E\sim A^2e^{-2\gamma t}$. Με βάση την ενέργεια του συστήματος, ο παράγοντας (ή, συντελεστής) ποιότητας Q ορίζεται ως

$$Q=2\pi\frac{\text{"}\Sigma\tau\iota\gamma\mu\iota\alpha\iota\alpha\text{" Ενέργεια}}{\text{Απώλεια Ενέργειας ανά Περίοδο}}=2\pi\frac{\mathrm{E}}{|dE/dt|T'}$$

Αλλά, αν $E \sim A^2 e^{-2\gamma t} \Rightarrow \frac{dE}{dt} \sim -2\gamma A^2 e^{-2\gamma t} = -2\gamma E$, και επομένως

$$Q = 2\pi \frac{E}{2\gamma E T'} = \frac{2\pi}{2\gamma T'} = \frac{2\pi}{2\gamma\, 2\pi}\omega' \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\omega'}{2\gamma} = \frac{\omega'}{r/m}}$$

Με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις για τις καμπύλες συντονισμού, μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι οι τιμές συχνότητας $\omega_{1,2} = \omega_r \pm (r/m)$, είναι οι δύο συχνότητες, περί την συχνότητα συντονισμού ω_r για τις οποίες η καμπύλη συντονισμού βρίσκεται στο μισό του μεγίστου της, $P(\omega_{1,2}) = P_{\max}/2$. Αν ονομάσουμε την διαφορά $\omega_2 - \omega_1 \equiv \Delta\omega = r/m$, Συνολικό Πλάτος (της καμπύλης συντονισμού) στο Μισό του Ύψους (FWHM= Full Width at Half Maximum),τότε, από την προηγούμενη σχέση για τον συντελεστή ποιότητας Q, έχουμε $\boxed{Q = \omega'/\Delta\omega}$, και επομένως, ο συντελεστής ποιότητας, με αυτή του τη μορφή, αποτελεί και ένα μέρο της «οξύτητας» του συντονισμού, και το τελικό συμπέρασμα είναι ότι, όσο μικρότερες απώλειες έχει ένα σύστημα σε ασθενή απόσβεση, τόσο οξύτερος είναι ο συντονισμός του. Μπορεί επίσης να δείξει κανείς ότι $x_{\max}(\omega_r) = Q \cdot x(\omega = 0)$, δηλαδή, ο συντελεστής ποιότητας είναι ίσος με τον παράγοντα ενίσχυσης της απομάκρυνσης σε κατάσταση συντονισμού $(\omega = \omega_r)$, σε σχέση με τη στατική απομάκρυνση $(\omega = 0)$ για το ίδιο σύστημα.

Παραδείγματα στην ενότητα «Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής – Απόσβεση – Εξωτερική Διέγερση – Συντονισμός»

Παράδειγμα 5.1 Η κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να αναπαρασταθεί, στο λεγόμενο χώρο των φάσεων, σχεδιάζοντας την ταχύτητά του ως συνάρτηση της απομάκρυνσής του. Η ιστορία του ταλαντωτή, σε αυτή την αναπαράσταση, παρουσιάζεται από μία καμπύλη. Υπολογίστε α) την ακριβή μορφή αυτής της καμπύλης στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, χωρίς τριβές, και β) την ποιοτική μορφή της στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με τριβές, (περίπτωση ασθενούς απόσβεσης).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ (α) Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι:

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}sx^2 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{\left(\sqrt{2E/m}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{2E/s}\right)^2} = 1$$

Επομένως, στο χώρο των φάσεων (x,υ), η κίνησή του αναπαρίσταται με έλλειψη.

(β) Παρουσία απωλειών, επειδή ο όρος της ολικής ενέργειας E είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, η κίνηση, στο χώρο των φάσεων (x,υ), είναι μία ελλειψοειδής σπείρα με μειούμενη ακτίνα, που συγκλίνει στο μηδέν.

Παράδειγμα 5.2 Δακτύλιος μάζας m και ακτίνας R κρέμεται από ένα σημείο της περιφέρειάς του σε στήριγμα χωρίς τριβές. Υπολογίστε το λόγο των συχνοτήτων ταλάντωσης για δύο διαφορετικές εκτροπές από τη θέση ισορροπίας : α) επί του επιπέδου του δακτυλίου, β) κάθετα στο επίπεδο του δακτυλίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η εξίσωση στροφικής κίνησης γράφεται: $I\ddot{\theta} = -mgx = -mgR\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mg}{I}\theta = 0$

Επομένως , για τις δύο διαφορετικές ταλαντώσεις, ο λόγος των συχνοτήτων είναι:

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$, όπου οι δύο ροπές αδράνειας υπολογίζονται ως εξής:

Θεωρούμε (x, y) το επίπεδο του δακτυλίου και z τον άξονα συμμετρίας, οπότε, οι άξονες ταλάντωσης (περί τους οποίους υπολογίζονται οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας) είναι οι $z' \parallel z$ και $x' \parallel x$, και οι δύο διερχόμενοι από το σημείο ανάρτησης. Η ροπή αδράνειας του δακτυλιδιού περί τον άξονα συμμετρίας του είναι $I_z = mR^2$. Με την εφαρμογή των κατάλληλων θεωρημάτων, αντίστοιχα έχουμε:

Θεώρημα παράλληλων αξόνων: $I_1 = I_{z'} = I_z + mR^2 = 2mR^2$

[Για επίπεδα στερεά σώματα, επί του x-y–επιπέδου ισχύει το θεώρημα των Καθέτων Αξόνων $I_x + I_y = I_z$, ανεξάρτητα από την ύπαρξη συμμετρίας, ή όχι, στο επίπεδο σχήμα].

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, συνδυάζουμε τη συμμετρία του συστήματος $\left(I_x = I_y\right)$ με το

Θεώρημα κάθετων αξόνων, οπότε: $I_z = I_x + I_y \Rightarrow 2I_x = I_z \Rightarrow I_x = {I_z}/{2} = \frac{mR^2}{2}$

σε συνδυασμό με το Θ. παράλληλων αξόνων: $I_2 = I_{x'} = I_x + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

Τελικά: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Παράδειγμα 5.3. Διατομικό μόριο αποτελείται από δύο άτομα με μάζες $m_1=m_0$ και $m_2=m_0/2$, των οποίων η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι της μορφής $U(r) = -U_0\, r/(r^2+a^2)$, όπου U_0, a, θετικές σταθερές και r το μέτρο της μεταξύ τους απόστασης. Να δείξετε ότι: α) υπάρχει απόσταση ευσταθούς ισορροπίας, r_0, μεταξύ των ατόμων και να την υπολογίσετε, β) για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο άτομα, το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, και γ) να υπολογίσετε την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $U(r) = -U_0\, r/(r^2+a^2)$: Συνθήκη ισορροπίας: $\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow r_0 = a$, όπου η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται : $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{r_0=a} = \frac{U_0}{2a^3} > 0$, άρα έχουμε σημείο ελαχίστου (ευσταθούς ισορροπίας)

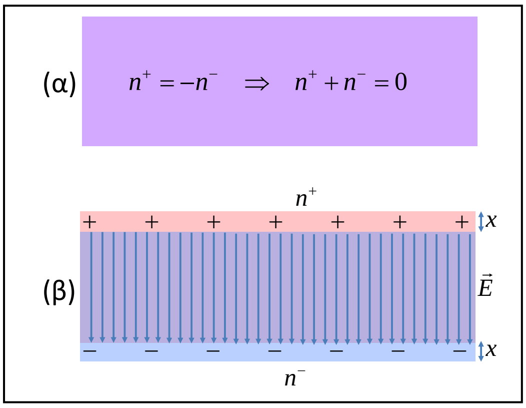
(β) Για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ισορροπίας, Βλ. παραδόσεις μαθήματος (Πρόβλημα 2 σωμάτων – ανηγμένη μάζα), απ' όπου έχουμε:

$$\mu\ddot{x} = F_x = \left[F(x=r_0) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=r_0}(x-r_0)\right] \Rightarrow \mu\frac{d^2(x-r_0)}{dt^2} = -\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=r_0}(x-r_o),$$

ή, ορίζοντας νέα μεταβλητή την διαφορά από την απόσταση ισορροπίας: $\xi = x - r_0$, και αντικαθιστώντας την τιμή της δεύτερης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας, που υπολογίσθηκε προηγουμένως στο $r_0 = a$ έχουμε:

$\mu \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=r_0} \xi \Rightarrow \mu\ddot{\xi} + \dfrac{U_0}{2a}\xi = 0$. Επομένως, το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{U_0}{2a^3\mu}}$, όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$: η ανηγμένη μάζα του συστήματος των 2 σωματιδίων.

Παράδειγμα 5.4 ***Ταλαντώσεις Πλάσματος.*** Πλάσμα είναι μία κατάσταση της ύλης (η λεγόμενη και τέταρτη κατάσταση) κατά την οποία συνυπάρχουν ίσης πυκνότητας θετικά και αρνητικά φορτία, τα οποία είναι ελεύθερα. Τα δύο είδη φορτίων είναι συνήθως ιονισμένα άτομα και ελεύθερα ηλεκτρόνια, που έχουν προέλθει από τον ιονισμό των ατόμων. (Ο ιονισμός έχει προέλθει από κάποιου είδου διέγερση, π.χ., μία ηλεκτρική εκκένωση, ή, υπεριώδη ακτινοβολία, όπως στην περίπτωση της ιονόσφαιρας, στην ατμόσφαιρα). Ιόντα και ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα να κινούνται, (και κινούνται στατιστικά με μεγάλες θερμικές ταχύτητες, συνήθως, έστι ώστε, στην περιοχή που συνυπάρχουν, να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φορτίο είναι μακροσοπικά μηδενικό). Σε μία ομοιόμορφη εξωτερική διέγερση, όμως, (π.χ., ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, ή ένα Ηλεκτρομαγνητικό κύμα), λόγω της μεγάλης διαφοράς μάζας μεταξύ τους, είναι πολύ καλή προσέγγιση να θεωρήσει κανείς ότι αποκτούν επιπλέον διατεταγμένη κίνηση (πέραν της θερμικής τους κίνησης) πολύ πιο αποτελεσματικά τα ηλεκτρόνια μάλλον παρά τα ιόντα.



Για να έχουμε μία εκτίμηση του πως συμπεριφέρεται το σύστημα σε μία εξωτερική διέγερση, θεωρούμε ότι έχουμε μία περιοχή του χώρου, σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, (a×b×c), όπου συνυπάρχουν δύο αντίθετες πυκνότητες φορτίου: $\rho^+ = en^+ = -\rho^- = -en^- = en$, (σχήμα (α)), όπου *n*: η πυκνότητα των φορτισμένων σωματιδίων, και $\pm e$: το φορτίου του κάθε σωματιδίου (θετικό, ή, αρνητικό). Θεωρούμε επίσης ότι διαταράσσουμε ελαφρώς, κατά *x*, την μία πυκνότητα ως προς την άλλη, (π.χ., κατά μήκος του άξονα *c*, *x*<<*c*)). Επειδή στις δύο άκρες του συστήματος, (κατά μήκος του άξονα-c), μένει ακάλυπτο φορτίο, σε μία περιοχή (*a*×*b*×*x*), που ισοδυναμεί με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίση με $\sigma^\pm = \dfrac{Q^\pm}{ab} = \dfrac{(abx)en^\pm}{ab} \Rightarrow \boxed{\sigma = enx}$, το υπόλοιπο πλάσμα θα βρίσκεται στην περιοχή ομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου, με ένταση $E = \sigma/\varepsilon_0 = enx/\varepsilon_0$, (όπου, ε_0: η διηλεκτρική σταθερά του κενού). Επομένως, τη ηλεκτρόνια, (ως τα σωματίδια με τη μικρότερη αδράνεια), θα αισθάνονται μία δύναμη η οποία θα έχει χαρακτηριστικά δύναμης επαναφοράς, όπως φαίνεται και από το σχήμα (β), άρα η εξίσωση κινησής τους θα γράφεται:

$$m_e\ddot{x} = -eE = -ne^2x/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(ne^2/m_e\varepsilon_0\right)x = 0$$

Άρα, τα ηλεκτρόνια θα εκτελούν αρμονική ταλάντωση, και η φυσική συχνότητα ταλάντωσης του πλάσματος θα είναι ίση με $\omega_p = \sqrt{\left(ne^2/m_e\varepsilon_0\right)}$: συχνότητα πλάσματος.

Εκτός από τις τρεις παγκόσμιες σταθερές (e, m_e, ε_0), η συχνότητα ταλάντωσης του πλάσματος εξαρτάται από την τετραγωνική ρίζα $\sqrt{n}$ της συγκέντρωσης φορτισμένων σωματιδίων στο πλάσμα. Δύο περιπτώσεις πλάσματος, μεταξύ άλλων, που έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι οι εξής.

Η μία περίπτωση αφορά τα ελεύθερα ηλεκτρόνια στους αγωγούς, όπου συνυπάρχουν με τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος. Για ένα τυπικό μέταλλο, όπως είναι ο χαλκός, η συγκέντρωση ελεύθερων ηλεκτρονίων είναι περίπου $8.5\times10^{22}cm^{-3}$. Η κυκλική συχνότητα αυτού του πλάσματος είναι

$$\omega_0 = 2\times10^{16}s^{-1} \quad \left(\nu_0 = 3\times10^{15}Hz \Rightarrow \lambda = c/\nu = 3\times10^{8}ms^{-1}/3\times10^{15}s^{-1} = 10^{-7}m = 100nm\right)$$

Το μήκος κύματος αντιστοιχεί στο υπεριώδες και είναι ένα από τα στοιχεία που εξηγούν γιατί τα μέταλλα ανακλούν όλα τα μήκη κύματος του ορατού φάσματος, τα μεγαλύτερα από αυτό.

Η δεύτερη περίπτωση αφορά το πλάσμα που δημιουργείται στην ιονόσφαιρα, στην οποία δύο χαρακτηριστικές ζώνες (μεταξύ άλλων) είναι οι D και F

F	140 km - 400 km	10^{12}m^{-3}	6×10^{7}s^{-1}	Κύρια περιοχή ανάκλασης	24h – Εντονώτερη την ημέρα
D	50 km - 90 km	10^{9}m^{-3}	2×10^{6}s^{-1}	Κύρια περιοχή απορρόφησης	Μόνο κατά την ημέρα

Παράδειγμα 5.5 Βρείτε για ποιό συνδυασμό αρχικών συνθηκών, ένας ταλαντωτής σε κατάσταση κρίσιμης απόσβεσης, διέρχεται από την κατάσταση ισορροπίας, πριν επανέλθει σε αυτήν ασυμπτωτικά.

Στην κρίσιμη απόσβεση, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα, $\rho_{1,2} = -\gamma$ και η γενική λύση, (όπως αναφέρεται ακριβώς μετά τη σχέση (9) της παραγράφου 6.1), γράφεται

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$$

Όσον αφορά στον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης, από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 - \gamma C_1 = \upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \upsilon_0 + \gamma x_0 .$$

Άρα, η λύση γράφεται $\qquad x(t) = \left[x_0 + (\upsilon_0 + \gamma x_0)t\right]e^{-\gamma t}$

Για την αναζήτηση των χρονικών στιγμών που ο ταλαντωτής διέρχεται από το σημείο ισορροπίας απαιτούμε $x(t) = 0$, οπότε:

$$\left[x_0 + (\upsilon_0 + \gamma x_0)t\right]e^{-\gamma t} = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} e^{-\gamma t} = 0 \\ x_0 + (\upsilon_0 + \gamma x_0)t = 0 \end{Bmatrix}$$

Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται για $t \to \infty$ (ασυμπτωτική κίνηση προς την κατάσταση ισορροπίας.

Η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται για $\qquad t = -\dfrac{x_0}{\upsilon_0 + \gamma x_0} = -\dfrac{1}{\gamma + (\upsilon_0 / x_0)}$.

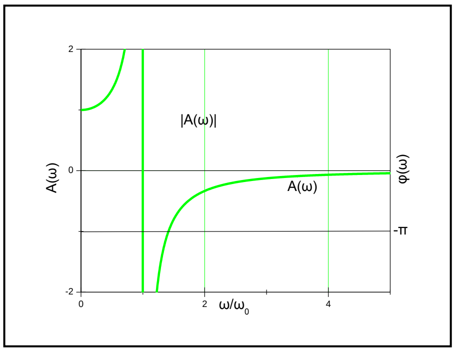
Επειδή αναζητούμε λύση $t > 0$ θα πρέπει $\quad \gamma + (\upsilon_0 / x_0) < 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_o < -\gamma x_0}$, δηλαδή η αρχική ταχύτητα θα πρέπει να έχει αντίθετη φορά από την αρχική απομάκρυνση και να είναι τόσο πιο μεγάλη, κατ' απόλυτη τιμή, όσο πιο μεγάλη είναι η σταθερά εκθετικής μείωσης γ, άρα και η σταθερά απορρόφησης.

Παράδειγμα 5.6 Ένας αρμονικός ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση, (μάζα$=m$, σταθερά ελατηρίου$=s$, συντελεστής τριβής$=r$) διεγείρεται με αρχικές συνθήκες, $\psi(t=0)=0$ και $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} = \upsilon_0$. **(α)** Αν το παραπάνω σύστημα, (m, s, r), διεγερθεί με εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, και θεωρήσουμε ότι το $r \simeq 0$, να υπολογίστε το πλάτος απομάκρυνσης της μόνιμης λύσης και να το σχεδιάσετε συναρτήσει του ω.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας γράφεται: $\psi(t)=\left(\upsilon_0/\omega_a\right)\left(e^{-\gamma t/2}\right)\sin\left(\omega_a t\right)$, και προσδιορίστε τα ω_a, γ, συναρτήσει των $\left(m, s, r\right)$.

(γ) Αν T_a είναι η περίοδος ταλαντωτή με ασθενή απόσβεση, και λ είναι ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων της $\psi(t)$, υπολογίστε την παράμετρο γ, συναρτήσει των T_a και λ.

Απάντηση



(α) Αν $r \simeq 0$, η διαφορική εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{\psi}+\dfrac{s}{m}\psi=\dfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)$, άρα η λύση θα είναι της μορφής $\psi=A\cos(\omega t)$, οπότε, παραγωγίζοντας 2 φορές και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε, μετά την απαλοιφή των $\cos(\omega t)$, την σχέση $A(\omega)=\dfrac{F_o/m}{\omega_o^2-\omega^2}$, που αποδίδεται από το σχήμα.

(β) Θα δείξουμε πρώτα ότι η συνάρτηση

$$\psi(t)=A\left(e^{-\gamma t/2}\right)\sin\left(\omega_a t\right),\quad A=\frac{\upsilon_0}{\omega_a}\ (1)$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης: $$\ddot{\psi}+\frac{r}{m}\dot{\psi}+\frac{s}{m}\psi=0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστούμε στην (2) τις $\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}$, όπως προκύπτουν από την (1), και ομαδοποιούμε τους συντελεστές του $\sin(\omega_a t)$ και $\cos(\omega_a t)$, που ο καθένας πρέπει να είναι συνολικά ίσος με μηδέν:

$$\ddot{\psi}+\frac{r}{m}\dot{\psi}+\frac{s}{m}\psi=0 \Rightarrow A\left[\frac{\gamma^2}{4}-\omega_a^2\right]e^{-\gamma t/2}\sin(\omega_a t)-A\gamma\omega_a e^{-\gamma t/2}\cos(\omega_a t)$$
$$+\frac{r}{m}\left[-\frac{A\gamma}{2}e^{-\gamma t/2}\sin(\omega_a t)+A\omega_a e^{-\gamma t/2}\cos(\omega_a t)\right]+\frac{s}{m}Ae^{-\gamma t/2}\sin(\omega_a t)=0$$

Μηδενίζοντας τον συντελεστή του $\sin(\omega_a t)$: $$A\left[\frac{\gamma^2}{4}-\omega_a^2\right]-\frac{r}{m}\frac{A\gamma}{2}+\frac{s}{m}A=0 \qquad (3)$$

Μηδενίζοντας τον συντελεστή του $\cos(\omega_a t)$: $$A\gamma\omega_a=A\frac{r}{m}\omega_a \Rightarrow \gamma=\frac{r}{m} \qquad (4)$$

και αντικαθιστώντας στην (3): $\omega_a^2=\dfrac{s}{m}-\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2=\omega_0^2-\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2$

(γ) $\psi(t)=A\left(e^{-\gamma t/2}\right)\sin\left(\omega_a t\right)$ και $\psi(t+T_a)=A\left(e^{-\gamma(t+T_a)/2}\right)\sin\left(\omega_a(t+T_a)\right)$

Επειδή έχουμε διαδοχικά μέγιστα $\sin\left(\omega_a t\right)=\sin\left(\omega_a(t+T_a)\right)=1$, οπότε

$$\lambda\equiv\frac{\psi(t)}{\psi(t+T_a)}=e^{\gamma T_a/2}\Rightarrow\gamma=2\frac{\ln\lambda}{T_a}$$

Παράδειγμα 5.7 Δείξτε ότι στην περίπτωση απλού αρμονικού ταλαντωτή (μάζας *m* και σταθεράς ελατηρίου *s*), ο οποίος υφίσταται δύναμη τριβής $\boldsymbol{F}_{τριβής}= -F_0\boldsymbol{\upsilon}/|\boldsymbol{\upsilon}|$, σταθερού μέτρου F_o, (και όχι $\boldsymbol{F}_{τριβής}=-r\boldsymbol{\upsilon}$, όπως στην περίπτωση ιξώδους τριβής), η περίοδος παραμένει ίδια με εκείνη του αντίστοιχου απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση. Τι συμβαίνει με τα πλάτη, σε αυτή την περίπτωση ; [Υπόδειξη: Δοκιμάστε να λύσετε το πρόβλημα με τη χρήση δύο νέων μεταβλητών θέσης : $x_\delta=x+F_0/s$, για κίνηση προς τα δεξιά (δ, ταχύτητες θετικές), και $x_\alpha=x-F_0/s$, για κίνηση προς τα αριστερά (α, ταχύτητες αρνητικές), αντίστοιχα.]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α1) Κίνηση προς τα δεξιά (**υ**/|**υ**|= $\hat{x}$): $m\ddot{x}=-sx-F_o \Rightarrow m\ddot{x}+\left(x+\frac{F_0}{s}\right)s=0$

Εισάγοντας $x_\delta=x+\frac{F_0}{s}\Rightarrow \ddot{x}_\delta=\ddot{x}$, και επομένως: $m\ddot{x}_\delta+sx_\delta=0\Rightarrow \ddot{x}_\delta+\left(\frac{s}{m}\right)x_\delta=0$

Άρα, η κίνηση είναι αρμονική με τετράγωνο κυκλικής συχνότητας $\omega_o^2=\left(\frac{s}{m}\right)$

Και επομένως: $x_\delta=A\cos(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow x=-\frac{F_0}{s}+A\cos(\omega_0 t+\varphi)\qquad(1)$

(α2) Κίνηση προς τα αριστερά (**υ**/|**υ**|=- $\hat{x}$): $m\ddot{x}=-sx+F_o\Rightarrow m\ddot{x}+\left(x-\frac{F_0}{s}\right)s=0$

Εισάγοντας $x_\alpha=x-\frac{F_0}{s}\Rightarrow \ddot{x}_\alpha=\ddot{x}$, και επομένως: $m\ddot{x}_\alpha+sx_\alpha=0\Rightarrow \ddot{x}_\alpha+\left(\frac{s}{m}\right)x_\alpha=0$

Άρα, η κίνηση είναι επίσης αρμονική με τετράγωνο κυκλικής συχνότητας $\omega_o^2=\left(\frac{s}{m}\right)$

Και επομένως: $x_\alpha=B\cos(\omega_0 t+\theta)\Rightarrow x=\frac{F_0}{s}+B\cos(\omega_0 t+\theta)\qquad(2)$

(β) Ας υποθέσουμε ότι η διέγερση του συστήματος γίνεται με τις αρχικές συνθήκες

$$x(t=0)=x_0,\qquad \dot{x}(t=0)=0$$

Αμέσως μετά την επιβολή αυτών των συνθηκών και την απελευθέρωση του συστήματος, η μάζα m κινείται προς τα αριστερά, επομένως οι αρχικές συνθήκες πρέπει να εφαρμοσθούν επί της λύσης (2): $x=\frac{F_0}{s}+B\cos(\omega_0 t+\theta)$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x_0=\frac{F_0}{s}+B\cos(\theta)\\ 0=-\omega B\sin(\theta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\theta=0\\ B=x_0-\frac{F_0}{s}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{F_0}{s}+\left(x_0-\frac{F_0}{s}\right)\cos(\omega_0 t)\quad(3)$$

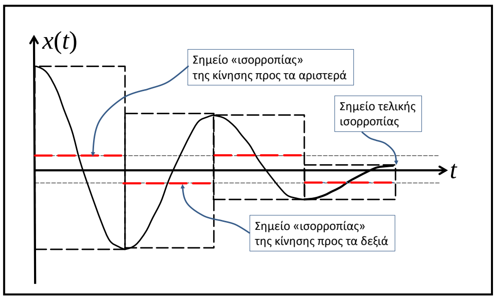
Οπότε, το μέγιστο αρνητικό πλάτος, για την κίνηση αυτή, αντιστοιχεί σε $\cos(\omega t)=-1\Rightarrow x_{\min}=\frac{F_0}{s}-\left(x_0-\frac{F_0}{s}\right)\Rightarrow x_{\min}=-\left(x_0-\frac{F_0}{s}\right)+\frac{F_0}{s}=-x_0+\frac{2F_0}{s}$

Από αυτό το σημείο και έπειτα, η μάζα m κινείται προς τα δεξιά, οπότε, οι αρχικές συνθήκες επιβάλλονται στη γενική λύση (1): $x_\delta=A\cos(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow x=-\frac{F_0}{s}+A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$$x=-\frac{F_0}{s}+A\cos(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x_{\min}=-x_0+\frac{2F_0}{s}=-\frac{F_0}{s}+A\cos(\varphi)\\ 0=-\omega A\sin(\varphi)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi=0\\ A=-x_0+\frac{3F_0}{s}\end{array}\right\}$$

$x_\delta=A\cos(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow x=-\frac{F_0}{s}+\left(-x_0+\frac{3F_0}{s}\right)\cos(\omega_0 t+\varphi)\qquad(4)$, κ.ο.κ.

Από τις λύσεις (3) και (4) διαπιστώνουμε ότι η θέση «ισορροπίας», ανά ημιπερίοδο, αλλάζει, μετατοπιζόμενη στα σημεία $\pm\dfrac{F_0}{s}$, αντίστοιχα, επομένως, και το ενεργό πλάτος μειώνεται κατά $\dfrac{2F_0}{s}$, ανά περίοδο. Αυτός η μηχανισμός έχει ως αποτέλεσμα την σταδιακή μείωση του πλάτους, παρά την αμετάβλητη συχνότητα και παρά την έλλειψη όρου εκθετικής απόσβεσης στη λύση.



Αν το αρχικό πλάτος είναι x_0 και η αρχική ταχύτητα μηδενική, τότε η συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα είναι $E_{o\lambda} = sx_0^2/2$, και δαπανάται από την δύναμη της τριβής στις διαδοχικές ημιπεριόδους, σταθερής χρονικής διάρκειας η κάθε μία αλλά διαδοχικά μειούμενου πλάτους. Η κίνηση αυτή αποδίδετα στο διπλανό σχήμα.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το συνολικό αριθμό n των ημιπεριόδων που θα διανυθούν, θα πρέπει να εξισώσουμε την αρχική δυναμική ενέργεια με τη συνολκή απώλεια λόγω τριβής, σε όλες τις (ημι-)περιόδους

1^{η} Ημι-περίοδος: $x = \dfrac{F_0}{s} + \left(x_0 - \dfrac{F_0}{s}\right)\cos(\omega_0 t)$, επομένως, οι δύο ακραίες θέσεις είναι:

$$x(t=0) = x_0, \qquad x(t=T/2) = -x_0 + 2\frac{F_0}{s}$$

Η καθαρή μετατόπιση της $1^{\eta\varsigma}$ Ημι-περιόδου έχει μέτρο: $s_1 = \left|x(0) - x(T/2)\right| = 2x_0 - 2\dfrac{F_0}{s}$

2^{η} Ημι-περίοδος: $x = -\dfrac{F_0}{s} + \left(-x_0 + 3\dfrac{F_0}{s}\right)\cos(\omega_0 t)$, επομένως, οι δύο ακραίες θέσεις είναι:

$$x(t=0) = -x_0 + 2\frac{F_0}{s}, \qquad x(t=T/2) = x_0 - 4\frac{F_0}{s}$$

Η καθαρή μετατόπιση της $2^{\eta\varsigma}$ Ημι-περιόδου έχει μέτρο: $s_2 = \left|x(0) - x(T/2)\right| = 2x_0 - 6\dfrac{F_0}{s}$

Γενικεύοντας: η καθαρή μετατόπιση της n-στής Ημι-περιόδου: $s_n = 2x_0 - 2(2n-1)\dfrac{F_0}{s}$. Άρα, η απώλεια ενέργειας, λόγω τριβής, κατά την n-στή Ημι-περίοδου θα είναι ίση με:

$$\Delta E_n = F_o s_n = F_0\left(2x_0 - 2(2n-1)\frac{F_0}{s}\right) \Rightarrow \Delta E_n = 2F_0 x_0 - 2(2n-1)\frac{F_0^2}{s}$$

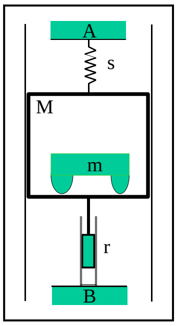
Επομένως, αν N είναι ο ολικός αριθμός ημιπεριόδων: $E_{o\lambda} = sx_0^2/2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\Delta E_n$

$$E_{o\lambda} = sx_0^2/2 = \sum_{n=1}^{N}\Delta E_n = \sum_{n=1}^{n}\left[2F_0x_0 - 2(2n-1)\frac{F_0^2}{s}\right] = \sum_{n=1}^{n}\left[2F_0x_0 - 4n\frac{F_0^2}{s} + 2\frac{F_0^2}{s}\right]$$

$$\frac{sx_0^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{N}F_0x_0 - 4\sum_{n=1}^{N}n\frac{F_0^2}{s} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{F_0^2}{s} = 2F_0x_0N - 4\frac{F_0^2}{s}\sum_{n=1}^{N}n + 2\frac{F_0^2}{s}N$$

$$\frac{sx_0^2}{2} = 2F_0x_0N - 4\frac{F_0^2}{s}\frac{N(N+1)}{2} + 2\frac{F_0^2}{s}N \quad\Rightarrow\quad N^2 - \frac{x_0 s}{F_0}N + \frac{x_0^2 s^2}{4F_0^2} = 0$$

Το τελευταίο τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα: $N = \dfrac{x_0 s}{2F_0}$



Παράδειγμα 5.8 Θάλαμος συνολικής μάζας M=60 kg, είναι τοποθετημένος σε κατακόρυφο φρεάτιο, έτσι ώστε να κινείται μόνο κατακόρυφα, χωρίς τριβές με τα τοιχώματα του φρεατίου. Ο θάλαμος στηρίζεται, σε ακλόνητες βάσεις A και B, με σύστημα ανάρτησης, το οποίο αποτελείται από ελατήριο σταθεράς σκληρότητας s και από συνδυασμό εμβόλου-φιάλης, που διαθέτει μηχανισμό ελεγχόμενης απόσβεσης, και ισοδυναμεί με ιξώδη τριβή της μορφής $\mathbf{F}_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma}= -r\,\boldsymbol{\upsilon}$, όπου $\boldsymbol{\upsilon}$ η ταχύτητα, και r ένας ρυθμιζόμενος συντελεστής απόσβεσης. Στον θάλαμο τοποθετείται συσκευή μάζας m=40 kg. Κατά την τοποθέτηση της συσκευής, (με τρόπο που να μην δημιουργούνται ταλαντώσεις), ο θάλαμος χαμηλώνει κατά 1 cm, και ισορροπεί. **α**) Να υπολογιστεί η σταθερά σκληρότητας s του ελατηρίου. **β**) Να υπολογιστεί η κρίσιμη τιμή r_0, που πρέπει να επιλεγεί για τον συντελεστή απόσβεσης, έτσι ώστε, σε περίπτωση διαταραχής, να έχουμε την ταχύτερη δυνατή ασυμπτωτική επαναφορά του συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας, χωρίς ταλαντωτική συμπεριφορά. **γ**) Να γραφεί, συναρτήσει του χρόνου, η αντίστοιχη μετατόπιση x=x(t) του συστήματος, από την κατάσταση ισορροπίας, αν η αρχική απομάκρυνση είναι μηδενική και η αρχική ταχύτητα (διαταραχής) είναι 10 m/s. **δ**) Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος, αν η σταθερά απόσβεσης γίνει $r = r_0\sqrt{2,4}/2$. **ε**) Να γραφεί, συναρτήσει του χρόνου, η αντίστοιχη μετατόπιση x=x(t) του συστήματος, [με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, όπως στο ερώτημα (γ)]. [Δίνεται: επιτάχυνση βαρύτητας g=10m/s^2].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) M = 60 kg, m = 40 kg

$$s = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{40kg\times 10m/s^2}{0.01m} = 4\times 10^4 kg/s^2 = 4\times 10^4 N/m$$

$$\omega_0^2 = \frac{s}{M+m} = \frac{4\times 10^4 kg/s^2}{10^2 kg} = 4\times 10^2 s^{-2} \Rightarrow \omega_0 = 20 s^{-1}$$

β) Κρίσιμη απόσβεση: $\left(\dfrac{r_0}{2(M+m)}\right)^2 = \omega_0^2 = \dfrac{s}{M+m} \Rightarrow r_0 = 2\sqrt{s(M+m)} = 4\times 10^3 kg/s$

γ) Κίνηση κατά την κρίσιμη απόσβεση

(διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου): $x(t) = (A+Bt)e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$

Εφαρμογή αρχικών συνθηκών:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (A+Bt)e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}} \\ x(t=0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow x(t) = Bt\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$$

$$x(t) = Bt\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}} \Rightarrow \dot{x}(t) = B\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}} - \frac{r_0}{2(M+m)}Bt\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}\left(1-\frac{r_0 t}{2(M+m)}\right) \\ \dot{x}(t=0) &= \upsilon_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = \upsilon_0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}\left(1-\frac{r_0 t}{2(M+m)}\right), \quad \kappa\alpha\iota \quad x(t) = \upsilon_0 t\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}, \quad \text{με} \quad \frac{r}{2(M+m)} = \omega_0 = 20 s^{-1}$$

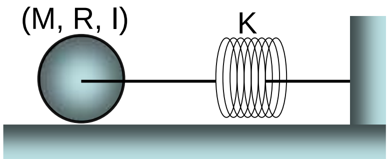
δ) $\dfrac{r'}{2(M+m)} = 10\sqrt{2,4}s^{-1} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(r'/2(M+m)\right)^2} = \sqrt{400s^{-2} - 240s^{-2}} = 4\sqrt{10}s^{-1}$

ε) $\left.\begin{aligned} x(t) = Ae^{-\frac{r't}{2(M+m)}}\sin(\omega' t+\phi) \\ x(t=0)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi = 0$

$$x(t) = Ae^{-\frac{r't}{2(M+m)}}\sin(\omega' t) \Rightarrow \upsilon(t) = Ae^{-\frac{r't}{2(M+m)}}\left(\omega'\cos(\omega' t) - \frac{r'}{2(M+m)}\sin(\omega' t)\right)$$

$$\upsilon(t=0) = \upsilon_0 \Rightarrow A\omega' = \upsilon_0 \Rightarrow A = \frac{\upsilon_0}{\omega'}$$

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{r't}{2(M+m)}}\left(\cos(\omega' t) - \frac{r'}{2(M+m)\omega'}\sin(\omega' t)\right)$$



Παράδειγμα 5.9 Κύλινδρος μάζας M, ακτίνας R και ροπής αδράνειας (περί τον άξονά του) I, είναι συνδεδεμένος, (μέσω του άξονος), με ελατήριο σταθεράς K του οποίου το σταθερό άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται, χωρίς ολίσθηση, σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα. (α) Να γράψετε τις εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης. (β) Να επιλύσετε τις εξισώσεις κίνησης, απαλείφοντας τον όρο της τριβής ανάμεσα στις δύο εξισώσεις του ερωτήματος (α), και να υπολογίσετε την συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. (γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο πλάτος της μεταφορικής κίνησης, πέρα από το οποίο το κυλινδρικό σώμα αρχίζει να ολισθαίνει ως προς το οριζόντιος δάπεδο, αν ο συντελεστής στατικής τριβής δαπέδου-σώματος είναι μ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Θεωρούμε στιγμιότυπο της κίνησης κατά το οποίο το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά x (συμπίεση ελατηρίου), οπότε δέχεται δύναμη επαναφοράς προς τα αριστερά, με αποτέλεσμα να αισθάνεται τριβή από το δάπεδο, προς τα δεξιά. Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται (χωρίς ολίσθηση), η τριβή αυτή είναι στατική τριβή και επομένως παίρνει τιμές: $0 < T < T_{\max} = n_{\sigma\tau}F_{\kappa\alpha\vartheta} = \mu Mg$

Με αυτά τα δεδομένα, οι εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης γράφονται, αντίστοιχα: $M\ddot{x} = T - sx$ (1), και $I\ddot{\theta} = -TR$ (2),

όπου $\theta = \dfrac{x}{R} \Rightarrow \ddot{\theta} = \dfrac{\ddot{x}}{R}$ (3), όπου I : η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου.

(β) Για την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1) και (2), χρησιμοποιούμε τον σύνδεσμο (3), και απαλείφουμε την T, μεταξύ των (1), (2), δεδομένου ότι δεν είναι γνωστή η τιμή του.

$$M\ddot{x} = -I\frac{\ddot{\theta}}{R} - sx \Rightarrow M\ddot{x} + \frac{I}{R^2}\ddot{x} + sx = 0 \Rightarrow \left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} + sx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{s}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}x = 0$$

Επομένως, η συνάρτηση της μετατόπισης είναι αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{s}{\left(M + \dfrac{I}{R^2}\right)}}$

(γ) Από τη σχέση (2), έχουμε: $T = \dfrac{I}{R}\ddot{\theta} = \dfrac{I}{R^2}\ddot{x}$, όπου:

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow |\ddot{x}_{max}| = A\omega_0^2$$

Επομένως: $T_{max} = \dfrac{I}{R^2}|\ddot{x}_{max}| = \dfrac{I}{R^2}A\omega_0^2 \le \mu Mg \Rightarrow A \le \dfrac{R^2 \mu Mg}{I\omega_0^2}$

Παράδειγμα 5.10 Απλός αρμονικός ταλαντωτής, (σημειακή μάζα M, σταθερά ελατηρίου K), χωρίς τριβές, διεγείρεται από εξωτερική αρμονική δύναμη $F = F_0 \cos(\omega t)$, όπου η κυκλική συχνότητα διέγερσης ω είναι διαφορετική από την φυσική κυκλική συχνότητα, $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ του συστήματος. (α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση (ΔΕ) κίνησης. (β) Υπολογίστε μία ειδική λύση της πλήρους ΔΕ, με τη μορφή $x_1(t) = C\cos(\omega t)$ και προσδιορίστε το C. (γ) Γράψτε την γενική λύση της πλήρους ΔΕ ως γραμμικό συνδυασμό $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, όπου $x_2(t) = B\cos(\omega_o t + \beta)$, μία γενική λύση της ομογενούς ΔΕ. (δ) Εφαρμόστε τις αρχικές συνθήκες, $\{x(t=0) = 0, \dot{x}(t=0) = 0\}$ και προσδιορίστε τα B και β. (ε) Σχολιάστε την κίνηση του συστήματος, όταν οι $\omega \approx \omega_0$ και όταν ($\omega << \omega_0$, ή, $\omega >> \omega_0$).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Διαφορική εξίσωση κίνησης : $M\ddot{x} + Kx = F_0 \cos(\omega t)$

(β) Ειδική λύση της πλήρους ΔΕ: $x_1(t) = C\cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 C\cos(\omega t)$, και αντικαθιστώντας στη ΔΕ :

$$M\ddot{x} + Kx = F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow -\omega^2 MC\cos(\omega t) + KC\cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow C = \frac{F_0 / M}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

(γ) Γενική λύση της πλήρους ΔΕ:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = B\cos(\omega_o t + \beta) + \frac{F_0 / M}{\omega_o^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

(δ) Εφαρμογή αρχικών συνθηκών: $\{x(t=0) = 0, \dot{x}(t=0) = 0\}$

$$0 = B\cos(\beta) + \frac{F_0 / M}{\omega_o^2 - \omega^2}, \qquad \text{και,} \qquad 0 = -\omega_0 B\sin(\beta) - \omega\frac{F_0 / M}{\omega_o^2 - \omega^2}\sin(0) \Rightarrow \beta = 0,$$

οπότε : $B = -\dfrac{F_0 / M}{\omega_o^2 - \omega^2}$, και επομένως, η λύση για τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες γράφεται :

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=-\frac{F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}\cos(\omega_o t)+\frac{F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}\cos(\omega t)\Rightarrow x(t)=\frac{F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\right)$$

(ε) Κίνηση, όταν όταν οι $\omega\approx\omega_0$:

$$x(t)=\frac{2F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}\sin\left(\frac{(\omega+\omega_0)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right)\approx\frac{2F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}\left(\sin(\omega_0 t)\right)\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$$

Δηλαδή: $x(t)\approx\left[\frac{F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}(\omega_0-\omega)t\right]\left(\sin(\omega_0 t)\right)$: ταλάντωση με την συχνότητα συντονισμού και με γραμμικά αυξανόμενο πλάτος.

Όταν ($\omega<<\omega_0$, ή, $\omega>>\omega_0$): $x(t)=\left[\frac{2F_0/M}{\omega_o^2-\omega^2}\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{(\omega+\omega_0)t}{2}\right)$: διακροτήματα με μικρό πλάτος (λόγω της παρουσίας του $\omega_0^2-\omega^2$ στον παρανομαστή του πλάτους.

Παράδειγμα 5.11 Ένας αρμονικός ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση, (μάζα$=m$, σταθερά ελατηρίου$=s$, συντελεστής τριβής$=r$) διεγείρεται με εξωτερική δύναμη που η μιγαδική της αναπαράσταση είναι $F(t)=F_0e^{i\omega t}$.

(α) Γράψτε την διαφορική εξίσωση κίνησης, για την απομάκρυνση x από την κατάσταση ισορροπίας. Υποθέστε ότι έχετε μόνιμη κατάσταση κίνησης, (τα μεταβατικά φαινόμενα έχουν μηδενιστεί), και αναζητείστε λύση της μορφής $x=x_0e^{i\omega t}$. Υπολογίστε το μιγαδικό πλάτος x_0 της απομάκρυνσης, συναρτήσει των F_0, m, s, r και ω, στη μόνιμη κατάσταση.

(β) Γράψτε το μιγαδικό πλάτος με τη μορφή $x_0=Ae^{-i\varphi}$, και προσδιορίστε τα πραγματικά μεγέθη A και $\tan\varphi$, καθώς και τις τιμές της φάσης φ, όταν $\omega\to 0$ και $\omega\to\infty$

(γ) Δώστε τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις μιγαδικές παραστάσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Διαφορική εξίσωση κίνησης: $m\ddot{x}=-sx-r\dot{x}+F_0e^{i\omega t}\Rightarrow m\ddot{x}+sx+r\dot{x}=F_0e^{i\omega t}$

Μόνιμη λύση: $x=x_0e^{i\omega t}\quad\Rightarrow\quad\dot{x}=i\omega x_0e^{i\omega t}\quad\Rightarrow\quad\ddot{x}=-\omega^2x_0e^{i\omega t}$

Για τον υπολογισμό του μιγαδικού πλάτους, αντικαθιστούμε τις εκφράσεις για τα $x, \dot{x}, \ddot{x}$, στη διαφορική εξίσωση, οπότε:

$$\left(-\omega^2m+s+i\omega r\right)x_0e^{i\omega t}=F_0e^{i\omega t}\quad\Rightarrow\quad x_0=\frac{F_0}{-\omega^2m+s+i\omega r}$$

Τελικά : $x_0=\dfrac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\, r/m}$, όπου $\omega_0^2=\dfrac{s}{m}$: η φυσική συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος, αν δεν υπήρχε τριβή $(r=0)$ και εξωτερική μόνιμη δύναμη $(F_0=0)$.

(β) Για να γράψουμε το μιγαδικό πλάτος με τη μορφή $x_0 = Ae^{-i\varphi}$, γράφουμε τον μιγαδικό παρανομαστή με τη μορφή: (μέτρο)$e^{i(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta)}$, δηλαδή,

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \, r/m = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \, r/m\right)^2} \, e^{i\arctan\frac{\omega r/m}{\omega_0^2-\omega^2}}$$, οπότε

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\, r/m} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\, r/m\right)^2}\, e^{i\arctan\frac{\omega r/m}{\omega_0^2-\omega^2}}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\, r/m\right)^2}} e^{-i\varphi}$$

Επομένως: $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\, r/m\right)^2}}$, $\tan\varphi = \dfrac{\omega\, r/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Ισοδύναμα: $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{(s - \omega^2 m)^2 + \omega^2 r^2}}$, $\tan\varphi = \dfrac{r}{s/\omega - \omega m}$

Οι οριακές συμπεριφορές της φάσης, επομένως είναι :

$$\varphi(\omega \to 0) \to 0, \qquad \varphi(\omega \to \infty) \to \pi$$

(γ) Έχουμε : $x = x_0 e^{i\omega t}$ και $x_0 = Ae^{-i\varphi}$, άρα $x = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$

Και, επομένως, ταχύτητα: $\dot{x} = i\omega A e^{i(\omega t - \varphi)}$, και επιτάχυνση: $\ddot{x} = -\omega^2 A e^{i(\omega t - \varphi)}$

Παράδειγμα. 5.12 Το πλάτος των ταλαντώσεων απλού εκρεμούς με μήκος *L=1m* ελαττώνεται κατά ένα παράγοντα *e*, κατά τη διάρκεια 50 πλήρων ταλαντώσεων. Το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς τίθεται σε απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους 1mm, αναγκάζοντας και το εκκρεμές να διεγερθεί.
Δείξτε ότι, αν η απομάκρυνση από την κατάσταση ηρεμίας είναι ξ, για το σημείο ανάρτησης, και x, για τη μάζα του εκκρεμούς, τότε το εκκρεμές ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{g}{L}\xi$$

α) Προσδιορίστε τα γ και ω_0. β) Επιλύστε την εξίσωση για την μόνιμη κατάσταση, αν $\xi=\xi_0 cos(\omega t)$. γ) Βρείτε τον παράγοντα ποιότητας Q και το πλάτος του εκκρεμούς, σε κατάσταση συντονισμού. δ) Σε ποια συχνότητα διέγερσης ω, το πλάτος ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται ως προς το πλάτος συντονισμού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατήρηση: Η πρώτη πρόταση του προβλήματος αναφέρεται σε μία παρατήρηση (πείραμα) με μία (εφ' άπαξ) διέγερση και με το σημείο ανάρτησης ακίνητο.

Το γεγονός ότι το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται κατά έναν παράγοντα e, $\left(e \simeq 2,72 \;\Rightarrow\; e^{-1} \simeq 0.37\right)$, σε χρονικό διάστημα 50 πλήρων ταλαντώσεων, δηλώνει ότι έχουμε μία ταλάντωση με ασθενή απόσβεση. Σε αυτή την περίπτωση, η διαφορική εξίσωση κίνησης (χωρίς συνεχή εξωτερική διέγερση) γράφεται:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + mg\frac{x}{L} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{g}{L}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

όπου έχουμε ορίσει (για συμφωνία με την εκφώνηση): $\gamma = \dfrac{r}{m}$, και

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \approx \frac{10ms^{-2}}{1m} = 10s^{-2}.$$

Για την περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης, η συνάρτηση απομάκρυνσης έχει τη μορφή:

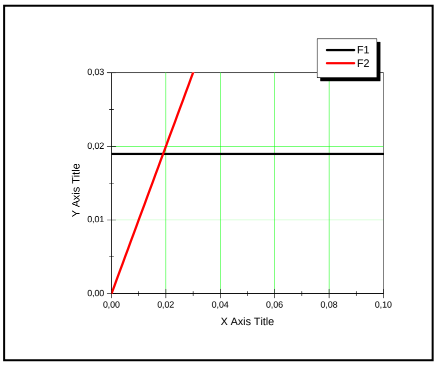
$$x(t) = Ae^{-\frac{rt}{2m}}\cos(\omega' t + \varphi) = \left(Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\right)\cos(\omega' t + \varphi),$$

όπου, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} \Rightarrow \dfrac{2\pi}{T'} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$.

Για τον προσδιορισμό της παραμέτρου γ, χρησιμοποιούμε το πρώτο δεδομένο του προβλήματος:

για $t = 50T'$, έχουμε

$$Ae^{-\frac{\gamma 50T'}{2}} = Ae^{-1} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{50T'} = \frac{2}{50}\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}{2\pi} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{50\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$



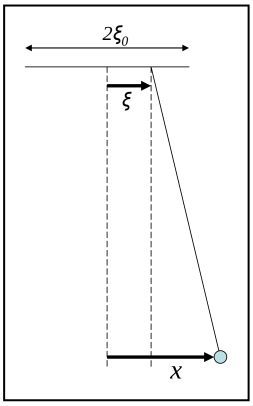
Από την τελευταία έκφραση μπορούμε να υπολογίσουμε το γ, είτε προσεγγιστικά (θεωρώντας αμελητέα την συνεισφορά του στο υπόριζο, οπότε:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{50\pi} = \frac{\sqrt{10s^{-1}}}{50\pi} \Rightarrow \gamma \simeq \frac{1}{50}s^{-1} = 0,02s^{-1},$$

είτε ακριβώς, σχεδιάζοντας, συναρτήσει του γ, τις συναρτήσεις

$$f_1(\gamma) = \gamma, \quad \kappa\alpha\iota \quad f_2(\gamma) = \frac{1}{50\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = 0,006\sqrt{10s^{-2} - (\gamma/2)^2}$$

, και προσδιορίζοντας το σημείο τομής τους, το οποίο βρίσκεται στην τιμή $\gamma \simeq 0,019s^{-1}$.
Παρατηρούμε ότι το σφάλμα του προσεγγιστικού υπολογισμού είναι της τάξης του 5%.



Στη συνέχεια μελετάμε το σύστημα όταν το σημείο ανάρτησης εκτελεί μία αρμονική ταλάντωση της μορφής $\xi = \xi_0\cos(\omega t)$, και γράφουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης με βάση ένα τυχαίο στιγμιότυπο, όπως στο σχήμα:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - mg\frac{x-\xi}{L} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{g}{L}x = \frac{g}{L}\xi \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{g}{L}\xi$$

Η γενική λύση είναι:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega' t + \varphi) + B\cos(\omega t)$$

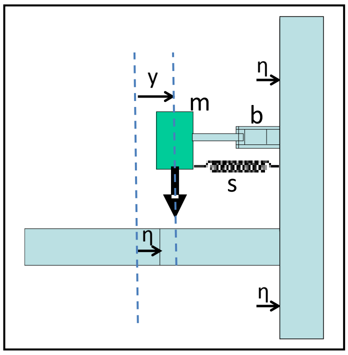
Ο παράγοντας ποιότητας: $Q = \dfrac{\omega}{\gamma} \simeq 158$

Το πλάτος ταλάντωσης, σε κατάσταση συντονισμού:

$$A_{\max} \approx \frac{F_0}{\omega' r} \approx \frac{F_0/m}{\omega_0 (r/m)} \simeq \frac{g\xi_0/L}{\omega_0 \gamma} \simeq 158mm = Q\xi_0$$

Οι συχνότητες υποδιπλασιασμού του πλάτους (ως προς το πλάτος συντονισμού): $\omega = \omega_0 \pm \gamma$

Παράδειγμα 5.13



Λειτουργία Σεισμογράφου. Σεισμογράφος αποτελείται από σύστημα μάζας-ελατηρίου και μηχανισμό απόσβεσης, όπως φαίνονται στο σχήμα. Οι παράμετροι του συστήματος είναι τέτοιες ώστε $sm = 49\,b^2$, και $\sqrt{s/m} = \omega_0 = 8\,s^{-1}$.

(α) Υπολογίστε τον συντελεστή ποιότητας της διάταξης, και εξηγείστε το φυσικό του νόημα, (α_1) τόσο σε σχέση με τα ενεργειακά χαρακτηριστικά του συστήματος, όταν ταλαντώνεται λόγω <u>στιγμιαίας διαταραχής</u>, (α_2) όσο και σε σχέση με τα χαρακτηριστικά της καμπύλης συντονισμού του πλάτους απομάκρυνσης, όταν εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με <u>μόνιμη αρμονική διέγερση</u>. [Σχεδιάστε κατάλληλα σχήματα].

(β) Αν $\eta = \eta(t)$ είναι η οριζόντια ταλάντωση της επιφάνειας της Γης, κατά την διάρκεια ενός σεισμού, να γραφεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την απομάκρυνση $y = y(t)$ της ακίδας του σεισμογράφου, (όσο διαρκεί ο σεισμός), από την θέση ηρεμίας, (ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς), καθώς και η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την απομάκρυνση $\xi(t) = y(t) - \eta(t)$ της ακίδας του σεισμογράφου, όσο διαρκεί ο σεισμός, από την θέση ισορροπίας, (ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς του σεισμογράφου).

(γ) Αν $\eta = B\cos(\omega t)$ είναι η ταλάντωση της επιφάνειας της Γης, κατά την διάρκεια ενός σεισμού, να γραφεί η γενική μορφή για την συνάρτηση $\xi(t) = y(t) - \eta(t)$, συναρτήσει των s, m, b, ω, και κάποιων σταθερών που έχουν σχέση με τις αρχικές συνθήκες και δεν ζητείται να προσδιορισθούν. Αν $\omega = 9\,s^{-1}$, σχεδιάστε μία ποιοτική εικόνα της $y = y(t)$.

(δ) Σχεδιάστε μία ποιοτική εικόνα της $y = y(t)$, αμέσως μετά την λήξη του σεισμού $\left(\eta(t) = 0\right)$. [Το σχέδιο να γίνει σε κλίμακα χρόνου και να αποδίδει τον συντελεστή ποιότητας που υπολογίσατε στο ερώτημα (α)].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Συντελεστής ποιότητας της διάταξης

$$Q \approx \frac{\omega_0}{b/m} = \frac{\omega_0 m}{b} = \frac{\sqrt{s/m}\,m}{b} = \frac{\sqrt{sm}}{b} = \frac{\sqrt{49b^2}}{b} \Rightarrow Q = 7$$

Φυσικό νόημα του συντελεστή ποιότητας του συστήματος

(α_1) Ως προς τα ενεργειακά χαρακτηριστικά του συστήματος όταν ταλαντώνεται λόγω <u>στιγμιαίας διαταραχής</u>, : σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα, μετά την αρχική διέγερση, εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση λόγω της ιξώδους τριβής. Αν E είναι η συνολική του ενέργεια, σε κάποια φάση αυτής της κίνησης, και ΔE είναι η μεταβολή ενέργειας σε μία πλήρη περίοδο αυτής της κίνησης, τότε ο παράγοντας ποιότητας είναι $Q = 2\pi \dfrac{E}{\Delta E}$

[Σχήμα ταλάντωσης με ασθενή απόσβεση, και σχέση πλατών διαδοχικών περιόδων που προκύπτει ως εξής :

$$Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}=7\Rightarrow\frac{E}{\Delta E}=\frac{3,5}{\pi}\Rightarrow\frac{E}{E-\Delta E}=\frac{3,5}{3,5-\pi}\Rightarrow\frac{E_0}{E_1}\approx\frac{3,5}{0,35}\Rightarrow\frac{A_0^2}{A_1^2}\approx10\Rightarrow\frac{A_0}{A_1}=\sqrt{10}\ ]$$

(α_2) Ως προς τα χαρακτηριστικά της καμπύλης συντονισμού του πλάτους απομάκρυνσης, όταν εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με <u>μόνιμη αρμονική διέγερση</u> : σε αυτή την περίπτωση, αν $\omega_r\approx\omega_0$ είναι η συχνότητα συντονισμού του πλάτος απομάκρυνσης και $\Delta\omega$ είναι το συνολικό εύρος της καμπύλης συντονισμού στο μισό του ύψους της (FWHM), τότε ισχύει: $Q=\dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$. [Σχήμα καμπύλης συντονισμού με $\omega_r=4\cdot\Delta\omega$]

(β) Αν $\eta=\eta(t)$ είναι η οριζόντια ταλάντωση της επιφάνειας της Γης, κατά την διάρκεια ενός σεισμού, και $y=y(t)$ είναι η απομάκρυνση της ακίδας του σεισμογράφου, όσο διαρκεί ο σεισμός, από την θέση ηρεμίας, (ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς, και οι δύο απομακρύνσεις), τότε $y(t)-\eta(t)$ είναι η «καθαρή» μεταβολή μήκους του ελατηρίου, και $\dot y(t)-\dot\eta(t)$ είναι η «καθαρή» σχετική ταχύτητα της μάζας (άρα και του εμβόλου) ως προς τη γη, άρα και την επιφάνεια στήριξης του δοχείου ως προς το οποίο κινείται το έμβολο. Με βάση τα ανωτέρω, η διαφορική εξίσωση κίνησης της μάζας m γράφεται

$$m\ddot y=-s\left(y-\eta\right)-b\left(\dot y-\dot\eta\right)$$

Για να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την απομάκρυνση $\xi(t)=y(t)-\eta(t)$ της ακίδας του σεισμογράφου από την θέση ισορροπίας, (ως προς το σύστημα αναφοράς του σεισμογράφου), προσθαφαιρούμε τον όρο $m\ddot\eta$ στον πρώτο όρο της προηγούμενης διαφορικής, και έχουμε :

$$m\ddot y-m\ddot\eta+m\ddot\eta=-s\left(y-\eta\right)-b\left(\dot y-\dot\eta\right)\Rightarrow m\left(\ddot y-\ddot\eta\right)+b\left(\dot y-\dot\eta\right)+s\left(y-\eta\right)=-m\ddot\eta$$

Άρα, η απομάκρυνση $\xi(t)$ της ακίδας από τη θέση ισορροπίας ικανοποιεί τη διαφορική: $m\ddot\xi+b\dot\xi+s\xi=-m\ddot\eta$, που είναι η διαφορική αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση και εξωτερική διέγερση, το ρόλο της οποίας παίζει η «αδρανειακή» ψευδο-δύναμη (D’ Alambert): $-m\ddot\eta$, η οποία προκύπτει ως γινόμενο της μάζας m επί την (σεισμική) επιτάχυνση $\ddot\eta$ του μη-αδρανειακού συστήματος αναφοράς

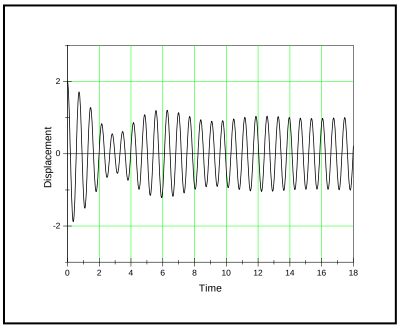
(γ) Αν $\eta=B\cos(\omega t)$ είναι η οριζόντια ταλάντωση της επιφάνειας της Γης, κατά την διάρκεια ενός σεισμού, η γενική μορφή για την συνάρτηση $\xi(t)=y(t)-\eta(t)$, είναι η γενική λύση της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης, με σταθερούς συντελεστές $m\ddot\xi+b\dot\xi+s\xi=-m\ddot\eta$, η οποία είναι γραμμικός συνδυασμός

«Γενική Λύση Ομογενούς» + «Ειδική λύση της πλήρους»

Άρα, $$\xi(t)=Ce^{-\frac{bt}{2m}}\cos(\omega' t+\varphi)+D\cos(\omega t+\theta),$$

όπου: $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\left(b/2m\right)^2}$, αλλά $\left.\begin{cases}sm=49\,b^2\\ \dfrac{s}{m}=\omega_0^2\end{cases}\right\}\Rightarrow s^2=49b^2\omega_0^2\Rightarrow\boxed{s=7b\omega_0\Leftrightarrow b=\dfrac{s}{7\omega_0}}$,

Άρα: $\left(\dfrac{b}{2m}\right)^2=\left(\dfrac{s}{7\omega_0}\dfrac{1}{2m}\right)^2=\left(\dfrac{s/m}{14\omega_0}\right)^2=\boxed{\left(\dfrac{\omega_0}{14}\right)^2=\dfrac{\omega_0^2}{196}\Rightarrow\dfrac{b}{2m}=\dfrac{\omega_0}{14}}$.



Τελικά:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \omega_0\sqrt{\frac{196-1}{196}} = \omega_0\sqrt{\frac{195}{186}} \Rightarrow \omega' \approx \omega_0$$

Αν $\omega = 9\,s^{-1}$ και $\omega' \approx \omega_0 = 8\,s^{-1}$, η γραφική παράσταση της $y = y(t)$, αποτελείται από δύο όρους : $\xi(t) = Ce^{-t}\cos(8t+\varphi) + D\cos(9t+\theta)$

Και έχει τη μορφή ενός διακροτήματος με συχνότητες 8 και 9, η μία εκ των οποίων έχει εκθετικά μειούμενο πλάτος, με αποτέλεσμα να κυριαρχεί, τελικά, ή άλλη.

Στην πραγματικότητα, η σεισμική δραστηριότητα δεν είναι μία διέγερση η οποία διαρκεί συνέχεια, αλλά μία διέγερση η οποία έχει τη δική της συχνότητα $\omega_{σεισμ}$ και έχει, επίσης, μειούμενο χρονικά πλάτος. Η διέγερση αυτή θα μπορούσε να αναπαρασταθεί ως:

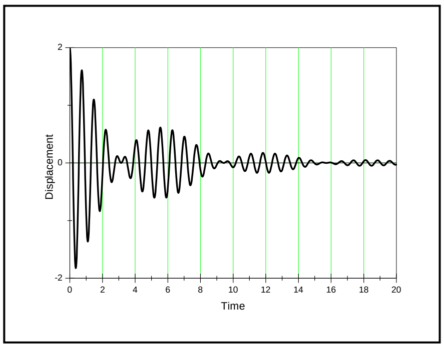
$$\eta(t) = Be^{-\alpha t}\cos(\omega_{σεισμ} t)$$

[Ανάλογα και με τη μορφή της σεισμικής διέγερασης, είτε θα μπορούσε να ισχύει η προηγούμενη αναπαράσταση για t>0, με $\eta(t<0)=0$, οπότε έχουμε, κατ' ακρίβεια, διαφορετικό μή-ομογενή όρο συνολικά, είτε θα μπορούσε να είναι $\eta(t) = Be^{-\alpha|t|}\cos(\omega_{σεισμ} t)$ για $\left(-\infty < t < +\infty\right)$, οπότε επίσης θα είχαμε διαφορετικό μη-ομογενή όρο. Αντί της ακριβούς αντιμετώπισης αυτών των δυο περιπτώσεων, $\forall t$, χρησιμοποιούμε την ανωτέρω προσέγγιση , για t>0, προκειμένου να έχουμε μία ποιοτική αίσθηση του φαινομένου].

Επομένως, η Ειδική Λύση της Μη-Ομογενούς (ως έχουσα τη μορφή του μη-ομογενούς όρου) θα είναι και αυτή χρονικά φθίνουσα, $De^{-at}\cos(\omega_{σεισμ} t)$, με τον δικό της εκθετικό παράγοντα μείωσης και τη δική της συχνότητα. Άρα, η Γενική Λύση της Πλήρους (Μη-Ομογενούς) θα είναι:

$$\xi(t) = Ce^{-bt/2m}\cos(\omega' t) + De^{-at}\cos(\omega_{σεισμ} t)\,,$$

που είναι ένα διακρότημα $(\omega' \neq \omega_{σεισμ})$ με μειούμενο πλάτος $\left(e^{-bt/2m}, e^{-at}\right)$, η μορφή του οποίου φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, και στο οποίο αναγνωρίζεται η τυπική μορφή ενός σεισμογραφήματος.



Μία επιπόλαιη ανάγνωση του σεισμογραφήματος θα μπορούσε να το ερμηνεύση, π.χ., ως μία ακολουθία ενός κύριου σεισμού (με μέγιστο στο 0) και μίας σειράς δευτερευόντων (με μέγιστα, π.χ., στο ~6, στο ~12, κλπ.). Από την ανάλυση που προηγήθηκε, όμως, αντιλαμβανόμαστε ότι το σεισμογράφημα πρέπει να ερμηνευθεί ως ένα φθίνον διακρότημα, δηλ., ως επαλληλία δύο φθινουσών ταλαντώσεων: (α) του σεισμού, και (β) της ιδιο-ταλάντωσης του σεισμογράφου, (με διαφορετική συχνότητα η κάθε μία, και διαφορετικό εκθετικό συντελεστή μείωσης).