ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

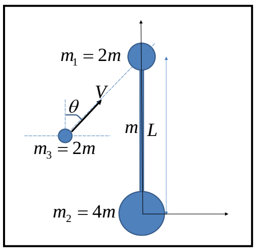
Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος «Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)» της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)
2. **Νόμοι του Νεύτωνα**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt02)
3. **Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt03)
4. **Έργο – Ισχύς – Ενέργεια – Διατηρητικές Δυνάμεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt04)
5. **Αρμονικές Ταλαντώσεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt05, θα ακολουθήσει, ως επόμενη Ενότητα**)**

6. Συστήματα πολλών Σωματιδίων



Παράδειγμα 6.5.1 Σημειακές μάζες $m_1 = 2m$ και $m_2 = 4m$ είναι στερεωμένες στα άκρα στερεής ράβδου που έχει μήκος L και μάζα m. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο δεν έχει τριβές. Τρίτη σημειακή μάζα $m_3 = 2m$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου V, υπό γωνία θ ως προς τη ράβδο, έτσι ώστε να συγκρουστεί πλαστικά με τη μάζα m_1, τη χρονική στιγμή *t*=0. $\left[\theta = 45^o\right]$

(α) Ως προς το σύστημα αναφοράς του δαπέδου που φαίνεται στο σχήμα, να υπολογιστούν: ($α_1$) το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος $\vec{R}_{KM} = \vec{R}(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου, ($α_2$) η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{\upsilon}_{KM} = \vec{\upsilon}(t)$.

(β) Ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, να υπολογιστεί ($β_1$) η στροφορμή του συστήματος, πριν την κρούση, ($β_2$) η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, μετά την κρούση.

(γ) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του συστήματος, πριν και μετά την κρουση, ως προς το σύστημα αναφοράς του δαπέδου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\vec{R}_{KM} = \left(\sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i m_i\right) \Big/ 9m$, $\vec{r}_1 = L\hat{y}$, $\vec{r}_2 = 0$, $\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + \vec{V}t$, $\vec{r}_4 = (L/2)\hat{y}$

$$r_3(t=0) = L\hat{y} \Rightarrow r_0 = L\hat{y} \quad \Rightarrow r_3(t) = L\hat{y} + \vec{V}t$$

$$\vec{R}_{KM} = \left(\sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i m_i\right) \Big/ 9m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}_{KM}(t) = \frac{L}{2}\hat{y} + \frac{2}{9}\vec{V}t}, \text{ και } \boxed{\vec{\upsilon}_{KM} = \dot{\vec{R}}_{KM} = \frac{2}{9}\vec{V}}$$

(β) Το σύστημα είναι κλειστό (δεν υπάρχουν τριβές), επομένως οι στροφορμή διατηρείται, άρα μπορεί να υπολογιστεί για τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν την κρούση.

Ως προς το Σύστημα Κέντρου Μάζας, για να υπολογιστεί η στροφορμή του συστήματος, πριν την κρούση, πρέπει να υπολογιστούν οι αντίστοιχες θέσεις $\vec{r}_{i/KM}(t=0) = \vec{r}_i(t=0) - \vec{R}_{KM}(t=0)$, δηλαδή,

$$\vec{r}_{1/KM} = \frac{L}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_{2/KM} = -\frac{L}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_{3/KM} = \frac{L}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_{4/KM} = 0$$

και οι αντίστοιχες ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{i/KM} = \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_{KM}$, δηλαδή,

$$\vec{\upsilon}_{1/KM} = -\frac{2}{9}\vec{V}, \quad \vec{\upsilon}_{2/KM} = -\frac{2}{9}\vec{V}, \quad \vec{\upsilon}_{3/KM} = \vec{V} - \frac{2}{9}\vec{V} = \frac{7}{9}\vec{V}, \quad \vec{\upsilon}'_4 = -\frac{2}{9}\vec{V}.$$

$\vec{J}_{ολ/KM} = \sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_{i/KM} \times \vec{\upsilon}_{i/KM} = mL\hat{y}\times\vec{V}$. Αν $\theta = 45^o \Rightarrow$ $\boxed{\vec{J}_{ολ/KM} = -\hat{z}mLV/\sqrt{2}}$

Μετά την κρούση, και τη συσσωμάτωση της m_3 στο υπόλοιπο σύστημα, έχουμε ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται με ενιαία ω΄, ως προς το σύστημα Κέντρου Μάζας, έτσι ώστε

$$\vec{J}'_{ολ/KM,αρχ} = \vec{J}'_{ολ/KM,τελ} \Rightarrow -\hat{z}mLV/\sqrt{2} = I_{ολ/KM}\vec{\omega}'$$

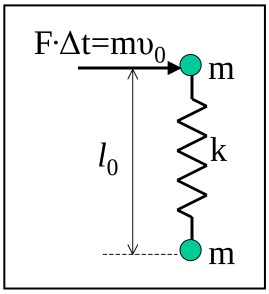
Η συνολική ροπή αδράνειας, ως προς ΚΜ είναι : $I_{ολ/KM} = 2(4m)\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{mL^2}{12} = \frac{49}{12}mL^2$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις: $\boxed{\vec{\omega}' = -\hat{z}\frac{6\sqrt{2}}{49}\frac{V}{L}}$

(γ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος, ως προς το σύστημα αναφοράς του δαπέδου:

Πριν : $E_{κιν,αρχ} = (1/2)(2m)V^2 = mV^2$

Μετά : $E_{κιν,τελ} = (1/2)(9m)\upsilon_{KM}^2 + (1/2)I_{ol,KM}\omega'^2 = (125/441)mV^2 \approx 28,3\% E_{κιν,αρφ}$



Παράδειγμα 6.5.2 Δύο ίδιες μικρές μάζες m συνδεδεμένες με ελατήριο σταθεράς k, αμελητέας μάζας και φυσικού μήκους l_0, βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή προσδίδουμε στην μία μάζα οριζόντια ταχύτητα υ_0, κάθετα στο ελατήριο, με αποτέλεσμα το σύστημα να αρχίσει να εκτελεί, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, μία σύνθετη κίνηση (περιστροφή + ταλάντωση). α) Προσδιορίστε την θέση και την ταχύτητα του κέντρου μάζας, κατά την στιγμή έναρξης της κίνησης. β) Εκφράστε την ενέργεια και την στροφορμή του συστήματος, ως προς σύστημα κέντρου μάζας, κατά την έναρξη της κίνησης. γ) Υπολογίστε τα ίδια μεγέθη, ως προς σύστημα κέντρου μάζας, κατά την στιγμή της μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου. δ) Εφαρμόζοντας κατάλληλους νόμους διατήρησης υπολογίστε την μέγιστη επιμήκυνση $\Delta l/l_0$ με την προϋπόθεση ότι $\Delta l \ll l_0$, και $m\upsilon_0^2 \ll k\,l_0^2$. [Εργαστείτε στο σύστημα κέντρου μάζας και θεωρήστε ότι $l - l_0 = \Delta l$ και $l + l_0 \approx 2l$].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Το κέντρο μάζας, για λόγους συμμετρίας, συμπίπτει με το κέντρο του ελατηρίου, η δε ταχύτητά του, ως προς το εργαστήριο, είναι ίση με $V_{CM} = \frac{m\vec{\upsilon}_0 + m0}{2m} = \frac{\vec{\upsilon}_0}{2}$

(β) Ως προς το Κέντρο Μάζας, οι ταχύτητες των δύο σωμάτων είναι $\upsilon'_{1,2} = \pm\frac{\vec{\upsilon}_0}{2}$.

Άρα, ως προς το κέντρο μάζας, η αρχική ενέργεια είναι ίση με

$$E'_{αρχ} = E'_{κιν} = 2\frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 = \frac{m\upsilon_o^2}{4}$$

και η αρχική στροφορμή είναι $L'_{αρχ} = 2\frac{l_0}{2}m\frac{\upsilon_0}{2} = \frac{l_0 m\upsilon_0}{2}$

(γ) Κατά την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου

$$E'_{final} = E'_{κιν} + E'_{δυν} = 2\frac{1}{2}m\upsilon^2 + k\Delta l^2 = m\upsilon^2 + k\Delta l^2$$

$$L'_{fin} = 2\frac{(l_0 + \Delta l)m\upsilon}{2} = (l_0 + \Delta l)m\upsilon$$

(δ) Διατήρηση ενέργειας $$m\upsilon^2 + k\Delta l^2 = m\frac{\upsilon_0^2}{4} \qquad (1)$$

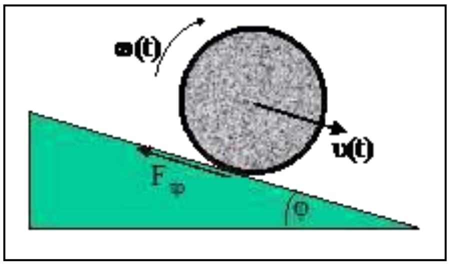
Διατήρηση στροφορμής $$\left(l_0 + \Delta l\right) m\upsilon_{fin} = \frac{l_0 m\upsilon_0}{2} \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right) m\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 m^2\upsilon^2 = \frac{m^2\upsilon_0^2}{4} \Rightarrow \left(1+2\frac{\Delta l}{l_0}\right) m^2\upsilon^2 \approx \frac{m^2\upsilon_0^2}{4} \qquad (3)$$

(1),(3): $$m\upsilon^2 + k\Delta l^2 = \left(1+2\frac{\Delta l}{l_0}\right) m^2\upsilon^2 \Rightarrow k\Delta l^2 = 2\frac{\Delta l}{l_0} m^2\upsilon^2 \Rightarrow m^2\upsilon^2 = \frac{k}{2} l_0 \Delta k \qquad (4)$$

(1), (4): $$\frac{k}{2} l_0 \Delta l + k\Delta l^2 = \frac{1}{4} m\upsilon_0^2 \Rightarrow \Delta l^2 + \frac{l_0}{2}\Delta l - \frac{m\upsilon_0^2}{4k} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta l = \frac{1}{2}\left(-\frac{l_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + \frac{m\upsilon_0^2}{k}}\right)}$$

Επειδή: $$m\upsilon_0^2 << k l_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta l \approx m\upsilon_0^2 / 2k\, l_0}$$



Παράδειγμα 6.5.3 Ένα κυλινδρικό βαρέλι ακτίνας R και μάζας M_β με λεπτά (αλλά ανθεκτικά) τοιχώματα είναι γεμάτο με νερό μάζας M_ν και αφήνεται να κυλήσει σε κεκλιμένο επίπεδο από την κατάσταση ηρεμίας (σχήμα). Υποθέστε ότι η τριβή μεταξύ των εσωτερικών τοιχωμάτων και του νερού είναι αμελητέα, δηλαδή η μάζα του νερού δεν περιστρέφεται κατά τη διάρκεια της κίνησης. α) Να υπολογίσετε την μεταφορική επιτάχυνση, $\vec{\alpha}$, του συστήματος «Βαρέλι + Νερό». β) Να κάνετε τον ίδιο υπολογισμό αν το νερό «παρακολουθεί», σε κάποιο βαθμό, την περιστροφή των τοιχωμάτων, έτσι ώστε η περιστροφική ταχύτητα των μορίων του, ως προς τον άξονα του βαρελιού, να εξαρτάται από την απόσταση r από αυτόν, σύμφωνα με την σχέση $\upsilon=\omega r^2/R$. [Για το δεύτερο ερώτημα, υποθέστε ότι η συνολική ροπή που εξασκείται από τα τοιχώματα του βαρελιού στην μάζα του νερού είναι $N=RF_{\tau\rho}$, όπου $F_{\tau\rho}$ η δύναμη τριβής ανάμεσα στα τοιχώματα του βαρελιού και στο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση

α) Μεταφορική κίνηση : $$mg\sin\theta - F_{\tau\rho} = (M_\beta + M_\nu)a \qquad (1)$$

Περιστροφική κίνηση: $$RF_{\tau\rho} = I_\beta \dot{\omega} = I_\beta \frac{a}{R} \Rightarrow F_{\tau\rho} = a\frac{I_\beta}{R^2} \qquad (2)$$

Αρα: $$mg\sin\theta = \left[(M_\beta + M_\nu) + \frac{I_\beta}{R^2}\right] a \Rightarrow a = \frac{mg\sin\theta}{\left[(M_\beta + M_\nu) + \frac{I_\beta}{R^2}\right]}$$

Με $$I_\beta = M_\beta R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{mg\sin\theta}{2M_\beta + M_\nu}}$$

β) Μεταφορική κίνηση : $$mg\sin\theta - F_{\tau\rho} = (M_\beta + M_\nu)a \qquad (3)$$

Περιστροφική κίνηση: $$RF_{\tau\rho} = \frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L_\beta + L_\nu\right) \qquad (4)$$

$$L_\nu = \int_{r=0}^{R} dL_\nu(r) = \int_{r=0}^{R} r\cdot\left[dm_\nu(r)\upsilon_\nu(r)\right] = \int_{r=0}^{R} r\left[(2\pi r dr H\rho_\nu)\left(\omega\frac{r^2}{R}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_\nu = 2\pi H\rho_\nu \frac{\omega}{R}\int_{r=0}^{R} r^4 dr = 2\pi H\rho_\nu \frac{\omega}{R}\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}(\pi R^2 H\rho_\nu)R^2\omega$$

Τελικά: $L_\nu = \dfrac{2}{5}M_\nu R^2\omega$, και $L_\beta = I_\beta\omega \Rightarrow L_\beta = M_\nu R^2\omega$

Επομένως, (4) $\Rightarrow$

$$RF_{\tau\rho} = \frac{d}{dt}\left(L_\beta + L_\nu\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(M_\beta + \frac{2}{5}M_\nu\right)R^2\omega\right] \Rightarrow F_{\tau\rho} = \left[\left(M_\beta + \frac{2}{5}M_\nu\right)R\dot{\omega}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\tau\rho} = \left[\left(M_\beta + \frac{2}{5}M_\nu\right)R\frac{a}{R}\right] \Rightarrow F_{\tau\rho} = \left[\left(M_\beta + \frac{2}{5}M_\nu\right)a\right]$$

Οπότε, (3) $\Rightarrow mg\sin\theta = F_{\tau\rho} + (M_\beta + M_\nu)a = \left(2M_\beta + \dfrac{7}{5}M_\nu\right)a \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{mg\sin\theta}{\left(2M_\beta + \frac{7}{5}M_\nu\right)}}$

Παράδειγμα 6..5.4 Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας M και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Στην περιφέρεια της πλατφόρμας, που ακινητεί, στέκεται άνθρωπος μάζας m ο οποίος, τη χρονική στιγμή $t=0$, εκτοξεύει μάζα m_0 εφαπτομενικά προς την περιφέρεια, με ταχύτητα υ_0, ως προς τον ίδιο. (α) Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα αρχίσει να περιστρέφεται, και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0. (β) Μόλις η πλατφόρμα συμπληρώσει ένα τέταρτο του κύκλου, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας (κατά μήκος μίας ακτίνας) με ταχύτητα υ και σταματά σε απόσταση R/2 από το κέντρο. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος Πλατφόρμα-Άνθρωπος για το χρονικό διάστημα που ο άνθρωπος μετακινείται. (γ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, από τη στιγμή που ο άνθρωπος σταματά και έπειτα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συνολικού συστήματος, (M, m, m_0), πριν και μετά την εκτόξευση της πέτρας

$$L_{tot,init} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{tot,final} = 0$$

$$L_{tot,final} = L_{M+m} + L_{m_0} = I_{M+m}\omega + m_0 R\left(\omega R - \upsilon_0\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega + m_0 R^2\omega - m_0 R\upsilon_0 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega + m_0 R^2\omega = m_0 R\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2m_0\upsilon_0}{\left(M + 2m + 2m_0\right)R}}$$

(β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος, (M, m), κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του ανθρώπου, από την περιφέρεια προς το κέντρο.

$$\frac{dL_M}{dt}+\frac{dL_m}{dt}=0\Rightarrow\frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}+m\frac{d}{dt}\left(\omega r^2\right)=0$$

$$MR^2\frac{d\omega}{dt}+2m\left(2\omega r\frac{dr}{dt}+r^2\frac{d\omega}{dt}\right)=0$$

Αλλά $r=R-\upsilon t\Rightarrow\frac{dr}{dt}=-\upsilon$

$$MR^2\frac{d\omega}{dt}+4m\omega\left(R-\upsilon t\right)\left(-\upsilon\right)+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\frac{d\omega}{dt}=0$$

$$\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)\frac{d\omega}{dt}=4\upsilon m\omega\left(R-\upsilon t\right)\Rightarrow$$

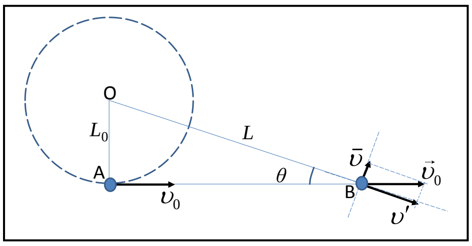
$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{4\upsilon m\left(R-\upsilon t\right)dt}{\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)}=-\frac{4m\left(R-\upsilon t\right)d\left(R-\upsilon t\right)}{\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)}$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=-4m\frac{rdr}{\left(MR^2+2mr^2\right)}=-\frac{d\left(MR^2+2mr^2\right)}{\left(MR^2+2mr^2\right)}\Rightarrow\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}=-\int_{R}^{r}\frac{d\left(MR^2+2mr^2\right)}{\left(MR^2+2mr^2\right)}$$

$$\Rightarrow\ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=-\ln\left(MR^2+2mr^2\right)\Big|_R^r\Rightarrow\omega=\omega_0\frac{MR^2+2mR^2}{MR^2+2mr^2}\Rightarrow\boxed{\omega_{fimal}=\omega_0\frac{2M+4m}{2M+m}}$$

Παράδειγμα 6.5.5 Σωματίδιο μάζας μ είναι στερεωμένο στο άκρο χορδής (μη-εκτατής, και αμελητέας μάζας) μήκους L της οποίας το άλλο άκρο είναι μόνιμα στερωμένο σε σταθερό σημείο Ο πάνω σε λείο επίπεδο. Στην αρχή κρατάμε ένα ενδιάμεσο σημείο της χορδής στο σημείο Ο και θέτουμε το σώμα σε κυκλική κίνηση ακτίνας L_0<L, περί το Ο, με κυκλική ταχύτητα ω_0. Στη συνέχεια αφήνουμε ελεύθερο το ενδιάμεσο σημείο της χορδής, τη στιγμή που η μάζα m διέρχεται από ένα σημείο Α της αρχικής κυκλικής τροχιάς της. (α) Βρείτε την ώθηση που ασκείται στιγμιαία στο σημείο στήριξης Ο, κατά μέτρο και κατά διεύθυνση, (ως προς την ευθεία ΟΑ), κατά τη στιγμή που το νήμα τεντώνεται καθ' όλο το μήκος του. (β) Υπολογίστε την τελική κινητική κινητική ενέργεια της μάζας m. (γ) Υπολογίστε την τελική τάση του νήματος μετά την αποκατάσταση μόνιμης κατάστασης κίνησης για την μάζα m, με όλόκληρο το νήμα τεντωμένο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Κατά την απελευθέρωση του ενδιάμεσου σημείου του νήματος, η μάζα κινείται εφαπτομενικά (κάθετα στην ευθεία ΟΑ) μέχρι να τεντωθεί όλο το νήμα (σημείο Β). Αν υπολογιστεί η στροφορμή ως προς το σημείο Ο, πρέπει να διατηρείται, διότι η τάση του νήματος ασκείται πάντα με κατεύθυνση προς το σημείο Ο, με αποτέλεσμα να έχει μηδενική ροπή ως προς Ο.

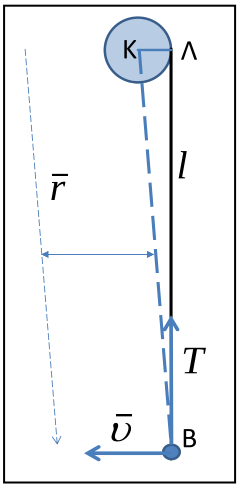
Άρα $L_0\upsilon_0=L\upsilon\quad\Rightarrow\quad\boxed{\upsilon=\upsilon_0L_0/L}$.

Επομένως η μεταβολή ορμής είναι $\Delta p=m\upsilon'=m\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon^2}\Rightarrow\boxed{\int Fdt=\Delta p=m\upsilon_0\frac{\sqrt{L^2-L_0^2}}{L}}$

(β) Η τελική κινητική ενέργεια είναι $E_{K,\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{1}{2} m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 \left(\dfrac{L_0}{L}\right)^2$

(γ) Η τελική τάση του νήματος είναι αυτή που αντιστοιχεί στην κεντρομόλο δύναμη της κυκλικής κινησης, με τελική ταχύτητα υ, που εκτελεί η μάζα m,

$$F_{K,\tau\varepsilon\lambda} = m\frac{\upsilon^2}{L} = m\upsilon_0^2 \frac{L_0^2}{L^3}$$



Παράδειγμα 6.5.6 (Tetherball) Μπάλα μάζας m είναι προσδεμένη σε ιδανικό νήμα, μήκους l, το άλλο άκρο του οποίου είναι συνδεμένο σε κατακόρυφο ακλόνητο στύλο ακτίνας $R \ll l$. Η μπάλα μπορεί να κινείται σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβή. Ενώ το νήμα είναι τεντωμένο οριζόντια, προσπαθούμε να τυλίξουμε το νήμα στο στύλο προσδίδοντας οριζόντια ταχύτητα υ_0 στην μπάλα κάθετα στο τεντωμένο νήμα.

(α) Αν δεν υπάρχουν τριβές κατά την εξέλιξη της κίνησης, δείξτε ότι η δράση των υπολοίπων δυνάμεων επιτρέπει την διατήρηση της κινητικής ενέργειας της μπάλας.

(β) Με βάση τη διαπίστωση ότι η μπάλα εκτελεί στιγμιαία κυκλική κίνηση με στιγμιαίο κέντρο περιστροφής το σημείο επαφής του νήματος με το στύλο, δείξτε ότι η τάση και το μήκος του νήματος είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη και υπολογίστε τη σταθερά αναλογίας

(γ) Θεωρήστε τη στροφορμή της μπάλας ως προς τον άξονα του στύλου (Κέντρο: Κ), δείξτε ότι μεταβάλλεται με το χρόνο, γράψτε το νόμο μεταβολής και, από τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η εξάρτηση του μήκους του νήματος από το χρόνο, βρήτε τη σχέση $l=l(t)$.

(δ) Υπολογίστε την κυκλική συχνότητα $\omega = \omega(t)$ ως προς το κέντρο Κ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Στη μπάλα ασκείται τάση Τ από το νήμα, η οποία ασκείται κάθετα στην ταχύτητα και επομένως δε παράγει ούτε απορροφά έργο, άρα η διατήρηση της κινητικής ενέργειας μας δίνει $m\upsilon_0^2/2 = m\upsilon^2/2 \;\Rightarrow\; \upsilon_0 = \upsilon$

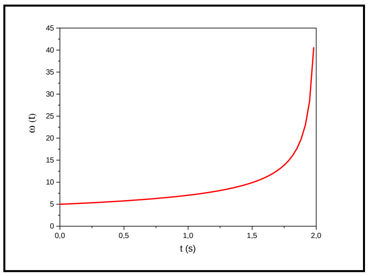
(β) Η τάση Τ αποτελεί τη στιγμιαία κεντρομόλο δύναμη για την μπάλα, με κέντρο Λ και ακτίνα l, άρα $T = m\upsilon^2/l = m\upsilon_0^2/l$

(γ) $$\frac{dL_K}{dt} = N_K \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(m\upsilon_0 l\right) = -TR = -\left(m\frac{\upsilon_0^2}{l}\right)R \;\Rightarrow \frac{dl}{dt} = -\frac{\upsilon_0 R}{l}$$

$$ldl = -\upsilon_0 R dt \;\Rightarrow\; l^2 = l_0^2 - 2\upsilon_0 R t \;\Rightarrow\; l^2 = l_0^2 - 2\upsilon_0 R t$$

Συνολικός χρόνος τυλίγματος $t_{o\lambda}$: $0 = l_0^2 - 2\upsilon_0 R t_{o\lambda} \Rightarrow t_{o\lambda} = l_0^2 / 2\upsilon_0 R$

(δ) $$\upsilon_0 \cos\theta = \omega r = \omega \frac{l}{\cos\theta} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_0}{l}\cos^2\theta = \frac{\upsilon_0}{l}\frac{1}{1+\tan^2\theta} \Rightarrow \omega(t) = \frac{\upsilon_0}{l(t)}\frac{1}{1+\left(R/l(t)\right)^2}$$

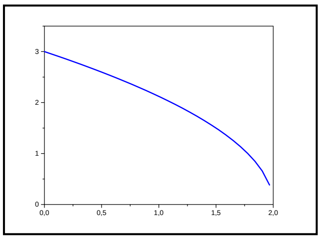


Η εξάρτηση της γωνιακής συχνότητας ω από το χρόνο δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\omega = \upsilon_0 \frac{l}{l^2 + R^2} \Rightarrow \boxed{\omega = \upsilon_0 \frac{\sqrt{l_0^2 - 2\upsilon_0 R t}}{R^2 + l_0^2 - 2\upsilon_0 R t}}$$

και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Επειδή το «παιχνίδι» αυτό παίζεται από δύο παίκτες, ο καθένας από τους οποίους προσπαθεί να τυλίξει το νήμα με την μπάλα προς την αντίθετη κατεύθυνση από τον άλλο παίκτη, είναι φανερό ότι το «παιχνίδι» είναι αντίρροπο στην αρχή, όπου επικρατούν χαμηλές



συχνότητες περιστροφής. Ο παίκτης, όμως, που θα καταφέρει να επιτύχει αρκετά τυλίγματα στην αρχή, έχει υπέρ-του το γεγονός ότι αυξάνει μη-γραμμικά η συχνότητα περιστροφής και, επομένως, δυσκολεύει τον αντίπαλό του να έχει ευστοχία, καθώς και το μήκος μειώνεται με εντονότερο ρυθμό προς το τέλος, $l=\sqrt{l_0^2-2\upsilon_0 Rt}$ όπως φαίνεται επίσης στο διπλανό μικρό σχήμα.

[Το πραγματικό παχνίδι tetherball είναι πιο σύνθετο, ο στύλος έχει αρκετά μεγάλο ύψος, το νήμα είναι δεμένο στην κορυφή του και το τύλιγμα είναι ελικοειδές]

Παράδειγμα 6.5.7 Δείξτε ότι, για ένα σώμα μάζας m που κινείται υπό την επίδραση ελκτικής κεντρικής δύναμης, $\vec{F}(\vec{r})=-f(r)\hat{r},\ \left[f(r)>0\right]$, όπου $\vec{r}$: η διανυσματική απόσταση από κέντρο έλξης, ισχύουν τα εξής γενικά συμπεράσματα:

(α_1) Η στροφορμή $\vec{L}$ του σώματος, ως προς το κέντρο έλξης, διατηρείται, ΣΥΝΕΠΩΣ,
(α_2) Η τροχιά του σώματος ειναι επίπεδη, ΣΥΝΕΠΩΣ,
(α_3) Η ακτίνα που συνδέει κέντρο έλξης και σώμα, διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους,

(β) Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με $E_K=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\dot{\theta}^2r^2\right)$, όπου $r=r(t)$, $\theta=\theta(t)$, οι επίπεδες πολικές συντεταγμένες του σώματος με σημείο αναφοράς το κέντρο έλξης και μία αρχική κατεύθυνση, αντίστοιχα.

(γ) Η ολική ενέργεια του σώματος είναι ίση με $E_{o\lambda}=U(r)+\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}$, όπου $U=U(r)$ η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας της κεντρικής δύναμης, και $\vec{L}$ η στροφορμή του σώματος, ως προς το κέντρο έλξης.[Ο όρος $L^2\big/\left(2mr^2\right)$ ονομάζεται «φυγόκεντρη δυναμική ενέργεια»]

(δ) Θεωρώντας ότι ένας πλανήτης (με $\vec{L}\neq 0$) αλληλεπιδρά ελκτικά ως σημειακή μάζα m μόνο με τη μάζα M του Ήλιου, σάν αυτή να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο του Ήλιου (παραδοχή που αποδεικνύεται ότι θα ήταν απολύτως ακριβής αν τα δύο σώματα ήταν απολύτως σφαιρικά και μόνα τους), αντιστοιχούμε σε αυτή τη βαρυτική αλληλεπίδραση μία συνάρτηση αρνητικής δυναμικής ενέργειας ίση με $U(r)_{grav}=-GMm/r$. Αθροίζοντας και τον όρο της φυγόκεντρης δυναμικής ενέργειας, $L^2\big/\left(2mr^2\right)$, παίρνουμε μία ενεργό συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (effective potential) ίση με $U_{eff}(r)=-G\frac{Mm}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}$, που αποτελείται από έναν ελκτικό όρο (-) και έναν απωστικό όρο (+). Μελετήστε τη δυναμική του πλανήτη σε αυτό το δυναμικό, για διαφορετικές τιμές συνολικής ενέργειας $E_{o\lambda}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α_1) $$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\left(f(r)\hat{r}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

(α_2) $\vec{L}=\sigma\tau\alpha\theta. \quad\Rightarrow\quad \vec{r}\times\vec{\upsilon}=\sigma\tau\alpha\theta$, άρα: επίπεδη τροχιά

(α_3) $$\vec{r}\times\vec{\upsilon}=\sigma\tau\alpha\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{L}}{m} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(\vec{r}\times d\vec{r}\right)/2}{dt}=\frac{\vec{L}}{2m}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

Αλλά, $\dfrac{\left(\vec{r}\times d\vec{r}\right)/2}{dt}=\dfrac{d\vec{S}}{dt}$, όπου $d\vec{S}$: επιφάνεια που σαρώνεται από την ακτίνα μέσα στο dt.

(β) Από την έκφραση για την ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες $\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+\dot{\theta}r\hat{\theta}$, όπου $\hat{r}\perp\hat{\theta}$, παίρνουμε: $E_K=\dfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\dot{\theta}^2r^2\right)$

(γ) Η ολική ενέργεια του σώματος είναι: $E_{o\lambda}=U\left(r\right)+E_K=U\left(r\right)+\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2+\dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$, αλλά, σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες: $\vec{L}=\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}=r\hat{r}\times m\left(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)=mr^2\dot{\theta}\hat{z}\quad\Rightarrow\quad\dot{\theta}^2=\dfrac{L^2}{m^2r^4}$.

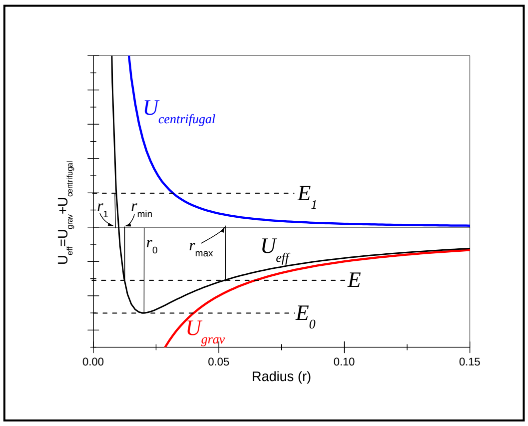
Αντικαθιστώντας, στην έκφραση της ενέργειας, το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας, συναρτήσει της στροφορμής, από την τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$\boxed{E_{o\lambda}=U\left(r\right)+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}m\dot{r}^2=U_{eff}+E_{K,radial}}$$

Δηλ., λόγω διατήρησης της τροφορμής, είναι δυνατόν να απομονωθεί η ακτινική κινητική ενέργεια, να περιγραφεί η γωνιακή κινητική ενέργεια ως ένας όρος αντιστρόφως ανάλογος του r^2, (που δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα) και να ενσωματωθεί σε ένα είδος ενεργούς συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $U_{eff}\left(r\right)=-G\dfrac{Mm}{r}+\dfrac{L^2}{2mr^2}$

(δ) Η ενεργός συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (effective potential)

$$U_{eff}\left(r\right)=-G\frac{Mm}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}$$



αποτελείται από έναν ελκτικό όρο (-), ο οποίος κυριαρχεί στις μεγάλες αποστάσεις (ως ανάλογο του $1/r$) και έναν απωστικό όρο (+), ο οποίος κυριαρχεί στις μικρές αποστάσεις (ως ανάλογο του $1/r^2$).

Υπό την επίδραση της ενεργού συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, η δυναμική συμπεριφορά του πλανήτη εξαρτάται από τις διαφορετικές τιμές συνολικής ενέργειας $E_{o\lambda}$.

Στο σχήμα φαίνεται η δυναμική συμπεριφορά του πλανήτη για τρεις χαρακτηριστικές τιμές συνολικής ενέργειας:

(δ_1) Για συνολική τιμή ενέργειας E_0 ίση με το ελάχιστο της ενεργού συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, υπάρχει μία μόνο τιμή της ακτίνας r_0 συμβατή με αυτή την ενέργεια. Άρα, για αυτή την ενέργεια ο πλανήτης εκτελεί κυκλική τροχιά ($r=r_0$=σταθ.).

(δ_2) Για συνολική τιμή ενέργειας E αρνητική αλλά μεγαλύτερη από την E_0, ($E_0<E<0$), υπάρχουν δύο τιμές της ακτίνας συμβατές με αυτή την ενέργεια. Άρα, για αυτή την ενέργεια ο πλανήτης εκτελεί κλειστή (ελλειπτική) τροχιά me περιήλιο ακτίνας r_{min}και αφήλιο r_{max}.

(δ_3) Για θετική συνολική ενέργεια ($E_1>0$) ο πλανήτης εκτελεί ανοικτή τροχιά με περιήλιο r_1 και αφήλιο άπειρης τιμής (δηλ., πρόκειται για κομίτη που δεν επιστρέφει στο Ηλιακό σύστημα.

Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της τροχιάς του (κύκλος ή έλλειψη ή ανοικτή τροχιά) εξαρτώνται επίσης από την στροφορμή του, διότι το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού $U_{eff}\left(r\right)=-G\dfrac{Mm}{r}+\dfrac{L^2}{2mr^2}$, εξαρτάται από την στροφορμή.

Πράγματι, η συνθήκη ελαχίστου

$$\frac{dU_{eff}}{dr}=0 \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2}-\frac{2L^2}{2mr^3}=0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(GMm-\frac{2L^2}{2mr}\right)=0 \Rightarrow GMm=\frac{2L^2}{2mr_0}$$

δίνει $r_0=\dfrac{2L^2}{2GMm^2}$ και επομένως $U_{\min}=U_{eff}\left(r_0\right)=-G\dfrac{Mm}{r_0}+\dfrac{L^2}{2mr_0^2}=-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2}$.

Άρα

(ε) αν $L=0 \Rightarrow r_0=0$, και $U_{\min}=-\infty$: «πτώση» του πλανήτη «προς το κέντρο» του Ήλιου,

(στ) για $L\neq 0 \Rightarrow U_{\min}=-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2}<0$ και, επομένως:

(στ$_1$) αν $E_{o\lambda}=U_{\min}=-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2}<0$, κυκλική τροχιά,

(στ$_2$) αν $U_{\min}=-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2}<E_{o\lambda}<0$, ελλειπτική τροχιά,

(στ$_3$) αν $E_{o\lambda}\geq 0$, ανοικτή τροχιά.

Η επακριβής ανάλυση της τροχιάς σώματος μάζας *m*, υπό την επίδραση βαρυτικής έλξης ανάλογης του $1/r^2$ από σημειακό ελκτικό κέντρο, μελετάται σε επόμενη ενότητα.