ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος «Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)» της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)
2. **Νόμοι του Νεύτωνα**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt02)
3. **Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt03)
4. **Έργο – Ισχύς – Ενέργεια – Διατηρητικές Δυνάμεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt04)
5. **Αρμονικές Ταλαντώσεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt05, θα ακολουθήσει, ως επόμενη Ενότητα**)**

6. Συστήματα πολλών Σωματιδίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε του θεμελιώδεις νόμους του Νεύτωνα για να μελετήσουμε την δυναμική συμπεριφορά συστημάτων με πολλά σωματίδια. Τα σωματίδια αυτά μπορούν είτε να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είτε και όχι, και στη γενική περίπτωση μπορούν να μεταβάλλουν τις σχετικές τους θέσεις. Στην περίπτωση που οι σχετικές θέσεις των σωματιδίων, που αποτελούν ένα σύστημα, είναι σταθερές, τότε αναφερόμαστε σε στερεό σώμα, και η μελέτη τέτοιων συστημάτων θα αποτελέσει αντικείμενο επόμενης ενότητας.

6.1 Κέντρο μάζας και Ορμή συστήματος σωματιδίων

Ας υποθέσουμε ότι η σημειακές μάζες (σωματίδια) $m_i, \quad i=1,\dots,N$ έχουν αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_i=\vec{r}_i(t), \quad i=1,\dots,N$, (τα οποία, γενικά, είναι συναρτήσεις του χρόνου). Ορίζουμε ως Κέντρο Μάζας του συστήματος των σωματιδίων το σημείο με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m_{o\lambda}} = \frac{\sum_i m_i\left(\hat{x}x_i+\hat{y}y_i+\hat{z}z_i\right)}{m_{o\lambda}} \qquad (1)$$

Είναι φανερό ότι: (α) το Κέντρο Μάζας δεν είναι υποχρεωτικά υλικό σημείο του συστήματος (χωρίς να αποκλείεται), (β) το $\vec{r}_{CM}$ είναι γενικά συνάρτηση του χρόνου $\vec{r}_{CM}(t)$ μέσω των $\vec{r}_i(t)$, και σχετίζεται με τη συνολική μεταφορική κίνηση του συστήματος των σωματιδίων, μέσω των σχέσεων που θα αποδειχθούν στη συνέχεια.

Στη συνέχεια εξειδικεύουμε τον παραπάνω ορισμό για περιπτώσεις συνεχούς κατανομής μάζας, οπότε η κάθε σημειακή μάζα τείνει σε μία διαφορική ποσότητα μάζας $m_i(\vec{r}_i)\rightarrow dm(\vec{r})$, σε μία περιοχή γύτω από το σημείο $\vec{r}$.

Στην περίπτωση που έχουμε μία συνεχή κατανομή μάζας που εκτείνεται μέσα σε έναν όγκο V, τότε μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα μάζας, ως: $\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{dm}{dV}$, η οποία μπορεί να είναι και συνάρτηση της θέσης $\rho=\rho(\vec{r})$. Τότε, για την συνολική μάζα του συστήματος και τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας έχουμε, αντίστοιχα,

$$m_{o\lambda}=\int_V dm=\int_V \rho(\vec{r})\,dV \qquad (2\alpha)$$

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\int_V r\,dm}{\int_V dm}=\frac{\int_V \dot{r}\rho(r)\,dV}{\int_V \rho(r)\,dV}=\frac{\hat{x}\int_V x\rho(r)\,dV+\hat{y}\int_V y\rho(r)\,dV+\hat{z}\int_V z\rho(\dot{r})\,dV}{\int_V \rho(r)\,dV} \qquad (2\beta)$$

Στην περίπτωση που μία ή δύο από τις διαστάσεις ενός συστήματος μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες σε σχέση με τις υπόλοιπες, (και, επομένως, η τοπική πυκνότητα, κατά μήκος αυτών των διαστάσεων, μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν μεταβάλλεται), τότε είναι βολικό να ορισθούν, αντίστοιχα, οι έννοιες της επιφανειακής πυκνότητας, $\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta S} = \dfrac{dm}{dS}$, (όπου ΔS το στοιχείο επιφάνειας το οποίο έχει μάζα Δm), και της γραμμικής πυκνότητας $\lambda = \lim_{\Delta L \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta L} = \dfrac{dm}{dL}$, (όπου ΔL το στοιχείο μήκους το οποίο έχει μάζα Δm). Με βάση τα προηγούμενα, ο ορισμός του κέντρου μάζας, σε αυτές τις περιπτώσεις, γράφεται

$$\vec{r}_{CM(2-D)} = \frac{\int_S \vec{r}\,\sigma(\vec{r})\,dS}{\int_S \sigma(\vec{r})\,dS}, \qquad {}_{CM(1-D)} = \frac{\int_L \vec{r}\,\lambda(\vec{r})\,dL}{\int_L \lambda(\vec{r})\,dL}, \qquad (3\ \alpha, \beta)$$

Όπου οι δείκτες (2-D) και (1-D) σημαίνουν ότι το υλικό εκτείνεται σε 2 ή 1 διάσταση.

Ορμή ενός σωματιδίου και Συνολική Ορμή Συστήματος Σωματιδίων

Ορίζουμε, επίσης, ως ολική γραμμική ορμή του συστήματος των σωματιδίων το διάνυσμα

$$\vec{p}_{o\lambda} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (4) παίρνουμε μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του CM:

$$(1) \;\rightarrow\; \sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} \sum_i m_i \;\Rightarrow\; \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_{CM} \sum_i m_i \;\overset{(4)}{\Rightarrow}\; \boxed{\vec{p}_{o\lambda} = \dot{\vec{r}}_{CM} m_{o\lambda}} \quad (5)$$

Επομένως, <u>η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων (δηλ., το άθροισμα των ορμών όλων των σωματιδίων του) είναι ίση με το γινόμενο της συνολικής του μάζας επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος</u> (εννοείται: με όλα τα μεγέθη μετρημένα ως προς το ίδιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, π.χ., του «Εργαστηρίου»).

Σύστημα κέντρου μάζας σωματιδίων. Ονομάζουμε σύστημα κέντρου μάζας, για ένα σύστημα σωματιδίων, ένα σύστημα αναφοράς το οποίο έχει την αρχή του στο κέντρο μάζας του συστήματος, (και, επομένως, κινείται μαζί με το κέντρο μάζας)

Μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα είναι η σχέση της επιτάχυνση του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματιδίων με τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα αυτό. Αν συμβολίσουμε με $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ τις ίσες και αντίθετες δυνάμεις που ασκούνται, με το μορφή «δράσης-αντίδρασης», ανάμεσα σε όλα τα δυνατά ζεύγη σωματιδίων «*i*» και «*j*», (και, επομένως, $\vec{F}_{ii} = 0$), και με $\vec{F}_i$ τη συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο «i» από άλλα σωματίδια, εξωτερικά ως προς το σύστημα το οποίο μελετάμε, τότε, η διαφορική εξίσωση κίνησης του Νεύτωνα για κάθε σωματίδιο «*i*» γράφεται

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}\,. \qquad (6)$$

Αθροίζοντας την τελευταία σχέση πάνω σε όλα τα σωματίδια, παίρνουμε:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} \qquad (7\alpha)$$

Αλλά, από τη σχέση (1) έχουμε ότι $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_{CM} \sum_i m_i = \ddot{\vec{r}}_{CM} m_{o\lambda}$. Επίσης, στο διπλό άθροισμα $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$, οι μεν όροι $\vec{F}_{ii} = 0$, (σύμφωνα με τα προηγούμενα), ενώ όλο το υπόλοιπο άθροισμα μπορεί να συνδυαστεί σε όρους που αποτελούνται από τα ζεύγη $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ij} + \left(-\vec{F}_{ij}\right) = 0$, άρα, συνολικά $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$. Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, στην (7α), παίρνουμε: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{o\lambda} \ddot{\vec{r}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i}$ (7β)

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι <u>το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων επιταχύνεται ως ένα σημειακό σωματίδιο με μάζα ίση με τη συνολική μάζα του συστήματος, υπό την επίδραση της συνολικής εξωτερικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα</u>.

Στην περίπτωση που η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν, τότε η τελευταία σχέση δίνει: $m_{o\lambda} \ddot{\vec{r}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{o\lambda} \ddot{\vec{r}}_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{o\lambda} \dot{\vec{r}}_{CM} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \boxed{p = \sigma\tau\alpha\theta.}$, δηλαδή, όταν η συνολική εξωτερική δύναμη ενός συστήματος σωματιδίων είναι μηδέν, τότε το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα και, συνεπώς, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται.

<u>Σχόλιο:</u> Ξαναγράφοντας τη σχέση (5), ως προς το Σύστημα-κέντρου-μάζας, παίρνουμε $\vec{p}_{o\lambda/CM} = \dot{\vec{r}}_{CM/CM} m_{o\lambda} = 0 m_{o\lambda} = 0$, ($\dot{\vec{r}}_{CM/CM} = 0$, αφού πρόκειται για την ταχύτητα ενός σημείου ως προς τον εαυτό του). Επομένως το Σύστημα-κέντρου-μάζας ενός συστήματος σωματιδίων έχει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα ότι η συνολική ορμή του συστήματος σωματιδίων, ως προς το δικό του Σύστημα-κέντρου-μάζας, είναι μηδέν.

Κινητική Ενέργεια

Για την κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων, όπως αυτή περιγράφεται σε κάποιο σύστημα αναφοράς και στο σύστημα κέντρου μάζας, μπορεί επίσης να δείξει κανείς την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Η κινητική ενέργεια του συστήματος, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, είναι ίση με την κινητική ενέργεια του συστήματος, ως προς το σημείο του κέντρου μάζας (CM), συν την κινητική ενέργεια της συνολικής μάζας του συστήματος, θεωρούμενου ως σημειακού σωματιδίου που κινείται με την ταχύτητα του CM, ως προς το σημείο Ο.

$$T_O = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_{i/O} \cdot \dot{\vec{r}}_{i/O}\right) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\left(\dot{\vec{r}}_{i/CM} + \dot{\vec{R}}_{CM/O}\right) \cdot \left(\dot{\vec{r}}_{i/CM} + \dot{\vec{R}}_{CM/O}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\left(\dot{r}_{i/CM} \cdot \dot{r}_{i/CM}\right) + \left(\dot{r}_{i/CM} \cdot \dot{\vec{R}}_{CM/O}\right) + \left(\dot{\vec{R}}_{CM/O} \cdot \dot{r}_{i/CM}\right) + \left(\dot{\vec{R}}_{CM/O} \cdot \dot{\vec{R}}_{CM/O}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{i/CM}^2 + 2\left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{i/CM}\right) \cdot \dot{\vec{R}}_{CM/O} + \left(\sum_i m_i\right) \dot{\vec{R}}_{CM/O}^2\right]$$

Αλλά, $\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{i/CM} = m_{o\lambda} \vec{V}_{CM/CM} = m_{o\lambda} 0 = 0$, οπότε:

$$T_O = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{i/CM}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{R}}_{CM/O}^2 \Rightarrow \boxed{T_O = T_{CM} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{R}}_{CM/O}^2}$$

Συμπέρασμα: Η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων, ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς (Ο), είναι ίση με την κινητική τους ενέργεια, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, συν την κινητική ενέργεια ενός σημειακού σωματιδίου με μάζα όσο και η συνολική μάζα του συστήματος, το οποίο κινείται όπως το κέντρο μάζας του συστήματος.

6.2 Το πρόβλημα των Δύο-Σωμάτων, Ανηγμένη μάζα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2, αντίστοιχα, στις οποίες δεν εξασκείται καμία εξωτερική δύναμη, και οι οποίες αλληλεπιδρούν με ίσες και αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -\vec{F}_{21}(\vec{r}_2,\vec{r}_1)$, (σύμφωνα με τον 3^o νόμο του Νεύτωνα). Υποθέτουμε ότι η δύναμη αλληλεπίδρασης των δύο μαζών είναι συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. [Συνήθως, η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι κεντρική δύναμη, οπότε ισχύει $\vec{F}_{12}(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) = -\vec{F}_{21}(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)$ και $\vec{F}_{12}(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) = \hat{r}\ f(r)$]. Η κίνηση των δύο μαζών διέπεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{21}(|\dot{r}_2-\dot{r}_1|), \qquad (1a) \qquad\qquad m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12}(|\dot{r}_1-\dot{r}_2|) \qquad (1\beta)$$

Δεδομένου ότι το σύστημα των δύο σωμάτων αποτελεί ένα κλειστό σύστημα, (όπως γνωρίζουμε και από την γενικότερη ανάλυση του συστήματος πολλών σωματιδίων, που έχει προηγηθεί), το κέντρο μάζας του συστήματος θα εξακολουθεί να κινείται ισοταχώς, ή να ακινητεί, (ως προς το σύστημα αναφοράς εργαστηρίου), ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες ταχύτητας, για καθένα από τα δύο σώματα

$$m_{o\lambda}\dot{\vec{r}}_{CM} = \vec{p}_{o\lambda} = m_1\vec{\upsilon}_{1,\alpha\rho\chi} + m_2\vec{\upsilon}_{2,\alpha\rho\chi}$$

Αφού, σύμφωνα με τα προηγούμενα, γνωρίζουμε πως θα κινείται το κέντρο μάζας, το επόμενο ερώτημα που θα ενδιέφερε, είναι το πώς μεταβάλλεται η απόσταση $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ανάμεσα στα δύο σώματα. Δεδομένου ότι και η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι συνάρτηση της διαφοράς $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ των δύο αποστάσεων, μπορούμε να συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1 α,β) προκειμένου να παράγουμε την διαφορική που διέπει τη χρονική εξέλιξη της $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

$$m_2\times(1a) - m_1\times(1\beta) \quad\Rightarrow\quad m_2m_1\left(\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}\right) = m_2\vec{F}_{21}(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|) - m_1\vec{F}_{12}(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)$$

$$m_2m_1\frac{d^2(\vec{r}_1-r_2)}{dt^2} = (m_1+m_2)\vec{F}_{21} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}(r)},$$ όπου $\mu = \dfrac{m_2m_1}{(m_1+m_2)}$ η ανηγμένη μάζα του συστήματος των δύο σωματιδίων. Άρα η απόσταση $\vec{r}$ ανάμεσα στα δύο σωματίδια ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση που θα ικανοποιούσε μάζα μ σε απόσταση $\vec{r}$ από ελκτικό κέντρο, από το οποίο δέχεται δύναμη $F = F_{12} = -F_{21}$

Παράδειγμα 6.2.1 Δύο σημειακές μάζες $m_2 = m_1 = m$ συνδέονται με ένα ελατήριο που έχει σταθερά σκληρότητας *s* και ακινητούν, με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, πάνω σε οριζόντια επίπεδη επιφάνεια χωρίς τριβές. Με μία στιγμιαία ώθηση, προσδίδουμε στην μία μάζα ταχύτητα μέτρου υ_0, προς την κατεύθυνση της άλλης μάζας του συστήματος. Να μελετηθεί η εξέλιξη της κίνησης του συστήματος

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τον άξονα-*x* του συστήματος-εργαστηρίου έτσι ώστε, κατά τη στιγμή που προσδίδεται η ταχύτητα στη μία μάζα, αυτή να βρίσκεται στο *x*=0 και η άλλη μάζα να βρίσκεται στο *x*=*L* (όπου *L* το φυσικό μήκος του ελατηρίου).

Το Κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται στιγμιαία στο $x_{KM} = L/2$, λόγω συμμετρίας και αποκτά ταχύτητα $\vec{V}_{KM} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1+m_2} = \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{2}$, την οποία διατηρεί, κατά την εξέλιξη του φαινομένου, λόγω μηδενικών εξωτερικών οριζόντιων δυνάμεων

Όσον αφορά τη σχετική απόσταση των δύο μαζών, αυτή διέπεται από τον νόμο του Νεύτων, με δύναμη την δύναμη του ελατηρίου και με μάζα την ανηγμένη μάζα του συστήματος. Επομένως μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο με συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{s/\mu} = \sqrt{2s/m}$.

Άρα, το μεν ΚΜ κινείται ισοταχώς με $\vec{V}_{KM} = \vec{\upsilon}_0/2$, ενώ οι δύο σημειακές μάζες ταλαντώνονται περί το ΚΜ με κυκλική συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{s/\mu} = \sqrt{2s/m}$.

Η ολική ενέργεια που έχει δοθεί στο σύστημα του ελατηρίου και των δύο μαζών μπορεί να υπολογισθεί ως προς το σύστημα του Εργαστηρίου (Ο) αλλά και ως προς το σύστημα του Κέντρου Μάζας (ΚΜ).

$$E_{o\lambda/\mathrm{O}} = \frac{1}{2} m \upsilon_0^2$$

$$E_{o\lambda/\mathrm{KM}} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1/\mathrm{KM}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2/\mathrm{KM}}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} m \left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m \upsilon_0^2$$

Επειδή η ολικές ενέργειες στα δύο συστήματα αναφοράς έχουν υπολογιστεί κατά την έναρξη του φαινομένου, δηλ., είναι κινητικές ενέργειες αποκλειστικά αφού το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος την ίδια χρονική στιγμή, ικανοποιούν και τη γενική σχέση των αντίστοιχων κινητικών ενεργειών $T_O = T_{CM} + \frac{1}{2} m\dot{R}_{CM/O}^2$, όπως προκύπτει αντικαθιστώντας τα ανωτέρω αποτελέσματα.

Επανερχόμενοι στο σύστημα Κέντρου Μάζας, μπορούμε να υπολογίσουμε και το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης της κάθε μάζας, ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς.

Ως προς το σύστημα ΚΜ, οι δύο μάζες ταλαντώνονται με συμμετρικό τρόπο, άρα η μέγιστη επιμήκυνση (ή, συσπείρωση) ΔL του ελατηρίου θα είναι ίση με το διπλάσιο του πλάτους ταλάντωσης της κάθε μάζας. Αλλα, κατά την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου, οι δύο μάζες ακινητούν ως προς το σύστημα ΚΜ, άρα η $E_{o\lambda/\mathrm{KM}} = \frac{1}{4} m \upsilon_0^2$ έχει μετατραπεί σε ελαστική ενέργεια του ελατηρίου, επομένως $\frac{1}{4} m \upsilon_0^2 = \frac{1}{2} s (\Delta L)^2 \Rightarrow \Delta L = \frac{\upsilon_0}{\omega_0}$

6.3 Στροφορμή ενός σωματιδίου και συστήματος σωματιδίων

Στροφορμή ενός σωματιδίου

Ορίσουμε την στροφορμή ενός σωματιδίου μάζας m_i, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, την διανυσματική ποσότητα $\vec{L}_{i,O} = \vec{r}_{i,O} \times \left(m_i \dot{\vec{r}}_{i,O}\right) = \vec{r}_{i,O} \times \vec{p}_{i,O}$, όπου $\vec{r}_{i,O}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου, ως προς το σημείο αναφοράς Ο.

Στην περίπτωση συστήματος σωματιδίων, η συνολική στροφορμή του συστήματος των σωματιδίων, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, ορίζεται ως

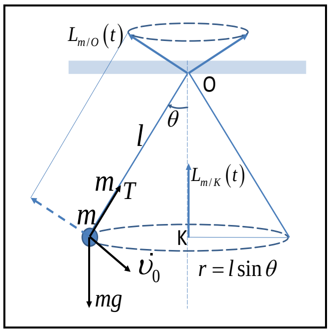
$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{i,O} = \sum_i \vec{r}_{i,O} \times \left(m_i \dot{\vec{r}}_{i,O}\right) = \sum_i \vec{r}_{i,O} \times \vec{p}_{i,O} \qquad (8)$$

Ορίζουμε, επίσης, ως ροπή $\vec{N}$ μίας δύναμης $\vec{F}$, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, το διανυσματικό μέγεθος $\vec{N}_{/O} = \vec{r}_{/O} \times \vec{F}$, όπου $\vec{r}_{/O}$: το διάνυσμα θέσης του σημείο εφαρμογής της δύναμης, ως προς το σημείο αναφοράς Ο.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σωματιδίου υπολογίζεται ως εξής:

$$\dot{\vec{L}}_{i,O} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_{i,O} \times \left(m_i \dot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right] = \left[\dot{\vec{r}}_{i,O} \times \left(m_i \dot{\vec{r}}_{i,O}\right) + \vec{r}_{i,O} \times \left(m_i \ddot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right]$$

Επομένως: $\dot{\vec{L}}_{i,O} == \left[0 + \vec{r}_{i,O} \times \vec{F}_i\right] \;\Rightarrow\; \dot{\vec{L}}_{i,O} = \vec{N}_i$



Παράδειγμα 6.3.1 ***Κωνικό εκκρεμές***. Το κωνικό εκκρεμές είναι ένα μαθηματικό εκκρεμές που, αφού το εκτρέψουμε κατά μία γωνία θ ως προς την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του, το προσδίδουμε κατάλληλη οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, κάθετα στο κατακόρυφο επίπεδο που ορίζεται απο την κατακόρυφο στο σημείο ανάρτησης και από τη στιγμιαία θέση του νήματος, τέτοια ώστε η μέν μάζα να διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας $r = l\sin\theta$, το δε νήμα να διαγράφει μία κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο ανάρτησης και ημι-γωνία κορυφής ίση με θ. Αν δεν υπάρχουν τριβές ούτε στο σημείο ανάρτησης ούτε από την ατμόσφαιρα: (α) υπολογίστε το μέτρο της κατάλληλης ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ που εξασφαλίζει την σταθερότητα αυτής της κίνησης. (β) Υπολογίστε την στροφορμή $\vec{L}_{m/K}$ του σωματιδίου ως προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς. (γ) Υπολογίστε την στροφορμή $\vec{L}_{m/O}$ του σωματιδίου ως προς το σημείο ανάρτησης Ο. (δ) Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής κάθε μίας από τις δύο στροφορμές, $\dot{\vec{L}}_{m/K}$ και $\dot{\vec{L}}_{m/O}$, και δείξτε ότι, και οι δύο, είναι σε συνέπεια με το νόμο μεταβολής της στροφορμής, (ως προς το αντίστοιχο σύστημα αναφοράς).

(α) Για να διαγράφει σταθερή κυκλική τροχιά η μάζα m, θα πρέπει να ισχύει,
στον κατακόρυφο άξονα: $mg = T\cos\theta \Rightarrow T = mg/\cos\theta$,
στο οριζόντιο επίπεδο: $T\sin\theta = m\upsilon_0^2/r = m\upsilon_0^2/l\sin\theta$
Απαλοίφοντας την τάση Τ από τις δύο σχέσεις έχουμε

$$mg\sin\theta/\cos\theta = m\upsilon_0^2/l\sin\theta \Rightarrow \boxed{\upsilon_0^2 = gl\sin^2\theta/\cos\theta}$$

(β) Η στροφορμή $\vec{L}_{m/K}$ του σωματιδίου ως προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, υπολογιζεται ως εξής:
Καθορίζουμε σύστημα αναφοράς $(K\,xyz)$, με τον άξονα *Kz* κατακόρυφο, και μετράμε το χρόνο από τη στιγμή που η μάζα διέρχεται από τον άξονα *Kx*, οπότε:

$$r_{/K}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0) \Rightarrow \dot{r}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0) = (-\upsilon_0\sin\omega t, \upsilon_0\cos\omega t, 0)$$

$$L_{m/K} = m\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & 0 \\ -\upsilon_0\sin\omega t & \upsilon_0\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{m/K} = \hat{z}mr\upsilon_0} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_{m/K} = 0}$$

(γ) Για τον υπολογισμό της στροφορμής $\vec{L}_{m/O}$ του σωματιδίου ως προς το σημείο ανάρτησης Ο, καθορίζουμε σύστημα αναφοράς $(Oxyz)$, με τον άξονα *Oz* κατακόρυφο και μετράμε πάλι το χρόνο από τη στιγμή που η μάζα διέρχεται από τον άξονα *Ox*, οπότε:

$$r_{/0}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, -l\cos\theta) \Rightarrow \dot{r}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, o) = (-\upsilon_0\sin\omega t, \upsilon_0\cos\omega t, o)$$

$$\vec{L}_{m/O} = m\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & -l\cos\theta \\ -\upsilon_0\sin\omega t & \upsilon_0\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = m\left[\hat{x}l\cos(\theta)\upsilon_0\cos(\omega t) - \hat{y}l\cos(\theta)\upsilon_0\sin(\omega t) + \hat{z}r\upsilon_0\right]$$

$$\boxed{\vec{L}_{m/O} = m\upsilon_0\left[\hat{x}l\cos(\theta)\cos(\omega t) - \hat{y}l\cos(\theta)\sin(\omega t) + \hat{z}r\right]}$$

(δ) Ο ρυθμός μεταβολής κάθε μίας από τις δύο στροφορμές, $\dot{\vec{L}}_{m/K}$ και $\dot{\vec{L}}_{m/O}$, υπολογίζεται:

(δ_1) $\quad L_{m/K} = \hat{z} m r \upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{L}_{m/K} = 0$

Αλλά και η συνολική ροπή ως προς Κ είναι: $\vec{N}_{F_{o\lambda}/K} = 0$, αφού οι μεν κατακόρυφες συνιστώσες αλληλοαναιρούνται, $mg - T\cos\theta = 0$, η δε οριζόντια συνιστώσα της τάσης: $T\sin\theta = m\upsilon_0^2 / l\sin\theta$ διέρχεται από το Κ.

(δ_2) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής περί το σημείο ανάρτησης:

$$\dot{\vec{L}}_{m/O} = m\upsilon_0\left[-\hat{x} l\omega\cos(\theta)\sin(\omega t) - \hat{y} l\omega\cos(\theta)\cos(\omega t)\right] = -m\upsilon_0\omega l\cos(\theta)\left[\hat{x}\sin(\omega t) + \hat{y}\cos(\omega t)\right]$$

Η συνολική ροπή, ως προς Ο, των δυνάμεων, αφορά μόνο τη δύναμη του βάρους, δεδομένου ότι η δύναμη της τάσης Τ διέρχεται από το Ο, οπότε:

$$\vec{N}_{B/O} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & -l\cos\theta \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = -mgr\left[\hat{x}\sin(\omega t) + \hat{y}\cos(\omega t)\right]$$

Αλλά, $m\upsilon_0\omega l\cos\theta = m\dfrac{\upsilon_0^2}{r} l\cos\theta = mg\dfrac{l^2\sin^2\theta\cos\theta}{l\sin\theta\cos\theta} = mgl\sin\theta = mgr$, άρα οι δύο τελευταίες δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, $\dot{\vec{L}}_{m/O} = \vec{N}_{B/O}$, σε συνέπεια με το νόμο μεταβολής της στροφορμής.

Στροφορμή συστήματος σωματιδίων

Στην περίπτωση συστήματος πολλών σωματιδίων, που αλληλεπιδρούν ανά δύο με εσωτερικές κεντρικές δυνάμεις δράσης-αντίδρασης, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, και το καθένα δέχεται εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i$, η συνολική ροπή όλων των δυνάμεων, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς, είναι

$$\vec{N}_{o\lambda} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i\sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Το τελευταίο διπλό άθροισμα της προηγούμενης σχέσης αποτελείται από ζεύγη της μορφής $\vec{r}_n \times \vec{F}_{nm} + \vec{r}_m \times \vec{F}_{mn} = \vec{r}_n \times \vec{F}_{nm} + \vec{r}_m \times \left(-\vec{F}_{nm}\right) = \left(\vec{r}_n - \vec{r}_m\right) \times \vec{F}_{nm} = 0$, επειδή $\left(\vec{r}_n - \vec{r}_m\right) // \vec{F}_{nm}$, λόγω του κεντρικού χαρακτήρα των δυνάμεων αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων.

Επομένως, η συνολική ροπή δύναμης ενός συστήματος σωματιδίων, είναι ίση με το άθροισμα μόνο των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος, $\quad \vec{N}_{o\lambda} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ενός σημειακού σωματιδίου μάζας *m* ισχύει:

$$\dot{\vec{L}}_{i,O} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_{i,O} \times \left(m_i\dot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right] = \left[\frac{d\vec{r}_{i,O}}{dt} \times \left(m_i\dot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right] + \left[\vec{r}_{i,O} \times \frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right] = \left[\dot{\vec{r}}_{i,O} \times \left(m_i\dot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right] + \left[\vec{r}_{i,O} \times \left(m_i\ddot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right]$$

$$= m_i\left[\dot{\vec{r}}_{i,O} \times \dot{\vec{r}}_{i,O}\right] + \left[\vec{r}_{i,O} \times \left(m_i\ddot{\vec{r}}_{i,O}\right)\right] = 0 + \left[\vec{r}_{i,O} \times \left(\vec{F}_i\right)\right] \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_{i,O} = \vec{N}_{i,O}} \qquad (9\alpha)$$

Όταν αναφερόμαστε σε σύστημα σωματιδίων, τότε ισχύει, αντίστοιχα:

$$\dot{\vec{L}}_{o\lambda,O} = \vec{N}_{o\lambda,O}, \text{ αλλά, } \vec{N}_{o\lambda} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{N}_{o\lambda,\varepsilon\xi}, \ \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_{o\lambda,O} = \vec{N}_{o\lambda,\varepsilon\xi}} \qquad (9\beta)$$

Από την τελευταία σχέση συνάγονται τα τελευταία δύο θεωρήματα:

Θεώρημα μεταβολής της Στροφορμής συστήματος: Ο ρυθμός μεταβολής της Στροφορμής ενός συστήματος σωματιδίων (ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο) είναι ίσος με την συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα.

Θεώρημα διατήρησης της Στροφορμής συστήματος: Η Στροφορμή ενός συστήματος (ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο) παραμένει σταθερή, όταν το άθροισμα των εξωτερικών ροπών που ασκείται στο σύστημα είναι μηδέν (άρα, κατά μείζονα λόγο, όταν δεν εξασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα)

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, για την περίπτωση των κεντρικών αλληλεπιδράσεων, ο νόμος μεταβολής της στροφορμής φαίνεται να είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα για την κίνηση.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει κανένα γενικό επιχείρημα, με βάση το οποίο να αποκλείεται η ύπαρξη μη-κεντρικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ σωματιδίων. Βέβαια, μεταξύ δύο ακίνητων σωματιδίων, η μόνη χαρακτηριστική διεύθυνση αυτού του συστήματος εκτείνεται κατά μήκος της ευθείας που τα ενώνει και, επομένως, η μεταξύ τους αλληλεπίδραση δεν θα μπορούσε να χαρακτηρίζεται παρά μόνο από αυτή την διεύθυνση. Όταν, όμως, έστω και ένα από τα δύο σωματίδια κινείται, τότε υπάρχει μία επιπλέον χαρακτηριστική διεύθυνση του συστήματος, που είναι η παράλληλη προς το διάνυσμα της ταχύτητας. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορεί να αποκλειστεί το ενδεχόμενο, η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων να χαρακτηρίζεται από μία διεύθυνση που δεν συμπίπτει με την ευθεία που τα συνδέει. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι και τα στοιχειώδη λεγόμενα σωματίδια, π.χ., το ηλεκτρόνιο, είναι φορείς χαρακτηριστικών διευθύνσεων, όπως είναι, για παράδειγμα, ο προσανατολισμός του σπιν τους. Όλα αυτά μαρτηρούν ότι υπάρχει το ενδεχόμενο μη κεντρικών αλληλεπιδράσεων. Εντούτοις, η διατήρηση της στροφορμής ενός κλειστού συστήματος φαίνεται να είναι ένας γενικός κανόνας

6.4 Κίνηση ως προς το σύστημα κέντρου μάζας

Ορμή

Όπως είδαμε και στο τέλος της παραγράφου 5.1, η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων, ως προς το σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας, είναι μηδέν. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη προβλημάτων κρούσης. <u>Αν η περιγραφή της κρούσης γίνει στο σύστημα κέντρου μάζας των σωματιδίων, τότε η συνολική ορμή των σωματιδίων που συγκρούονται είναι μηδέν, και πριν και μετά την κρούση</u>.

Στροφορμή

Για τη στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων, όπως αυτή περιγράφεται σε κάποιο σύστημα αναφοράς και στο σύστημα κέντρου μάζας, μπορεί να δείξει κανείς την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα. <u>Η στροφορμή του συστήματος, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, είναι ίση με τη στροφορμή του συστήματος, ως προς το σημείο του κέντρου μάζας (CM), συν τη στροφορμή σημειακής μάζας ίσης με την συνολική μάζα του συστήματος, η οποία κινείται όπως το κέντρο μάζας του συστήματος</u>.

Αν ορίσουμε τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_{i/O}$ = διάνυσμα θέσης του σωματιδίου «*i*» ως προς το σημείο Ο, $\vec{r}_{i/CM}$ = διάνυσμα θέσης του σωματιδίου «*i*» ως προς το σύστημα Κέντρου Μάζας (CM), $\vec{R}_{CM/O}$ = διάνυσμα θέσης του Κέντρου Μάζας ως προς το σημείο Ο, έχουμε:

$$\vec{r}_{i/O} = \vec{r}_{i/CM} + \vec{R}_{CM/O}$$

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_{i/O} \times \left(m_i \dot{\vec{r}}_{i/O} \right) = \sum_i m_i \left(\vec{r}_{i/CM} + \vec{R}_{CM/O} \right) \times \left(\dot{\vec{r}}_{i/CM} + \dot{\vec{R}}_{CM/O} \right) =$$

$$= \sum_i m_i \left[\vec{r}_{i/CM} \times \dot{\vec{r}}_{i/CM} + \vec{r}_{i/CM} \times \dot{\vec{R}}_{CM/O} + \vec{R}_{CM/O} \times \dot{\vec{r}}_{i/CM} + \vec{R}_{CM/O} \times \dot{\vec{R}}_{CM/O} \right]$$

$$= \sum_i \dot{r}_{i/CM} \times m_i \ddot{r}_{i/CM} + \left(\sum_i \dot{r}_{i/CM} m_i \right) \times \ddot{R}_{CM/O} + \dot{R}_{CM/O} \times \left(\sum_i \ddot{r}_{i/CM} m_i \right) + \dot{R}_{CM/O} \times \ddot{R}_{CM/O} \sum_i m_i$$

Αλλά: $$\left(\sum_i \vec{r}_{i/CM} m_i \right) \times \ddot{\vec{R}}_{CM/O} = \vec{R}_{CM/CM} \times \ddot{\vec{R}}_{CM/O} = 0 \times \ddot{\vec{R}}_{CM/O} = 0\,,$$

$$\dot{R}_{CM/O} \times \left(\sum_i \ddot{\vec{r}}_{i/CM} m_i \right) = \dot{R}_{CM/O} \times \ddot{R}_{CM/CM} = \dot{R}_{CM/O} \times 0 = 0\,, \qquad \text{και } \sum_i m_i = m_{o\lambda}$$

Οπότε:

$$\dot{L}_O = \sum_i \vec{r}_{i/CM} \times m_i \ddot{\vec{r}}_{i/CM} + \dot{R}_{CM/O} \times \left(m_{o\lambda} \dot{V}_{CM/O} \right) \Rightarrow \boxed{\dot{L}_O = \dot{L}_{CM} + \dot{R}_{CM/O} \times \left(m_{o\lambda} \dot{V}_{CM/O} \right)} \qquad (10α)$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει, πράγματι, ότι: Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, είναι ίση με το άθροισμα δύο όρων, (α) της στροφορμής των σωματιδίων περί το Κέντρο Μάζας του συστήματος (ιδιοστροφορμή=“spin”), και (β) της στροφορμής του Κέντρου Μάζας (όπου θεωρούμε συγκεντρωμένη όλη τη μάζα του συστήματος) ως προς το σημείο αναφοράς Ο (“τροχιακή” στροφορμή).

Νόμος μεταβολής της στροφορμής, ως προς Κέντρο Μάζας.

Από την τελευταία σχέση (10α), έχουμε:

$$\dot{L}_O = \dot{L}_{CM} + \dot{R}_{CM/O} \times \left(m_{o\lambda} \dot{V}_{CM/O} \right) \;\Rightarrow\; \ddot{L}_O = \ddot{L}_{CM} + \ddot{R}_{CM/O} \times \left(m_{o\lambda} \dot{V}_{CM/O} \right) + \dot{R}_{CM/O} \times \left(m_{o\lambda} \ddot{V}_{CM/O} \right)$$

$$\ddot{L}_{CM} = \ddot{L}_O - \dot{R}_{CM/O} \times \left(m_{o\lambda} \ddot{V}_{CM/O} \right) = N_{o\lambda,\varepsilon\xi/O} - \dot{R}_{CM/O} \times \dot{F}_{o\lambda,\varepsilon\xi}$$

$$\ddot{L}_{CM} = N_{o\lambda,\varepsilon\xi/O} - \dot{R}_{CM/O} \times F_{o\lambda,\varepsilon\xi} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i/O} \times F_i - \dot{R}_{CM/O} \times \sum_{i=1}^{N} F_i$$

Αν ληφθεί υπόψη, επίσης, ότι $\vec{r}_{i/O} = \vec{r}_{i/CM} + \vec{R}_{CM/O}$

$$\ddot{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{r}_{i/CM} + \dot{R}_{CM/O} \right) \times F_i - \dot{R}_{CM/O} \times \sum_{i=1}^{N} F_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{r}_{i/CM} \times F_i + \dot{R}_{CM/O} \times \sum_{i=1}^{N} F_i - \dot{R}_{CM/O} \times \sum_{i=1}^{N} F_i$$

Τελικά: $$\dot{\vec{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i/CM} \times F_i \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\vec{L}}_{CM} = \vec{N}_{o\lambda,\varepsilon\xi/CM}} \qquad (10β)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (9β) και (10β) διαπιστώνουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής στροφορμής ενός συστήματος σωματιδίων (τα οποία αλληλεπιδρούν με κεντρικές δυνάμεις), είναι ίσος με την συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, τόσο όταν τα μεγέθη υπολογίζονται ως προ ένα αδρανειακό («Εργαστηριακό») σύστημα αναφοράς, όσο και όταν υπολογίζονται ως προς το σύστημα-αναφοράς «Κέντρου Μάζας» του συστήματος των σωματιδίων (έστω και αν το σύστημα-Κέντρου Μάζας δεν είναι αδρανειακό!)

6.5 Κρούσεις

Όταν δύο η περισσότερα σωματίδια συγκρούονται μεταξύ τους, (χωρίς να υφίστανται εξωτερικές δυνάμεις), επειδή οι δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος, η συνολική ορμή του συστήματος αυτών των σωματιδίων διατηρείται, ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως δείξαμε στο τέλος της παραγράφου 6.1. Μάλιστα, αν το σύστημα αναφοράς είναι το σύστημα κέντρου μάζας του συνόλου των σωματιδίων, τότε η συνολική διατηρήσιμη ορμή έχει μηδενική τιμή.

Κατά την διαδικασία της κρούσης, ενδέχεται να διατηρείται, ή όχι, η κινητική ενέργεια των σωματιδίων, οπότε έχουμε, αντίστοιχα, ελαστική ή μη-ελαστική κρούση. Η ελαστική κρούση είναι μια ιδανική περίπτωση, που αντιστοιχεί σε «στιγμιαία» αλληλεπίδραση των μαζών, χωρίς παραμόρφωση, κατά τη «στιγμή» που έρχονται σε επαφή, (δηλαδή, χωρίς να αλλάξει καθόλου η εσωτερική δομή της κάθε μίας μάζας, στο βαθμό που η «σημειακότητα» των μαζών είναι επίσης μίαν εξειδανίκευση). Η μη-ελαστική κρούση είναι η συνηθέστερη ρεαλιστική περίπτωση και αντιστοιχεί σε κρούση πεπερασμένης διάρκειας, κατά την οποία σημειώνονται παραμορφώσεις των μαζών. Οι παραμορφώσεις αυτές μπορεί να έχουν πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά, καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα που μπορεί να φτάσει από τη θραύση (στο ένα άκρο) μέχρι και την πλήρη ενσωμάτωση κάποιων μαζών, μέσω πλαστικής κρούσης (στο άλλο άκρο).

Στην περίπτωση της κρούσης δύο σημειακών μαζών, m_1 και m_2, αν συμβολίσουμε με $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$, τις ορμές των δύο μαζών πριν από την κρούση, και με $\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1'$, $\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2'$, τις ορμές μετά την κρούση, ως προς το εργαστηριακό σύστημα αναφοράς, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, στη γενικότερη περίπτωση ισχύει:

$$\vec{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = \vec{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2'\right)^2 + Q \qquad (2)$$

Όπου: Q = 0: ελαστική κρούση, και Q ≠ 0: μη-ελαστική κρούση

Οι παραπάνω σχέσεις, στο σύστημα κέντρου μάζας, γράφονται

$$m_1\vec{v}_{1,CM} + m_2\vec{v}_{2,CM} = m_1\vec{v}_{1,CM}' + m_2\vec{v}_{2,CM}' = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_{1,CM}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_{2,CM}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_{1,CM}'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_{2,CM}'\right)^2 + Q \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι, οι σχέσεις «διατήρησης-της-ορμής» και «μεταβολής-της-ενέργειας», στο σύστημα αναφοράς CM, αναφέρονται γενικά σε άλλες τιμές των απόλυτων μεγεθών (συνολικής ορμής και συνολικής ενέργειας, αρχικής και τελικής), σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές στο σύστημα εργαστηρίου. Εν τούτοις, παραμένει ένα αναλλοίωτο μέγεθος, που είναι η μεταβολή κινητικής ενέργειας, η οποία έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς

$$\Delta E_K \equiv E_{K,o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} - E_{K,o\lambda,\alpha\rho\chi} = E_{K(CM),o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} - E_{K(CM),o\lambda,\alpha\rho\chi}' \equiv \Delta E_{K(CM)}' = Q \qquad (5)$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει αυτό που είναι γνωστό ως «Σχετικότητα του Γαλιλαίου», σύμφωνα με την οποία, οι νόμοι που περιγράφουν ένα φαινόμενο πρέπει να είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Μάλιστα, αν συμβολίσουμε με $\vec{V}$ τη σχετική ταχύτητα ανάμεσα στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς (ανεξάρτητα από το αν το ένα από τα δύο είναι το σύστημα κέντρου μάζας, αλλά κρατάμε τον δείκτη «CM» για να υποδείξουμε το δεύτερο σύστημα), ισχύει

$$v_{1,CM} = \dot{v}_1 - \vec{V}, \quad v_{2,CM} = v_2 - \vec{V}, \quad v_{1,CM}' = v_1' - \vec{V}, \quad v_{2,CM}' = v_2' - \vec{V} \qquad (6)$$

Για κάθε μία από τις σχέσεις (6), ισχύει επίσης, $\left(\vec{v}_{1,CM}\right)^2 = v_1^2 + V^1 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V}$, κ.ο.κ. (7)

Αν γράψουμε τη σχέση (5) με τη μορφή

$$\left[\frac{1}{2}m_1\left(\dot{v}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{v}_2\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}m_1\left(\dot{v}_1'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{v}_2'\right)^2\right] =$$

$$\left[\frac{1}{2}m_1\left(\dot{v}_{1,CM}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{v}_{2,CM}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}m_1\left(\dot{v}_{1,CM}'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{v}_{2,CM}'\right)^2\right]$$

και αντικαταστήσουμε τα τετράγωνα των ταχυτήτων του δεύτερου μέλους με τις τέσσερις αντίστοιχες σχέσεις της μορφής (7), μετά τις αναγωγές όμοιων όρων, καταλήγουμε στην

$$\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)\cdot\vec{V} = \left(m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'\right)\cdot\vec{V} \qquad (8)$$

που πρέπει να ισχύει για κάθε διανυσματική τιμή της $\vec{V}$, επομένως θα πρέπει να ισχύει

$$\left(m_1\dot{v}_1+m_2\dot{v}_2\right)=\left(m_1\dot{v}_1'+m_2\dot{v}_2'\right)\Rightarrow \boxed{\dot{p}_{ολ,τελ}=p_{ολ,αρχ}} \qquad (9)$$

Δηλαδή, ο νόμος διατήρησης της ορμής προκύπτει ως αποτέλεσμα του αναλλοίωτου των φυσικών νόμων σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου της μορφής (6).

Μετωπική κρούση και συντελεστής αποκατάστασης

Κατά τη μετωπική κρούση δύο σφαιρών που κινούνται κατά μήκος του άξονα x, η διατήρηση της ορμής γράφεται $m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2=m_1\dot{x}_1'+m_2\dot{x}_2'$ (10)

Αν γνωρίζουμε τις ταχύτητες πριν την κρούση, για να υπολογίσουμε τις ταχύτητες μετά την κρούση πρέπει, πέραν της σχέσης (10), να χρησιμοποιήσουμε και τη σχέση μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2\right)^2=\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1'\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2'\right)^2+Q$ (11)

αρκεί να γνωρίζουμε τη μεταβολή ενέργειας Q. Αντί αυτής, μερικές φορές δίδεται ο λεγόμενος «συντελεστής αποκατάστασης» $\in\equiv\frac{\left|\dot{x}_2'-\dot{x}_1'\right|}{\left|\dot{x}_2-\dot{x}_1\right|}$ (coefficient of restitution), που ορίζεται ως λόγος της ταχύτητας απομάκρυνσης προς την ταχύτητα προσέγγισης των μαζών, μετά και πριν την κρούση, αντίστοιχα. Ο συντελεστής αποκατάστασης παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(0,1\right)$, όπου η τιμή $\in=0$ αντιστοιχεί στην πλαστική κρούση, και η τιμή $\in=1$ αντιστοιχεί στην ελαστική κρούση.

Πλάγια κρούση – Σύστημα εργαστηρίου – Σύστημα κέντρου μάζας

Κατά την πλάγια κρούση μίας σφαίρας, με μάζα m_1 και αρχική ταχύτητα $\vec{v}_1$, με άλλη σφαίρα ακίνητη (<u>όλα τα μεγέθη ως προς το σύστημα εργαστηρίου</u>) θα έχουμε

$$m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2' \qquad (12)$$

$$\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1\right)^2=\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1'\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2'\right)^2+Q \qquad (13)$$

Όπου: Q = 0, ελαστική κρούση, $Q\neq 0$, μη-ελαστική κρούση

Σε ένα πρόβλημα κρούσεων αναζητούμε, συνήθως, τις δύο καρτεσιανές συνιστώσες κάθε μίας από τις δύο ταχύτητες $\left(\vec{v}_1',\vec{v}_2'\right)$ μετά την κρούση (άρα, 4 άγνωστα μεγέθη) ενώ έχουμε στη διάθεσή μας τρείς εξισώσεις (δεδομένου ότι η (12) αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες). Άρα, για την επίλυσή του, χρειάζεται να ένα ακόμη μέγεθος (συνήθως, η γωνία της μίας από τις δύο ταχύτητες $\left(\vec{v}_1',\vec{v}_2'\right)$ ως προς την διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}_1$.

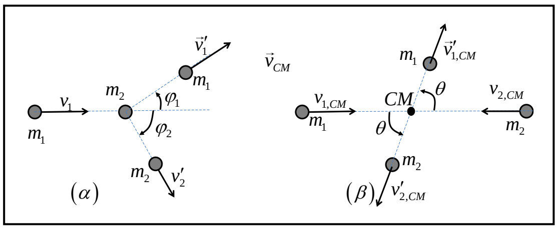
Στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε ίσες μάζες $\left(m_1=m_2=m\right)$ και ελαστική κρούση $\left(Q=0\right)$, υψώνοντας στο τετράγωνο την (12), έχουμε

$$m_1^2\vec{v}_1^2=m_1^2\vec{v}_1'^2+m_2^2\vec{v}_2'^2+2\left(m_1\vec{v}_1'\right)\cdot\left(m_2\vec{v}_2'\right) \qquad (14)$$

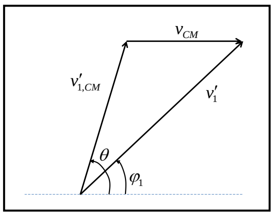
και οι σχέσεις (13) και (14) γίνονται

$$\left(\vec{v}_1\right)^2=\left(\vec{v}_1'\right)^2+\left(\vec{v}_2'\right)^2 \quad (13α), \qquad \vec{v}_1^2=\vec{v}_1'^2+\vec{v}_2'^2+2\left(\vec{v}_1'\right)\cdot\left(\vec{v}_2'\right) \quad (14α)$$

Από τις οποίες φαίνεται ότι $\left(\vec{v}_1'\right)\cdot\left(\vec{v}_2'\right)=0$, άρα, <u>όταν $\left(m_1=m_2=m\right)$ και $\left(Q=0\right)$, οι δύο ταχύτητες, μετά την κρούση, είναι κάθετες μεταξύ τους</u>.



Επανερχόμενοι στη γενική περίπτωση, ας θεωρήσουμε ότι οι δύο μάζες (m_1, m_2), μετά την κρούση, εκτρέπονται, ως προς το σύστημα εργαστηρίου (α), σε γωνίες (φ_1, φ_2), αντίστοιχα, ως προς την αρχική διεύθυνση κίνησης της m_1.



Ως προς το σύστημα Κέντρου Μάζας (β), ως προς το οποίο η συνολική ορμή, τόσο πριν όσο και μετά την κρούση, είναι μηδέν, (άρα, οι αρχικές ορμές μεταξύ τους, και οι τελικές ορμές μεταξύ τους, είναι ίσες και αντίθετες), έστω θ η κοινή γωνία εκτροπής της κάθε σφαίρας, ως προς την αρχική της πορεία.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας, ως προς το εργαστήριο, είναι $v_{CM} = \dfrac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}$, οπότε οι ταχύτητες των δύο σφαιρών, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, θα είναι $\vec{v}_{1,CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \dfrac{m_2\vec{v}_1}{m_1+m_2}$, (15α), και $\vec{v}_{2,CM} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = 0 - \vec{v}_{CM} = -\dfrac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}$ (15β)

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις ταχύτητες $\vec{v}'_{1,CM} = \vec{v}'_1 - \vec{v}_{CM}$, $\vec{v}'_{2,CM} = \vec{v}'_2 - \vec{v}_{CM}$. Από τη σχέση που ικανοποιούν οι ταχύτητες $\vec{v}'_{1,CM} = \vec{v}'_1 - \vec{v}_{CM}$, και με βάση τις γωνίες φ και θ, όπως ορίστηκαν προηγουμένως, έχουμε (σύμφωνα και με το σχήμα)

$$v_1'\sin\varphi_1 = v'_{1,CM}\sin\theta, \qquad v_1'\cos\varphi_1 = v'_{1,CM}\cos\theta + v_{CM}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε

$$\tan\varphi_1 = \frac{\sin\theta}{\gamma+\cos\theta} \quad (16\ \alpha), \quad \text{όπου:} \quad \gamma = \frac{v_{CM}}{v'_{1,CM}} = \frac{m_1 v_1}{v'_{1,CM}\left(m_1+m_2\right)} \quad (16\beta)$$

Ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, οι ορμές ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\vec{p}_{1,CM} + \vec{p}_{2,CM} = 0 \quad \text{και} \quad \vec{p}'_{1,CM} + \vec{p}'_{2,CM} = 0 \qquad (17\ \alpha,\beta)$$

Η αντίστοιχη σχέση για τη μεταβολή ενέργειας γράφεται, συναρτήσει των ορμών,

$$\frac{p^2_{1,CM}}{2m_1} + \frac{p^2_{2,CM}}{2m_2} = \frac{p'^2_{1,CM}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2,CM}}{2m_2} + Q \qquad (18)$$

Από τις σχέσεις (17 α,β) παίρνουμε $p^2_{1,CM} = p^2_{2,CM}$, $p'^2_{1,CM} = p'^2_{2,CM}$. Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στην (18), και χρησιμοποιώντας την ανηγμένη μάζα $\mu = m_1 m_2/\left(m_1+m_2\right)$, παίρνουμε: $\dfrac{p^2_{1,CM}}{2\mu} = \dfrac{p'^2_{1,CM}}{2\mu} + Q$. Στην ελαστική κρούσης, Q=0, η τελευταία σχέση δίνει $p_{1,CM} = p'_{1,CM}$ άρα $v_{1,CM} = v'_{1,CM}$, οπότε, από τη (16β) προκύπτει:

$$\gamma = \frac{v_{CM}}{v'_{1,CM}} = \frac{v_{CM}}{v_{1,CM}} = \frac{m_1 v_1}{v_{1,CM}\left(m_1+m_2\right)} = \frac{m_1}{m_2}\frac{m_2 v_1}{v_{1,CM}\left(m_1+m_2\right)} = \frac{m_1}{m_2}\frac{v_{1,CM}}{v_{1,CM}} \Rightarrow \gamma = \frac{m_1}{m_2}$$

Άρα, η (16 α) γράφεται $\quad \tan\varphi_1 = \dfrac{\sin\theta}{\left(m_1/m_2\right)+\cos\theta}$

Ειδικές υποπεριπτώσεις: (α) $m_2 >> m_1 \;\Rightarrow\; \varphi_1 \approx \theta$, (β) $m_1 = m_2 \;\Rightarrow\; \varphi_1 = \dfrac{\theta}{2}$

Στη γενική περίπτωση της μη-ελαστικής σκέδασης, αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής γ, είναι:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2}\left[1 - \frac{Q}{E_K}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right]^{-1/2}$$

Όπου, E_K: η κινητική ενέργεια του m_1, ως προς το σύστημα εργαστηρίου.