ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

[Η παρούσα Ενότητα, σχετικά με τη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας του Einstein, είναι εκτός της Ύλης του μαθήματος και αναρτάται ως Δώρο Χριστουγέννων]

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

8. Θεωρία Ειδικής Σχετικότητας

Η θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας βασίζεται στον συσχετισμό των χωρο-χρονικών συντεταγμένων ενός γεγονότος όπως αυτό φαίνεται από δύο αδρανειακά συστήματα, τα οποία βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους.

Αυτός ο συσχετισμός των χωρο-χρονικών συντεταγμένων, που είναι γνωστός ως μετασχηματισμό Lorentz , (και παράγεται με βάση την απαίτηση να συμφωνεί με κάποια θεμελιώδη πειραματικά δεδομένα), αντικαθιστά τον αντίστοιχο συσχετισμό που ισχύει στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής και είναι γνωστός ως μετασχηματισμός Γαλιλαίου.

Ο μετασχηματισμός Lorentz, περιέχει μία νέα αντίληψη για τη σχέση χώρου και χρόνου ανάμεσα σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα και, πέραν του συσχετισμού των αντίστοιχων χωρο-χρονικών συντεταγμένων ενός γεγονότος, οδηγεί σε νέα συμπεράσματα για τις εκφράσεις της ορμής και της ενέργειας , καθώς και για την έννοια της μάζας.

8.1 Ο Μετασχηματισμός του Γαλιλαίου και η ανεπάρκειά του Νευτωνικού πλαισίου

Στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής του Νεύτωνα, όταν δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, $(Oxyz)$ και $(O'x'y'z')$, βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους έτσι ώστε το δεύτερο να έχει σχετική ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς το πρώτο, (βλ. Παράδειγμα 2.1.1), τότε οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}'$, του ίδιου σώματος, ως προς τα δύο συστήματα, αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{\upsilon} = \vec{V} + \vec{\upsilon}' , \tag{1}$$

που αναφέρεται και ως **μετασχηματισμός Γαλιλαίου για τις ταχύτητες**.

Αν υποθέσουμε ότι οι αντίστοιχοι άξονες των δύο συστημάτων είναι παράλληλοι μεταξύ τους, και ότι η σχετική ταχύτητά τους είναι παράλληλη στον άξονα-*x*, $\left(\vec{V} = V\hat{x}\right)$, ενώ ορίζουμε ως χρονική στιγμή t=0, τη στιγμή που οι αρχές των δύο συστημάτων *O* και *O΄* συμπίπτουν, τότε οι συντεταγμένες ενός κινητού, ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς, συσχετίζονται με τον λεγόμενο **μετασχηματισμό Γαλιλαίου για τις θέσεις**,

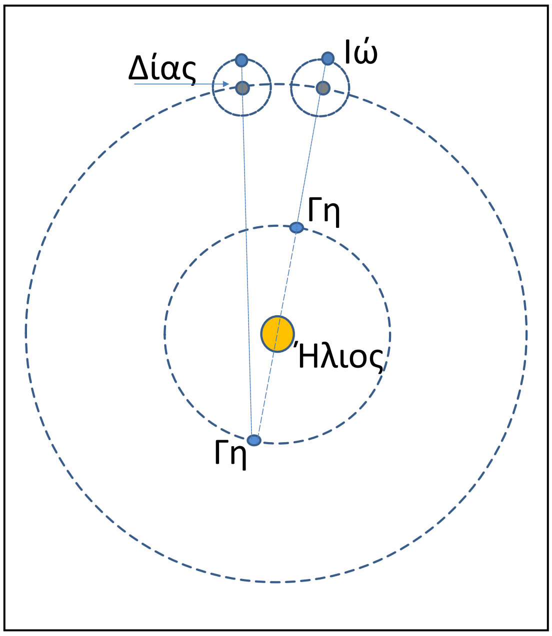
$$\begin{aligned} x &= x' + Vt \\ y &= y', \quad z = z' \end{aligned} \tag{2}$$

Στην προηγούμενη ανάλυση έχει θεωρηθεί ότι ο χρόνος «ρέει» με τον ίδιο τρόπο και για τα δύο συστήματα αναφοράς, και αρκεί ένα «γεγονός» αμοιβαία διαπιστούμενο και από τα δύο συστήματα (η σύμπτωση των αρχών *O* και *O΄*), για να ορίσουμε την χρονική στιγμή αναφοράς του χρόνου, t=0. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, σε αυτή την ενότητα, συνηθίζουμε να αποδίδουμε ένα παρατηρητή Π στο σύστημα $(Oxyz)$ και έναν παρατηρητή Π΄ στο σύστημα $(O'x'y'z')$. Για την ακρίβεια, θεωρούμε ότι ο καθένας από τους Π και Π΄, μπορεί να συνεργάζεται με ένα σύνολο «συγχρονισμένων» (ως προς τον ίδιον) συνεργατών-παρατηρητών, οι οποίοι μπορεί να είναι κατανεμημένοι σε ένα «πλέγμα» του αντίστοιχου συστήματος αναφοράς, όσο πυκνό είναι απαραίτητο για κάποια συγκεκριμένη μέτρηση. Στο κλασικό Νευτωνικό πλαίσιο, η αναφορά σε «συγχρονισμένους» παρατηρητές σημαίνει ότι έχει συμφωνηθεί μία κοινή αρχή μέτρησης του χρόνου.

[Στη γενικότερη περίπτωση, τα δύο συστήματα θα μπορούσαν να έχουν μη-παράλληλους άξονες, (αλλά με χρονικά αμετάβλητο σχετικό προσανατολισμό, αφού πρόκειται για αδρανειακά συστήματα), και ως χρονική στιγμή αναφοράς $t = t_0$ να θεωρηθεί η στιγμή κατά την οποία η αρχή *O΄* βρίσκεται στη διανυσματική θέση $\vec{R}_0$, ως προς το σύστημα $(Oxyz)$. Αυτού του είδους οι παραδοχές, θα έκαναν κάπως πιο πολύπλοκες της σχέσεις μετασχηματισμού, χωρίς όμως να αλλάξουν τα φυσικά συμπεράσματα, δεδομένου ότι η διατύπωση των φυσικών νόμων δε μπορεί να εξαρτάται από τον τρόπο που ορίζουμε το σύστημα αναφοράς (θέση και προσανατολισμός). Επομένως, για λόγους απλούστευσης των αλγεβρικών εκφράσεων, έχει επιλεγεί η σύμβαση που αναφέρεται στην προηγούμενη παράγραφο.]

Οι σχέσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου, για τις θέσεις και για τις ταχύτητες, είναι σύμφωνες με τα μηχανικά φαινόμενα της καθημερινής εμπειρίας. Για παράδειγμα, όταν παρατηρητής Π΄ στέκεται σε όχημα που κινείται ισοταχώς με ταχύτητα $\vec{V}$, ως προς άλλο αδρανειακό παρατηρητή Π, και εκτοξεύει ένα σώμα με ταχύτητα $\vec{\upsilon}'$, ως προς τον ίδιο τον Π΄, το σώμα αυτό φαίνεται, ως προς τον παρατηρητή Π, να κινείται, («με καλή ακρίβεια») με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \vec{V} + \vec{\upsilon}'$. Η διευκρίνιση, «με καλή ακρίβεια», δηλώνει κάποιες επιφυλάξεις οι οποίες αφορούν τη συσχέτιση φαινομένων που έχουν σχέση: (i) με ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα (και, συγκεκριμένα, την διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας), και (ii) με μηχανικά φαινόμενα στο όριο των μεγάλων ταχυτήτων. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, με την προϋπόθεση ότι διαθέτουμε πειραματικές διατάξεις αντίστοιχης ακρίβειας, διαπιστώνεται ότι τα πειραματικά δεδομένα δεν είναι σε συμφωνία με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, όπως θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους.

Πεπερασμένο της ταχύτητας του φωτός



Όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά, ήδη από τον 17 αιώνα (Roemer, 1676, μέσω αστρονομικών παρατηρήσεων στις εκλείψεις της Ιούς, δορυφόρου του πλανήτη Δία), η διάδοση του φωτός γίνεται με πεπερασμένη ταχύτητα. Συγκεκριμένα, και η Γη και ο Δίας έχουν τροχιές με πολύ μικρή ελλειπτικότητα (οι τροχιές τους είναι με καλή προσέγγιση κυκλικές), ενώ η περίοδος της Γης είναι T_Γ = 1 χρόνος και η περίοδος του Δία είναι T_Δ = 11.86 χρόνια. Επομένως, στο χρονικό διάστημα που η Γη έχει διανύσει την μισή τροχιά της (180^o), ο Δίας έχει διανύσει ένα τόξο περίπου 15^o. Με βάση τις παρατηρήσει που έχουν γίνει για την περιοδικότητα των εκλείψεων του δορυφόρου Ιώ, την χρονική περιοδο που ο Δίας και η Γη βρίσκονται στη μικρότερη μεταξύ τους απόσταση, παρατηρείται μία σταδιακά αυξανόμενη καθυστέρηση, η οποία μεγιστοποιείται στην τιμή $\Delta t \approx 22\min$, μετά από ~6 μήνες, όταν η Γη βρίσκεται στο αντιδιαμετρικό σημείο της τροχιάς της. Αν αυτή η καθυστέρηση αποδοθεί στο επιπλέον διάστημα που πρέπει να διανύσει το φώς για να καλύψει μία διάμετρο της τροχιάς της Γης, $D \approx 2.83\times10^{11} m$, τότε η ταχύτητα του φωτός υπολογίζεται, $c = D/\Delta t \approx 2.14\times10^{8} m/s$.

Η ταχύτητα του φωτός έχει μετρηθεί με όλο και μεγαλύτερης ακρίβειας διαδικασίες και διατάξεις, όπως η απόκλιση της αστρικής ακτινοβολίας (Bradley, 1729), η χρήση οδοντωτών τροχών (Fizeau, 1849), η μέθοδος των περιστρεφόμενων κατόπτρων, (Foucault-1862, και Michelson-1926), η χρήση συμβολομετρικών μεθόδων με ραδιοκύματα (Froome, 1958) και με ακτινοβολία laser (Evenson, et al., 1972, από το Εθνικό Ινστιτούτο Προτύπων και Τεχνολογίας NIST, των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, c = 299,792.4562±0.0011 km/s).

Παράλληλα, η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (και του φωτός) στο κενό, προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell όταν συνδυάζονται για να παράγουν την εξίσωση κύματος, οπότε παίρνουμε ότι $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, όπου ε_0 και μ_o η διηλεκτρική σταθερά του κενού και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα.

Αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός

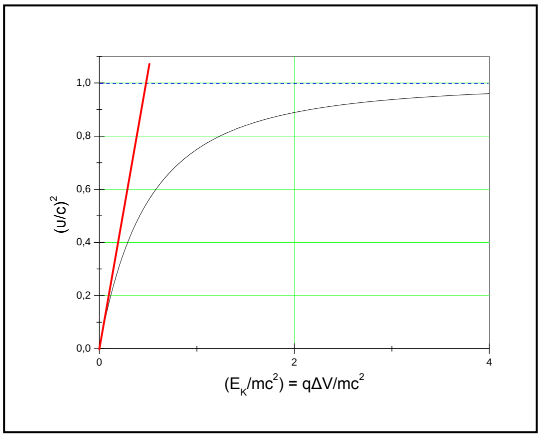
Μέχρις αυτό το σημείο δεν έχουμε ασχοληθεί με την κινητική κατάσταση της πηγής που εκπέμπει το φως (ή, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, γενικότερα). Μάλλον υποθέταμε ότι αναφερόμαστε σε ακίνητες, ως προς τον παρατηρητή που πραγματοποιεί τη μέτρηση της ταχύτητας, πηγές ακτινοβολίας-φωτός, (αν και στις περιπτώσεις των αστρονομικών παρατηρήσεων αυτό δεν ισχύει ακριβώς). Αν προσπαθήσουμε να ασχοληθούμε με την μελέτη διάδοσης της Ηλεκτρο-Μαγνητικής ακτινοβολίας (του φωτός), στην περίπτωση που η πηγή που το εκπέμπει κινείται σε σχέση με τον παρατηρητή, τότε διαπιστώνουμε τα εξής.

Από την άποψη των θεωρητικών υπολογισμών, αν γράψουμε τις εξισώσεις του Maxwell, ως προς ένα κινούμενο ως προς την πηγή αδρανειακό σύστημα, εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου μεταξύ των δύο συστημάτων, παρατηρούμε ότι, στο νέο σύστημα αναφοράς, οι εξισώσεις του Maxwell έχουν επιπλέον όρους. Άρα, ενώ τα δύο αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα (και δεν υπάρχει τρόπος να αποδοθεί ιδιαίτερος ρόλος στο ένα από τα δύο, παρά μόνο να διαπιστωθεί η σχετική τους ισοταχής κίνηση), οι φυσικοί νόμοι που διέπουν την συμπεριφορά του ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχουν διαφορετική μορφή στα δύο συστήματα, αν οι χωρο-χρονικές συντεταγμένες συσχετισθούν μέσω των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου.

Από την άποψη των πειραματικών μετρήσεων, αν επιχειρηθεί να μετρηθεί η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων τα οποία εκπέμπονται από μία στάσιμη, ως προς τον παρατηρητή, πηγή, και από την ίδια πηγή, όταν αυτή κινείται ως προς τον παρατηρητή, διαπιστώνεται ότι, και στις δύο περιπτώσεις, η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι η ίδια, (συμβολομετρικές μετρήσεις των Michelson και Morley, 1887, 1902,1905, 1920) Επομένως, και η πειραματική μέτρηση είναι σε ασυμφωνία με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου για τις ταχύτητες.

Απόκλιση μηχανικών φαινομένων από το κλασικό πλαίσιο στο όριο των μεγάλων ταχυτήτων

Κατά την επιτάχυνση φορτισμένων σωματιδίων, με τη βοήθεια υψηλών ηλεκτρικών τάσεων, αναμένεται, σύμφωνα με την κλασική μηχανική, ότι η ηλεκτρική-δυναμική ενέργεια που προσφέρεται στο φορτισμένο σωματίδιο, μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σωματιδίου. Η ηλεκτρική ενέργεια που προσφέρεται σε ένα σωματίδιο μάζας m που έχει φορτίο q και επιταχύνεται ανάμεσα σε μία διαφορά δυναμικού ΔV, είναι ίση με



$$E_\Delta = q\Delta V .$$

Η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια $E_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$

Εξισώνοντας τις δύο ενέργειες, παίρνουμε :

$$\upsilon^2 = \left(\frac{2q}{m}\right)\Delta V \qquad (3)$$

Αν μετρηθεί η διαφορά δυναμικού ΔV, με τη βοήθεια ενός βολτομέτρου, και η ταχύτητα των σωματιδίων υ, μέσω μίας διάταξης «χρόνου πτήσης» (time-of-flight), τότε σε ένα πειραματικό διάγραμμα $\upsilon^2 = f(\Delta V)$ αναμένεται, σύμφωνα με την κλασική πρόβλεψη, μία γραμμική σχέση ανάμεσα σε αυτά τα δύο μεγέθη, (κόκκινη ευθεία, στο σχήμα), με σταθερό συντελεστή αναλογίας (π.χ., το διπλάσιο του πηλίκου «φορτίο προς μάζα» του ηλεκτρονίου, στην περίπτωση επιτάχυνσης ηλεκτρονίων). Σε μία πραγματική μέτρηση, παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της κινητικής ενέργειας E_K η εξάρτηση είναι προσεγγιστικά γραμμική, αλλά για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας, η εξάρτηση αποκλίνει από την κλασικά αναμενόμενη συμπεριφορά, με την ταχύτητα να τείνει ασυμπτωτικά προς την ταχύτητα του φωτός (!), χωρίς να την υπερβαίνει (!), γεγονός που υποδεικνύει την ανάγκη αναμόρφωσης του κλασικού πλαισίου προκειμένου να συμφωνεί με τα μηχανικά φαινόμενα, στο όριο των μεγάλων ταχυτήτων

Με βάση παρατηρήσεις ανάλογες με τις προηγούμενες αλλά, κυρίως, με βάση την απαίτηση του αναλλοίωτου των φυσικών νόμων (και των εξισώσεων του Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο), κατά την εναλλαγή αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, ο Einstein εισηγήθηκε, το 1905, την Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας.

8.2 Η Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας και οι μετασχηματισμοί Lorentz

Η θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας του Einstein, στηρίζεται σε δύο θεμελιώδεις αρχές:

1. Οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
2. Η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ανεξάρτητα από την ταχύτητα της πηγής ή του δέκτη

Πέραν αυτών των αρχών θεωρούμε πως εξακολουθεί να ισχύει η παραδοχή ότι ο χώρος είναι ισότροπος και ομοιόμορφος.

Με βάση τα παραπάνω, θεωρούμε ότι δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, $(Oxyz)$ και $(O'x'y'z')$, (με τους αντίστοιχους άξονες παράλληλους), βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους έτσι ώστε το δεύτερο να έχει σχετική ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{x}$ ως προς το πρώτο. Θεωρούμε, επίσης, ότι οι αντίστοιχοι παρατηρητές Π και Π΄ (και οι παρατηρητές-συνεργάτες του καθενός), συμφωνούν ως αρχή μέτρησης των χρόνων $(t = t' = 0)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία συμπίπτουν οι αρχές O και O' των δύο συστημάτων.

Οι δύο παρατηρητές συμφωνούν να πραγματοποιήσουν ένα πείραμα, με τη βοήθεια του οποίου θα αποφασίσουν για τον μετασχηματισμό των χωρο-χρονικών συντεταγμένων του ίδιου γεγονότος ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς. Επειδή ο μετασχηματισμός αυτός πρέπει να ικανοποιεί τις ανωτέρω δύο αρχές, το πείραμα αυτό θα έχει σχέση με τη διάδοση του φωτός. Συγκεκριμένα, στην αρχή O του πρώτου συστήματος βρίσκεται ακίνητη μία πηγή φωτός, (η οποία, επομένως, κινείται ως προς το άλλο σύστημα, με ταχύτητα μέτρου V), και η οποία θα ενεργοποιηθεί κατά την χρονική στιγμή που θα συμπίπτουν οι αρχές O και O' των δύο συστημάτων. Το φωτεινό σήμα που εκπέμπεται από την πηγή ταξιδεύει με την (κοινή και για τα δύο συστήματα) ταχύτητα του φωτός. Αν υπολογίσουμε την θέση του φωτεινού παλμού, κάποια χρονική στιγμή t, σύμφωνα με τον παρατηρητή Π, θα είναι $x = ct$. Αν αντιστοιχήσουμε τις χωροχρονικές συντεταγμένες $(t, x = ct)$ με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του παρατηρητή Π΄, μέσω των μετασχηματισμών Γαλιλαίου

$$t' = t, \quad x' = x - Vt,$$

Τότε η ταχύτητα του φωτεινού παλμού, ως προς τον Π΄, υπολογίζεται

$$c' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - Vt}{t} = \frac{x}{t} - V \Rightarrow \boxed{c' = c - V \neq c}$$

Επομένως, όπως ήταν αναμενόμενο, ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου δεν ικανοποιεί το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός, μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων.

Επιπλέον, τα αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός, ανάμεσα στα δύο συστήματα, οδηγεί και στο συμπέρασμα ότι γεγονότα τα οποία περιγράφονται ως «ταυτόχρονα» στο ένα σύστημα, μπορεί να μην είναι ταυτόχρονα στο άλλο σύστημα. Για παράδειγμα, ο φωτεινός παλμός ταξιδεύει με ταχύτητα $+c$ προς τους θετικούς άξονες (Ox) και $(O'x')$, και με ταχύτητα $-c$ προς τους αρνητικούς άξονες (Ox) και $(O'x')$. Επομένως, η άφιξη του φωτεινού παλμού στα σημεία $(x_1 = -L, y_1 = 0, z_1 = 0)$ και $(x_2 = +L, y_2 = 0, z_2 = 0)$ του συστήματος $(Oxyz)$, (στα οποία μπορεί να βρίσκονται, π.χ., δύο ανιχνευτές ακτινοβολίας A_1 και A_2, αντίστοιχα, που ακινητούν ως προς τον Π), συμβαίνει την ίδια χρονική στιγμή $\left(t_1 = \frac{-c}{-L} = \frac{c}{L} = t_2\right)$ για τον παρατηρητή Π. Για τον παρατηρητή Π΄, ο φωτεινός παλμός ταξιδεύει επίσης με τον ίδιο τρόπο κατά μήκος των δικών του αξόνων, με τη διαφορά ότι ο ανιχνευτής A_1 απομακρύνεται από την αρχή Ο΄ ενώ ο ανιχνευτής A_2 πλησιάζει το Ο΄. Άρα, κατά τον Π΄, ο φωτεινός παλμός θα φτάσει πρώτα στον ανιχνευτή A_2 και μετά στον ανιχνευτή A_1. Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ η εκκίνηση του παλμού μπορεί να είχε οργανωθεί έτσι ώστε να είναι ταυτόχρονη και στα δύο συστήματα, η άφιξή του, σε δύο ανιχνευτές, μπορεί να είναι ταυτόχρονη στο ένα σύστημα, αλλά μη-ταυτόχρονη στο άλλο. Από την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι η σχέση των χρονικών συντεταγμένων, για κάποια συγκεκριμένα γεγονότα, (π.χ., άφιξη του φωτός στους δύο ανιχνευτές), μπορεί να εξαρτάται και από τις χωρικές συντεταγμένες, στις οποίες φαίνονται να λαμβάνουν χώρα αυτά τα γεγονότα, ανάλογα με το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Αναζητούμε, λοιπόν, γενικούς μετασχηματισμούς της μορφής

$$\begin{aligned} x &= f_1(x', y', z', t'), \quad y = f_2(x', y', z', t') \\ z &= f_3(x', y', z', t'), \quad t = f_4(x', y', z', t') \end{aligned} \tag{4}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε $dx = \frac{\partial f_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f_1}{\partial z'} dz' + \frac{\partial f_1}{\partial t'} dt'$, και αντίστοιχα για τα dy, dz, dt. Αν καθορίσουμε συγκεκριμένες τιμές για τα: dx', dy', dz', dt', και απαιτήσουμε η τιμή του dx, (αντίστοιχα, για τα: dy, dz, dt), να είναι ανεξάρτητη των (x', y', z', t'), (λόγω ομοιογένειας και ισοτροπίας του χώρου και του χρόνου), τότε προκύπτει ότι όλες οι μερικές παράγωγοι των f_1, f_2, f_3, f_4, ως προς τα x', y', z', t', πρέπει να είναι ποσότητες σταθερές και ανεξάρτητες των (x', y', z', t'). Άρα, οι μετασχηματισμοί που αναζητούμε πρέπει να είναι γραμμικοί, δηλ. της μορφής:

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a_4 t' + a_5, \tag{5}$$

όπου τα $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ θα είναι ανεξάρτητα των x', y', z', t', και θα εξαρτώνται, από παγκόσμιες σταθερές και από την σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων. Αντίστοιχα, προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύει $dy = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + b_4 t' + b_5$, κ.ο.κ.. Αν επιλέξουμε, οι αντίστοιχοι άξονες των $(Oxyz)$ και $(O'x'y'z')$ να είναι παράλληλοι μεταξύ τους, θα πρέπει, π.χ., τα y, y' να μηδενίζονται ταυτόχρονα, ανεξάρτητα από τις τιμές των άλλων συντεταγμένων, οπότε αναγκαστικά θα είναι $y = \varepsilon y'$, αλλά για λόγους ισοδυναμίας των συστημάτων, επίσης θα πρέπει να είναι $y' = \varepsilon y$, άρα $\varepsilon = +1$, και $y = y'$. Όμοια, $z' = z$. Όπως βλέπουμε, οι τιμές των (y, z) είναι ανεξάρτητες των (x', t'), άρα και οι (x', t') είναι ανεξάρτητες των (y,z). Αντίστοιχα, οι τιμές των (x,t) είναι ανεξάρτητες των (y',z'), άρα τα (x,t) είναι συναρτήσεις μόνο των (x',t'). Η αρχή Ο έχει συντεταγμένη $x=0$, σύμφωνα με τον Π, και συντεταγμένη $x'=-Vt'$, σύμφωνα με τον Π΄, ή, $x'+Vt'=0$. Επομένως, το πολύ να ισχύει

$$x=\gamma\left(x'+Vt'\right). \qquad (6)$$

Αντίστροφα, η αρχή Ο΄ έχει συντεταγμένη $x'=0$, σύμφωνα με τον Π΄, και συντεταγμένη $x=+Vt$, σύμφωνα με τον Π, ή, $x-Vt=0$. Επομένως, το πολύ να ισχύει

$$x'=\gamma\left(x-Vt\right). \qquad (7)$$

Ο συντελεστής γ είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις, λόγω της ισοδυναμίας των δύο συστημάτων, και μπορεί να προσδιοριστεί με βάση την απαίτηση του αναλλοίωτου της ταχύτητας του φωτός στα δύο συστήματα. Έστω ότι ο φωτεινός παλμός, που ξεκίνησε κατά την σύμπτωση των Ο και Ο΄, χτυπά μία οθόνη (ή, φθάνει σε κάποιον ανιχνευτή) που βρίσκεται πάνω στον άξονα *x* (*x*΄, αντίστοιχα), και αυτό το γεγονός προσδιορίζεται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες (x,t) και (x',t') αντίστοιχα, στα δύο συστήματα. Θα πρέπει να ισχύει

$$x=ct, \quad x'=ct' \qquad (8\ \alpha,\beta))$$

Από (6) και (8 α): $x=\gamma\left(x'+Vt'\right)=ct$, και μέσω της (8 β): $\gamma\left(c+V\right)t'=ct$ (9 α)

Από (7) και (8 β): $x'=\gamma\left(x-Vt\right)=ct'$, και μέσω της (8 α): $\gamma\left(c-V\right)t=ct'$ (9 β)

Πολλαπλασιάζοντας τις (9 α) και (9 β): $\gamma^2\left(c^2-V^2\right)=c^2 \Rightarrow \boxed{\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta\equiv\frac{V}{c}\le 1}$, όπου έχει ληφθεί η θετική τιμή της ρίζας ώστε, στην τετριμμένη περίπτωση V=0, οι θετικοί άξονες (Ox) και $(O'x')$ να συμπίπτουν. Στο $\beta\equiv\frac{V}{c}\le 1$, το «=» αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση που το δεύτερο σύστημα αναφοράς αφορά φωτόνιο που κινείται με την ταχύτητα του φωτός. [Στην Φυσική των Στοιχειωδών Σωματιδίων, αναφέρονται και άλλα σωματίδια, πλην των φωτονίων, όπως τα νετρίνα, τα οποία έχουν απειροελάχιστη μάζα και ταξιδεύουν επίσης με την ταχύτητα του φωτός.]

Τελικά

$$x=\gamma\left(x'+Vt'\right)=\frac{\left(x'+Vt'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (10\ \alpha)$$

Επιλύοντας την (7) ως προς *t* και αντικαθιστώντας το *x* από την (10 α), παίρνουμε, επίσης, τελικά

$$t=\gamma\left(t'+\frac{\beta^2}{V}x'\right)=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (10\ \beta)$$

Οι σχέσεις (10 α,β) είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz, που συσχετίζουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος όπως αυτό περιγράφεται στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς και , συμπεριλαμβάνοντας και τις άλλες δύο χωρικές συντεταγμένες, γράφονται συνολικά ως εξής

$$\boxed{x=\gamma\left(x'+Vt'\right)=\frac{\left(x'+Vt'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=\gamma\left(t'+\frac{\beta^2}{V}x'\right)=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (11)$$

Παρατηρούμε ότι, στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων $\left((V/c)\equiv\beta<<1\right)$, μπορούμε να αναπτύξουμε το $\gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\approx 1+(\beta^2/2)$, οπότε, η (10 α) δίνει

$$x=\gamma\left(x'+Vt'\right)\approx\left(1+(\beta^2/2)\right)\left(x'+Vt'\right)=\left(x'+Vt'\right)+(\beta^2/2)\left(x'+Vt'\right)$$

Άρα, <u>σε πρώτη τάξη ως προς β</u>, $x\approx\left(x'+Vt'\right)$.

Όμοια, $t=\gamma\left(t'+\frac{\beta^2}{V}x'\right)\approx\left(1+(\beta^2/2)\right)\left(t'+\frac{\beta^2}{V}x'\right)=t'+\frac{\beta^2}{V}x'+(\beta^2/2)\left(t'+\frac{\beta^2}{V}x'\right)$

Άρα, <u>σε πρώτη τάξη ως προς β</u>, $t\approx t'$

Δηλαδή, στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων, και σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς την αδιάστατη παράμετρο *β=V/c,* οι μετασχηματισμοί Lorentz προσεγγίζουν τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, $x\approx\left(x'+Vt'\right)$, και ο χρόνος έχει την ίδια τιμή και για τα δύο συστήματα, $t\approx t'$,ανεξάρτητα από τη θέση στο χώρο (σύμφωνα με την Νευτώνια αντίληψη).

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz, που μας δίνει τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος, για τον παρατηρητή Π΄, συναρτήσει των συντεταγμένων του ίδιου γεγονότος, για τον παρατηρητή Π, προκύπτει επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (10 α,β) ως προς $\left(x',t'\right)$, οπότε παίρνουμε

$$x'=\gamma\left(x-Vt\right)=\frac{\left(x-Vt\right)}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \text{και}\qquad t'=\gamma\left(t-\frac{\beta^2}{V}x\right)=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad (12\ α,β)$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός έχει την ίδια μορφή με τον ευθύ, με μόνη διαφορά ότι έχει αλλάξει το πρόσημο της σχετικής ταχύτητας V, όπως ήταν και φυσικά αναμενόμενο.

8.3 Συμπεράσματα των μετασχηματισμών Lorentz

Με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz, προκύπτουν ορισμένα συμπεράσματα τα οποία είναι σε αντίφαση με τις αντιλήψεις (περί απόλυτων, και ανεξάρτητων μεταξύ τους, χώρου και χρόνου), στις οποίες στηρίζεται η μηχανική του Νεύτωνα. Οι αντιλήψεις αυτές, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα καθημερινά φαινόμενα αφορούν ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός, (και άρα οι σχετικιστικές διορθώσεις είναι ασήμαντες), έχουν διαμορφώσει μία «κλασική διαίσθηση», σύμφωνα με την οποία τα συμπεράσματα της σχετικότητας αντιμετωπίζονται ως αντι-διαισθητικά παράδοξα. Παρ' όλα αυτά, τα συμπεράσματα αυτά έχουν τρία ισχυρά επιχειρήματα υπέρ τους: (i) συνοδεύονται από μία ακριβώς διατυπωμένη διαδικασία λειτουργικής-περιγραφής, (εν αντιθέσει, π.χ., με τον απόλυτο χώρο ή χρόνο), (ii) έχουν επιβεβαιωθεί σε πειράματα εξαιρετικής ακρίβειας με ταχέως κινούμενα στοιχειώδη σωματίδια, στην ανάλυση των οποίων οι σχετικιστικοί υπολογισμοί αποτελούν πλέον ρουτίνα. (iii) αποτελούν την βάση σχεδιασμού εφαρμογών υψηλής μεν τεχνολογία αλλά καθημερινής χρήσης (π.χ., συγχρονισμός δορυφορικών συστημάτων).

Η σχετικότητα του «ταυτόχρονου»

Ένα πρώτο συμπέρασμα το συζητήσαμε ήδη, ακριβώς πριν την παραγωγή των μετασχηματισμών Lorentz, και αφορά τον μη-απόλυτο χαρακτήρα της έννοιας του «ταυτόχρονου», σύμφωνα με το οποίο, δύο γεγονότα τα οποία είναι ταυτόχρονα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, σε ένα άλλο σύστημα δεν είναι ταυτόχρονα. Αν δύο γεγονότα λαμβάνουν χώρα την ίδια χρονική στιγμή $t_1=t_2$, στις θέσεις $x_1\neq x_2$, ως προς τον παρατηρητή Π, τα ίδια γεγονότα περιγράφονται, ως προς τον παρατηρητή Π΄, ως $\left(x_1',t_1'\right)$ και $\left(x_2',t_2'\right)$. Αλλά, $t_1'=\gamma\left(t_1-\frac{\beta^2}{V}x_1\right)$ και $t_2'=\gamma\left(t_2-\frac{\beta^2}{V}x_2\right)$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $t_1=t_2$, και $x_1\neq x_2$, παίρνουμε

$t_1' - t_2' = \gamma \dfrac{\beta^2}{V}\left(x_2 - x_1\right) \neq 0$, επομένως, ως προς τον Π΄, τα δύο γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα.

Η «συστολή» του μήκους

Προκειμένου να μετρήσουμε κάποιο μήκος, π.χ., το μήκος μία ράβδου που είναι προσανατολισμένη παράλληλα στον άξονα-x, θα πρέπει να είμαστε σίγουροι για την κινητική κατάσταση της ράβδου, ως προς το σύστημα αναφοράς στο οποίο γίνεται η μέτρηση.

Στην περίπτωση που η ράβδος ακινητεί, ως προς το σύστημα αναφοράς, $\left(O'x'y'z'\right)$, τότε (αν η ράβδος είναι παράλληλη στον άξονα-x), μπορούμε να μετρήσουμε τις συντεταγμένες των δύο άκρων της, οπότε, το μήκος της ράβδου, θα είναι $L_0 = x_2' - x_1'$, όπου $\left(x_2', x_1'\right)$ οι συντεταγμένες των άκρων της, που δεν εξαρτώνται από το χρόνο. Το μήκος αυτό L_0, επειδή <u>έχει μετρηθεί στο σύστημα, ως προς το οποίο η ράβδος ακινητεί</u>, λέγεται και «<u>**ιδιομήκος**</u>» της ράβδου και συμβολίζεται με έναν υποδείκτη «0».

Ως προς ένα άλλο σύστημα, $\left(Oxyz\right)$, το οποίο έχει άξονες παράλληλους με το $\left(O'x'y'z'\right)$ (σύμφωνα με τις προηγούμενες συμβάσεις των μετασχηματισμών Lorentz), και κινείται ως προς αυτό με ταχύτητα $\vec{V}' = -V\hat{x}'$, η ράβδος εξακολουθεί να είναι παράλληλη στον άξονα x, αλλά κινείται πλέον ως προς αυτόν, με ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{x}$. Άρα, προκειμένου να μετρηθεί το μήκος της, ως προς το $\left(Oxyz\right)$, πρέπει να ληφθεί πρόνοια να γίνει η μέτρηση την ίδια χρονική στιγμή, $t_1 = t_2 = t$.

$$\left.\begin{cases} x_1' = \gamma\left(x_1 - Vt_1\right), \quad x_2' = \gamma\left(x_2 - Vt_2\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t_1 = t_2 = t \end{cases}\right\} \Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma\left(x_2 - x_1\right)$$

Αν $\left(x_2 - x_1\right) = L$: το μήκος της ράβδου, ως προς το σύστημα στο οποίο αυτή κινείται, τότε έχουμε

$$L = L_0 / \gamma \Rightarrow \boxed{L = L_0\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13)$$

Δηλαδή, το μήκος της ράβδου, ως προς σύστημα στο οποίο η ράβδος ακινητεί $\left(L_0\right)$ και ως προς σύστημα στο οποίο κινείται $\left(L\right)$, είναι διαφορετικά, με το δεύτερο να είναι μικρότερο, σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση (13), η οποία είναι γνωστή ως **συστολή μήκους Lorentz** (ή, **συστολή μήκους Fitzgerald**). Η συστολή μήκους είναι ένα αποτέλεσμα που προκύπτει μέσω μίας (ταυτόχρονης) διαδικασίας μέτρησης, όπως αυτή περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο, για το σύστημα ως προς το οποίο η ράβδος κινείται, παράλληλα προς το μήκος της. Αν η σχετική κίνηση ράβδου και συστήματος αναφοράς γίνεται κάθετα προς το μήκος της ράβδου, τότε μία μέτρηση του μήκους της, σε ένα σύστημα ως προς το οποίο ακινητεί και σε ένα σύστημα ως προ το οποίο κινείται (με την προϋπόθεση της ταυτόχρονης μέτρησης, στη δεύτερη περίπτωση) οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που είναι ίδιο και για τα δύο συστήματα, $\left(\pi, \chi., \quad y_1 = y_1', y_2 = y_2', \quad \Rightarrow y_2 - y_1 = y_2' - y_1'\right)$. Η συστολή μήκους, παράλληλα στην διεύθυνση σχετικής κίνησης, είναι ένα αποτέλεσμα που προκύπτει από μία διαδικασίας μέτρησης, όπως αυτή περιγράφεται στις προηγούμενες παραγράφους, δηλ., ταυτόχρονη καταγραφή, ως προ το σύστημα στο οποίο η ράβδος κινείται, των συντεταγμένων των δύο άκρων της, με τη βοήθεια των συγχρονισμένων βοηθών-παρατηρητών αυτού του συστήματος αναφοράς. Άρα, η ταυτόχρονη αυτή καταγραφή γίνεται σε διαφορετικά σημεία αυτού του συστήματος. Αντίθετα, μία οπτική παρατήρηση ή μία φωτογραφική αποτύπωση των άκρων της ράβδου, κάποια χρονική στιγμή, η οποία γίνεται αναγκαστικά από ένα σημείο του συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο η ράβδος κινείται, δεν έχει τα χαρακτηριστικά του ταυτόχρονου, διότι τα δύο οπτικά σήματα που καταγράφονται κάποια χρονική στιγμή έχουν «εκπεμφθεί» σε διαφορετική χρονική στιγμή, από κάθε άκρο. Ένας υπολογισμός, που λαμβάνει υπόψη την ταχύτητα σχετικής κίνησης $(\vec{V})$ και την ταχύτητα διάδοσης των οπτικών σημάτων(c), μπορεί να δείξει ότι μία τέτοια οπτική καταγραφή οδηγεί σε ένα «φαινόμενο» μήκος που παραμένει ίδιο και ως προς το σύστημα στο οποίο η ράβδος ακινητεί και ως προς το σύστημα στο οποίο κινείται, ωσάν η οπτική παρατήρηση να «διορθώνει» τη συστολή Lorentz-Fitzgerald.

Η «διαστολή» του χρόνου

Ας υποθέσουμε ότι δύο γεγονότα (E_1', E_2') λαμβάνουν χώρα στο ίδιο σημείο, $x_1' = x_2' = x'$, του συστήματος αναφοράς $(O'x'y'z')$, κατά τις χρονικές στιγμές t_1' και $t_2' \neq t_1'$. Η χρονική διαφορά $\tau_0 = t_2' - t_1'$, που <u>αφορά γεγονότα που έλαβαν χώρα στο ίδιο σημείο</u>, λέγεται «**<u>ιδιοχρόνος</u>**» ανάμεσα στα δύο γεγονότα.

Ως προς το σύστημα $(Oxyz)$, τα αντίστοιχα γεγονότα (E_1, E_2) καταγράφονται και σε διαφορετικά σημεία αλλά και σε διαφορετικούς χρόνους, οι οποίοι, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz, είναι

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 = \gamma\left(t_1' + \dfrac{\beta^2}{V}x_1'\right), \quad t_2 = \gamma\left(t_2' + \dfrac{\beta^2}{V}x_2'\right) \\ \qquad\qquad\qquad x_1' = x_2' = x' \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' - t_1'\right) \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (14)$$

Η τελευταία σχέση (14) είναι γνωστή ως **διαστολή του χρόνου** και δηλώνει ότι, ρολόγια τα οποία κινούνται, ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, φαίνονται, ως προς αυτό το σύστημα, να μετράνε το χρόνο με αργότερο ρυθμό, από το ρυθμό με τον οποίου μετράνε το χρόνο, ως προς σύστημα στο οποίο ακινητούνε.

Το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου διαπιστώνεται πειραματικά μέσω των χρόνων ζωής ασταθών στοιχειωδών σωματιδίων, όπως είναι τα μιόνια ή (μ-μεσόνια). Αυτά τα σωματίδια διασπώνται αυθόρμητα σε ένα ηλεκτρόνιο (ή, ένα ποσιτρόνιο) και δύο νετρίνα. Ο μέσος χρόνος που μεσολαβεί από τη δημιουργία ενός μ-μεσονίου μέχρι την αυθόρμητη διάσπασή του (για την ακρίβεια, ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι να υποδιπλασιαστεί πληθυσμός τους: χρόνος ημιζωής) είναι περίπου $2\times10^{-6}s$, όταν αυτά ακινητούν, (ή κινούνται με μικρές ταχύτητες), ως προς το σύστημα παρατήρησης. Με βάση αυτόν τον χρόνο ημιζωής, όταν κινούνται με υψηλές ταχύτητες, θα μπορούσαν να διανύσουν το πολύ 600m, (στην οριακή περίπτωση που θα προσέγγιζαν την ταχύτητα του φωτός), μέχρι να υποδιπλασιαστεί ο πληθυσμός τους. Πειραματικές μετρήσεις που έχουν γίνει σε μ-μεσόνια, που διατρέχουν την Γήινη ατμόσφαιρα με ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι διανύουν αποστάσεις της τάξης των 20-30 km, χωρίς ο πληθυσμός τους να μειώνεται τόσο όσο θα περίμενε κανείς αν κάθε 600m υποδιπλασιαζόταν ο αριθμός τους. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ημιζωής τους, ως προς το σύστημα αναφοράς της Γης, ως προς το οποίο κινούνται με υψηλές ταχύτητες είναι πολύ μεγαλύτερος από ότι ως προς το σύστημα ηρεμίας τους (για το οποίο, ο αντίστοιχος χρόνος ημιζωής είναι ο ιδιόχρονος). Βέβαια, ως προς το σύστημα αναφοράς των μ-μεσονίων, η αντίστοιχη απόσταση που διανύεται στον ιδιόχρονο της ημιζωής τους ανάγεται, μέσω της συστολής μήκους σε ένα μήκος της τάξης των 600m, σε συνέπεια με τον χρόνο ημιζωής όπως μετράται σε ένα σύστημα ως προς το οποίο ηρεμούν.

Αναλλοίωτο «διάστημα» και 4-διανύσματα

Οι μετασχηματισμοί Lorentz μπορούν να γραφούν με λίγο διαφορετικό τρόπο, ως εξής

$$x=\gamma\left(x'+Vt'\right)=\gamma\left(x'+\frac{V}{c}(ct')\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\gamma\left(x'+\beta(ct')\right)} \quad (15\ \alpha)$$

$$t=\gamma\left(t'+\frac{V}{c^2}x'\right)\Rightarrow ct=\gamma\left(ct'+\frac{V}{c}x'\right)\Rightarrow \boxed{ct=\gamma\left(ct'+\beta x'\right)} \quad (15\ \beta)$$

Με τη μορφή (15α,β), οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι ίσως ευκολότερα απομνημονεύσιμοι, λόγω του συμμετρικού τρόπου με τον οποίον εμφανίζονται τα μεγέθη (x,ct) και (x',ct'). Επιπλέον, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η διαφορά τετραγώνων των μεγεθών (x,ct) μένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς Lorentz. Πράγματι :

$$\left.\begin{aligned} x=\gamma\left(x'+\beta(ct')\right)&\Rightarrow x^2=\gamma^2\left(x'^2+\beta^2(ct')^2+2x'\beta(ct')\right)\\ ct=\gamma\left(ct'+\beta x'\right)&\Rightarrow (ct)^2=\gamma^2\left((ct')^2+\beta^2x'^2+2\beta x'(ct')\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$x^2-(ct)^2=\gamma^2\left(x'^2+\beta^2(ct')^2-(ct')^2-\beta^2x'^2\right)=\gamma^2\left((1-\beta^2)x'^2-(1-\beta^2)(ct')^2\right)\Rightarrow$$

$$x^2-(ct)^2=\gamma^2\left((1-\beta^2)\left(x'^2-(ct')^2\right)\right)\Rightarrow \boxed{x^2-(ct)^2=x'^2-(ct')^2}$$

Δεδομένου ότι $y^2+z^2=y'^2+z'^2$, συνδυάζοντας με την προηγούμενη σχέση, παίρνουμε

$$y^2+z^2+x^2-(ct)^2=y'^2+z'^2+x'^2-(ct')^2\Rightarrow \boxed{r^2-(ct)^2=r'^2-(ct')^2} \qquad (16)$$

Η σχέση (16) υποβάλλει την ιδέα ότι, όπως στον 3-διάστατο χώρο, το τετράγωνο του μέτρου ενός διανύσματος είναι αναλλοίωτο σε στροφές του συστήματος αναφοράς, στον 4-διάστατο χωρόχρονο παραμένει αναλλοίωτο, σε μετασχηματισμούς Lorentz, το τετράγωνο του μέτρου ενός νέου μεγέθους, του 4-διανύσματος $(\vec{r},ict)\equiv(x,y,z,ict)$, όπου i :η φανταστική μονάδα.

8.4 Μετασχηματισμός ταχυτήτων Lorentz

Ας θεωρήσουμε την κίνηση ενός σημειακού σωματιδίου, ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς $(Oxyz))$ και $(O'x'y'z')$. Η ταχύτητα του σωματιδίου, ως προς τα δύο συστήματα είναι, αντίστοιχα

$$u_x=\frac{dx}{dt},\quad u_y=\frac{dy}{dt},\quad u_z=\frac{dz}{dt}, \qquad \text{και} \qquad u_x{}'=\frac{dx'}{dt'},\quad u_y'=\frac{dy'}{dt'},\quad u_z{}'=\frac{dz'}{dt'}.$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (11), παίρνουμε

$$dx=\frac{\left(dx'+Vdt'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',\quad dt=\frac{dt'+\dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (16)$$

Διαιρώντας τις τρεις πρώτες σχέσεις με την τέταρτη, παίρνουμε τον μετασχηματισμό Lorentz για τις ταχύτητες:

$$\boxed{u_x=\frac{u_x'+V}{1+\left(Vu_x'/c^2\right)},\quad u_y=\frac{u_y'\sqrt{1-\left(V^2/c^2\right)}}{1+\left(Vu_x'/c^2\right)},\quad u_z=\frac{u_z'\sqrt{1-\left(V^2/c^2\right)}}{1+\left(Vu_x'/c^2\right)}} \qquad (17)$$

Ο μετασχηματισμός ταχυτήτων κατά Lorentz είναι συνεπής με το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο ταξιδεύει κατά μήκος του *Ox΄* , (προφανώς, με ταχύτητα $u_x'=c$,ως προς το *O΄x΄y΄z΄*), τότε η ταχύτητά του ως προς το *Oxyz*, είναι

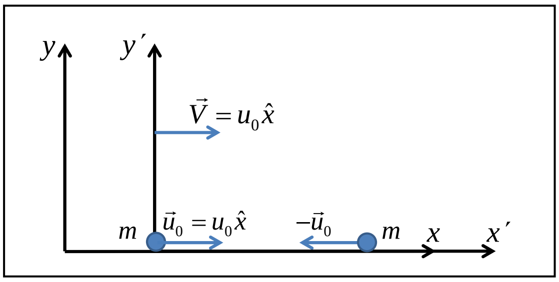
$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \left(V u'_x / c^2\right)} = \frac{c + V}{1 + \left(V c / c^2\right)} = c\frac{c+V}{c+V} = c$$

[Αν υποθέσουμε, αντίστοιχα, ότι ένα φωτόνιο ταξιδεύει κατά μήκος του *Oy΄*, (προφανώς, με ταχύτητα $u'_y = c$, ως προς το *O΄x΄y΄z΄*), τότε ποια είναι η ταχύτητά του ως προς το *Oxyz* ;]

Όπως και με τους μετασχηματισμούς Lorentz για τις συντεταγμένες, έτσι και για τις ταχύτητες, μπορεί να δείξει κανείς ότι, για $(V/c) << 1$, ο μετασχηματισμός Loretnz μεταπίπτει στον μετασχηματισμό Γαλιλαίου.

8.5 Σχετικιστική Δυναμική

Είδαμε (βλ. τελευταίες παραγράφους της ενότητας 8.1) ότι, όταν προσφέρουμε μεγάλη ενέργεια σε φορτισμένα σωματίδια φορτίου q, επιταχύνοντάς τα ανάμεσα σε μία διαφορά δυναμικού Δ*V*, η μεταβολή του τετραγώνου της ταχύτητάς τους, συναρτήσει της ενέργειας, δεν είναι η γραμμική σχέση, $\upsilon^2 = \left(\frac{2q}{m}\right)\Delta V$, που θα περίμενε κανείς, με βάση την κλασική μηχανική. Αντίθετα, αυξάνοντας την διαφορά δυναμικού Δ*V*, το τετράγωνο της ταχύτητας τείνει σε μία οριακή τιμή ίση με το c^2, την οποία δεν φτάνει ποτέ, αν η μάζα του σωματιδίου που επιταχύνουμε είναι πεπερασμένη. Επίσης, από τους μετασχηματισμούς Lorentz για τις ταχύτητες, (σχέση (17) της προηγούμενης ενότητας 8.4), μπορούμε να δείξουμε ότι η κλασσική έκφραση για την ορμή, $\vec{p} = m\vec{u}$, παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ορμής, αν η αδρανειακή μάζα *m* είναι μία ποσότητα ανεξάρτητη από την ταχύτητα.



Πράγματι, ας μελετήσουμε την πλαστική κρούση δύο ίσων σημειακών μαζών *m*, όπως αυτή περιγράφεται από δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ως προς το αδρανειακό σύστημα $(Oxyz)$, οι δύο μάζες κινούνται παράλληλα προς τον άξονα *Ox* με ίσες και αντίθετες ταχύτητες. μέτρου $|\vec{u}_0| = u_0$. Το δεύτερο αδρανειακό σύστημα, $(O'x'y'z')$, το επιλέγουμε να κινείται με σχετική ταχύτητα $\vec{V} = u_o\hat{x}$, ως προς το $(Oxyz)$. Μετά την πλαστική κρούση, και την συσσωμάτωσή τους, η νέα ενιαία μάζα 2*m* ακινητεί ως προς το αδρανειακό σύστημα $(Oxyz)$, ως προς το οποίο η διατήρηση της ορμής ικανοποιείται, δεδομένου ότι

$$\vec{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi.} = m\vec{u}_0 + m\left(-\vec{u}_0\right) = 0$$

$$\vec{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda.} = m\cdot 0 + m\cdot 0 = 2m\cdot 0 = 0$$

Ως προς το αδρανειακό σύστημα $(O'x'y'z')$, (το οποίο, βέβαια, δεν επηρεάζεται από τη διαδικασία πλαστικής κρούσης, αλλά, συνεχίζει να κινείται με την ίδια ταχύτητα, ως αδρανειακό σύστημα), οι τιμές των ταχυτήτων έχουν ως εξής, σύμφωνα με τον μετασχηματισμό ταχυτήτων κατά Lorentz.

$$u'_{1,\alpha\rho\chi} = \frac{u_{1,\alpha\rho\chi} - V}{1 - \left(u_1 V / c^2\right)} = \frac{u_0 - u_0}{1 - \left(u_0^2 / c^2\right)} = 0$$

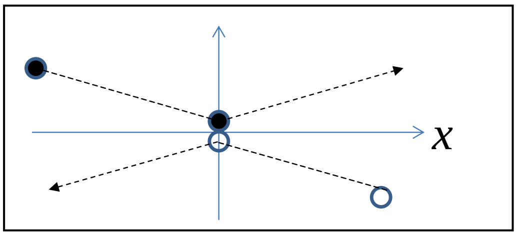
$$u'_{2,\alpha\rho\chi} = \frac{u_{2,\alpha\rho\chi} - V}{1 - \left(u_2 V / c^2\right)} = \frac{-u_0 - u_0}{1 - \left(u_0^2 / c^2\right)} = \frac{-2u_0}{1 - \left(u_0^2 / c^2\right)}$$

Άρα, $$\vec{p}'_{ολ,αρχ.} = m0 + m\left(-\frac{2u_0}{1-\left(u_0^2/c^2\right)}\right) = -\frac{2mu_0}{1-\left(u_0^2/c^2\right)} \qquad (18\ α)$$

Μετά την κρούση, οι δύο μάζες, (που ακινητούν, ως προς το $Oxyz$), έχουν την ίδια ταχύτητα, $\vec{V}' = -\vec{V} = -\vec{u}_0$, (που έχει και το $Oxyz$), ως προς το $\left(O'x'y'z'\right)$. Άρα,

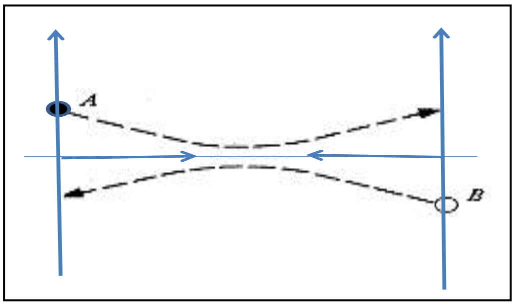
$$\vec{p}'_{ολ,τελ.} = 2m\left(-u_0\right) = -2mu_0 \qquad (18\ β)$$

Συγκρίνοντας τις (18 α) και (18 β), βλέπουμε ότι, ως προς το $\left(O'x'y'z'\right)$, η ορμή δεν διατηρείται, αν μετασχηματίζουμε τις ταχύτητες κατά Lorentz αλλά χρησιμοποιούμε την Νευτωνική έκφραση για την ορμή. Είναι φανερό ότι ένα από τα δύο πρέπει να θυσιαστεί υπέρ του άλλου, προκειμένου να εξακολουθεί να ισχύει η διατήρηση ορμής και, επειδή ο μετασχηματισμός Lorentz είναι συνεπής με το πειραματικό αποτέλεσμα του αναλλοίωτου της ταχύτητας του φωτός, πρέπει να αναζητηθεί μία άλλη έκφραση για την ορμή, η οποία να είναι συνεπής με την διατήρηση της ορμής, σε όλα τα αδρανειακά συστήματα (ως ένας φυσικός νόμος με καθολική ισχύ και, επομένως, με αναλλοίωτη μορφή μεταξύ των αδρανειακών συστημάτων) και με τους μετασχηματισμούς Lorentz για τις ταχύτητες.



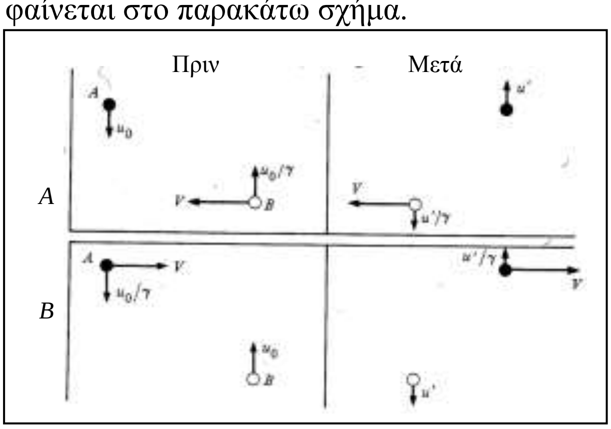
Θα επιχειρήσουμε αυτή τη γενίκευση, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα μία πλάγια ελαστική κρούση, η οποία, ως προς το σύστημα εργαστηρίου, περιγράφεται από το διπλανό σχήμα. Τα Α και Β είναι δύο ίδια σωματίδια, μάζας m το καθένα, τα οποία συγκρούονται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες, σε μία συμμετρική πορεία, ως προς το σύστημα εργαστηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θα περιγράψουμε την κρούση σε δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Το σύστημα αναφοράς-Α κινείται κατά μήκος του άξονα-x του εργαστηρίου, μαζί με το σωματίδιο-Α, άρα με την x-συνιστώσα της ταχύτητας του σωματιδίου-Α. Το σύστημα αναφοράς-Β κινείται κατά μήκος του άξονα-x του εργαστηρίου, μαζί με το σωματίδιο-Β, άρα με την x-συνιστώσα



της ταχύτητας του σωματιδίου-Β. Επειδή η κρούση είναι εντελώς συμμετρική και ελαστική, θεωρούμε ότι η x-συνιστώσα της σχετικής ταχύτητας των δύο σωματιδίων είναι ίση, κατά μέτρο, με V, και δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης, ενώ η y-συνιστώσα κάθε σωματιδίου, ως προς το «δικό του» σύστημα αναφοράς, είναι επίσης ίση κατά μέτρο με u_0 και, κατά την διάρκεια της κρούσης, μεταβάλλεται και παίρνει την τιμή u', (πάλι, ως προς το δικό του σύστημα αναφοράς).

Ως προς τα δύο παραπάνω συστήματα αναφοράς, η κίνηση των δύο σωμάτων Α και Β φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς Α και Β είναι V, η y-συνιστώσα της ταχύτητας του «άλλου» σωματιδίου, ως προς κάθε σύστημα, θα είναι, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz για τις ταχύτητες, ίση με

$$u_0/\gamma = u_o\sqrt{1-\left(V/c\right)^2} \qquad (19\ α)$$

Μετά την κρούση, αλλάζει η φορά των y-συνιστωσών των ταχυτήτων του κάθε σωματιδίου, ως προς το «δικό του» σύστημα αναφοράς, και λόγω του συμμετρικού χαρακτήρα της κρούσης, η τιμή μπορεί να είναι, (ως προς το «δικό του» σύστημα αναφοράς), διαφορετική από πριν και ίση με u΄, για κάθε σωματίδιο, οπότε, για το σύστημα αναφοράς του «άλλου» σωματιδίου, η νέα ταχύτητα μετά την κρούση είναι $u'/\gamma = u'\sqrt{1-(V/c)^2}$ (19 β)

[Τα εισαγωγικά, στις εκφράσεις: «δικό του» και «άλλο», χρησιμοποιούνται διότι τα συστήματα-αναφοράς-Α και -Β, δεν έχουν την ταχύτητα των σωματιδίων Α και Β αντίστοιχα, αλλά την x-συνιστώσα της ταχύτητας του αντίστοιχου σωματιδίου.]

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέτρο της συνολικής ταχύτητας του κάθε σωματιδίου, ως προς το «άλλο» σύστημα αναφοράς, είναι:

Πριν την κρούση: $w = \sqrt{V^2 + \dfrac{u_0^2}{\gamma^2}}$, Μετά την κρούση: $w' = \sqrt{V^2 + \dfrac{u'^2}{\gamma^2}}$ (20 α,β)

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μία κατάλληλη έκφραση για την ορμή, τέτοια ώστε η ορμή να διατηρείται ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η έκφραση αυτή θα πρέπει να είναι ανάλογη με τη ταχύτητα του σωματιδίου, (η οποία και δίνει τον διανυσματικό χαρακτήρα στην ορμή), πολλαπλασιασμένη με μία βαθμωτή συνάρτηση, που θα μπορούσε να περιέχει και την μάζα και το μέτρο της συνολικής ταχύτητας, (αφού, μάζα και μέτρο της ταχύτητας είναι τα δύο μεγέθη που προσδιορίζουν το μέτρο της ορμής), δηλ.,

$$\vec{p} = f(m,w)\vec{w}, \qquad (21)$$

Και αντίστοιχα, κατά συνιστώσες: $(p_x, p_y, p_z) = (f(m,w)w_x, f(m,w)w_y, f(m,w)w_z,)$.

Άρα, <u>διατήρηση της *x*-συνιστώσας της ορμής, ως προς το σύστημα-αναφοράς-Α</u>, (σε αυτό το σύστημα, η x-συνιστώσα της ορμής οφείλεται αποκλειστικά στο Σωματίδιο Β):

$$f(m,w)V = f(m,w')V \quad \Rightarrow \quad f(m,w) = f(m,w') \Rightarrow w = w'$$

Από την τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (20 α,β), προκύπτει $u' = u_0$.

Επίσης, <u>διατήρηση της *y*-συνιστώσας της ορμής, ως προς το σύστημα-αναφοράς-Α</u>:

$$-f(m,u_0)u_0 + f(m,w)\frac{u_0}{\gamma} = f(m,u_0)u_0 - f(m,w)\frac{u_0}{\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2f(m,w)\frac{u_0}{\gamma} = 2f(m,u_0)u_0 \Rightarrow \quad f(m,w) = \gamma f(m,u_0) \qquad (22)$$

Θα πρέπει, όμως (όπως και για τους μετασχηματισμούς Lorentz χωροχρονικών συντεταγμένων και ταχυτήτων), στο όριο $u_0 \to 0 \;\Rightarrow\; f(m,u_0) \to m_0$, όπου m_0: η Νευτωνική μάζα ηρεμίας, ενώ ισχύει επίσης: $u_0 \to 0 \;\Rightarrow\; w \to V$, οπότε, η σχέση (22), στο ίδιο όριο, μεταφράζεται: $f(m,V) = \gamma m_0 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$.

Επανερχόμενοι στη σχέση (21), γράφουμε γενικά

$$\boxed{\vec{p}(\vec{\upsilon}) = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}} \qquad (23)$$

8.6 Σχετικιστική Ενέργεια

Με τη μορφή (23) την οποία λαμβάνει η έκφραση για την ορμή, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα πρέπει να γραφεί με τη μορφή $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right\} = \vec{F}$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη σχετικιστική έκφραση για την κινητική ενέργεια η οποία αναπτύσσεται σε μία μάζα, (που έχει την τιμή m_0, όταν είναι ακίνητη), όταν εφαρμόζεται δύναμη $\vec{F}$ που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$, θα αντιμετωπίσουμε τη δύναμη ως την παράγωγο της σχετικιστικής ορμής (όπως αυτή υπολογίστηκε, σύμφωνα με την προηγούμενη έκφραση, οπότε:

$$dE_K = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right\}\cdot\vec{\upsilon}dt = \vec{\upsilon}\cdot d\left\{\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right\} =$$

$$= \vec{\upsilon}\cdot\left\{\frac{m_0 d\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - \frac{1}{2}\left(1-(\upsilon/c)^2\right)^{-3/2} d\left(-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)m_0\vec{\upsilon}\right\}$$

Εκτελώντας τα εσωτερικά γινόμενα και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$d\left(\upsilon^2\right) = d\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}\right) = \vec{\upsilon}\cdot d\left(\vec{\upsilon}\right) + d\left(\vec{\upsilon}\right)\cdot\vec{\upsilon} = 2\vec{\upsilon}\cdot d\left(\vec{\upsilon}\right)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχετικιστική μορφή της κινητικής ενέργειας

$$dE_K = \frac{m_0 d\left(\upsilon^2/2\right)}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} + \frac{\frac{m_0\upsilon^2}{c^2} d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)}{\left(1-(\upsilon/c)^2\right)^{3/2}} = \frac{\left(1-(\upsilon/c)^2\right)m_0 + m_0\left(\upsilon/c\right)^2}{\left(1-(\upsilon/c)^2\right)^{3/2}} d\left(\upsilon^2/2\right) \Rightarrow$$

$$dE_K = \frac{m_0 d\left(\upsilon^2/2\right)}{\left(1-(\upsilon/c)^2\right)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2 d\left(\upsilon^2/c^2\right)}{2\left(1-(\upsilon/c)^2\right)^{3/2}} = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\int dE_K = \int d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right) \Rightarrow E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} + C$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης C μπορεί να υπολογιστεί από την οριακή κατάσταση υ=0, η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική κινητική ενέργεια E_K=0, άρα, $C = -m_0 c^2$, και επομένως

$$\boxed{E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m_0 c^2} \tag{24}$$

Η τελευταία έκφραση γράφεται $E_K + m_0 c^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$. Ο Einstein προτείνει ότι η τελευταία σχέση, ως άθροισμα ενός όρου κινητικής ενέργειας και ενός όρου μη-κινητικής ενέργειας, δίνει την συνολική ενέργεια του σώματος μάζας m_0. Άρα, η σχετικιστική έκφραση για τη συνολική ενέργεια είναι

$$\boxed{E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}} \tag{25}$$

Στο σχετικιστικό πλαίσιο, η συνολική ενέργεια που έχει συσσωρευτεί σε ένα σώμα έχει την ενιαία μορφή της σχέσης (25) και δεν διακρίνεται σε διαφορετικές μορφές, (μηχανική, θερμική, χημική, οπτική, κ.λπ.) όπως στην κλασική περιγραφή.

Σχέση Ορμής-Ενέργειας και αναλλοίωτα μεγέθη

Συνδυάζοντας τις σχέσεις για τη σχετικιστική ορμή $\vec{p}=\dfrac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$ και για τη σχετικιστική ενέργεια $E=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, παίρνουμε

$$\frac{E^2(\upsilon)}{c^2}-p^2(\upsilon)=\frac{m_0^2c^2}{1-(\upsilon/c)^2}-\frac{m_0^2\upsilon^2}{1-(\upsilon/c)^2}\Rightarrow\boxed{\frac{E^2(\upsilon)}{c^2}-p^2(\upsilon)=m_0^2c^2=\sigma\tau\alpha\theta}. \qquad (26)$$

Και, επίσης $\boxed{E=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}$ (27)

Οι δύο τελευταίες σχέσεις αποτελούν ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Η σχέση (26) αναδεικνύει ένα ακόμη αναλλοίωτο μέγεθος, $(E/c)^2-\vec{p}^2=\sigma\tau\alpha\theta.$, κατ' αναλογία με το αναλλοίωτο $(ct)^2-\vec{r}^2=\sigma\tau\alpha\theta.$, και επομένως οδηγεί στη σκέψη για άλλο ένα 4-διανυσματικό μέγεθος, όπως το $(\vec{r},ict)$, το οποίο είναι το $(\vec{p},iE/c)$. Μπορεί, μάλιστα, να δειχθεί ότι υπάρχουν ανάλογες σχέσεις μετασχηματισμού,

$$\boxed{p_x'=\gamma\left(p_x-\beta\frac{E}{c}\right),\quad p_y'=p_y,\quad p_z'=p_z,\quad \frac{E'}{c}=\gamma\left(\frac{E'}{c}-\beta p_x\right)}$$

Η σχέση (27) δίνει μία νέα εξάρτηση Ενέργειας-Ορμής για τα σχετικιστικά σωματίδια, $E=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$, η οποία είναι διαφορετική από την αντίστοιχη σχέση των μη-σχετικιστικών, που έχει τη μορφή $E=(p^2/2m_0)$. Αυτού του είδους οι σχέσεις ονομάζονται **σχέσεις διασποράς**, και από την σχέση (27) προκύπτει ακόμη το εξής ενδιαφέρον συμπέρασμα, αν ένα σωματίδιο έχει μηδενική μάζα (m_0=0, όπως, π.χ., το φωτόνιο), τότε, η σχέση διασποράς γίνεται $E=c|\vec{p}|$. Δηλαδή, για ένα φωτόνιο θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ενέργειά του είναι αποκλειστικά κινητική ενέργεια (αφού οφείλεται αποκλειστικά στην ορμή του). Για τα φωτόνια ισχύει επίσης, (από την Κβαντομηχανική) ότι $E=\hbar\omega,\ (\hbar=h/2\pi)$ επομένως, $p=\hbar\omega/c$, σύμφωνα με την οποία, ένα φωτόνιο έχει ορμή ανάλογη της συχνότητάς του.

Με βάση τα προηγούμενα, θα μπορούσε να «αποδοθεί» στο φωτόνιο συχνότητας ω, μία **βαρυτική (**g=gravitational**) μάζα** m_g: $\hbar\omega=m_gc^2 \Rightarrow m_g=\hbar\omega/c^2$. Επομένως, όταν ένα φωτόνιο βρίσκεται μέσα σε ένα σταθερό βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση βαρύτητας g=σταθ., και σε ύψος *H* από κάποιο επίπεδο αναφοράς, η συνολική του ενέργεια, «κινητική» + «δυναμική», θα είναι σταθερή, επομένως:

$$\hbar\omega+m_ggH=\sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow \hbar d\omega+m_ggdH=0 \Rightarrow d\omega=-\frac{m_gg}{\hbar}dH$$

Αντικαθιστώντας την ισοδύναμη βαρυτική μάζα του φωτονίου στην τελευταία σχέση παίρνουμε $\dfrac{\Delta\omega}{\omega}=-\dfrac{g}{c^2}\Delta H$,

δηλαδή, για θετικά Δ*H*, έχουμε αρνητική μεταβολή συχνότητας, ή, όπως λέμε, **ερυθρά μετατόπιση**, επειδή η μείωση της συχνότητας αντιστοιχεί σε αύξηση του μήκους κύματος, άρα, μετατόπιση προς την ερυθρά περιοχή του φάσματος.

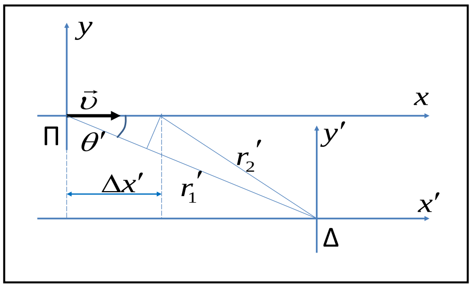
Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler

Έστω Πηγή (Π) που κινείται σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}=\upsilon\hat{x}$, ως προς τον Δέκτη (Δ), και (*Oxy*) το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η Πηγή ακινητεί, και (*O΄x΄y΄*) το σύστημα ως προς το οποίο ακινητεί ο Δέκτης.

Η Πηγή εκπέμπει παλμούς με περίοδο, ως προς το σύστημα (*Oxy*), ίση με τ_0. Η περίοδος αυτή (που αποτελεί «ιδιόχρονο» για το (*Oxy*)), φαίνεται από το (*O΄x΄y΄*) ίση με

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Η τιμή τ είναι αυτή που θα μετρούσαν, ως χρονική διαφορά γεγονότων, δύο συγχρονισμένοι παρατηρητές του (*O΄x΄y΄*), οι οποίοι θα ευρίσκονταν σε καθένα από τα σημεία εκπομπής του 1^{ου} και του 2^{ου} παλμού. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη χρονική διαφορά άφιξης των δύο παλμών στον Δέκτη, το αντίστροφο της οποίας είναι η συχνότητα που μετράει ο Δέκτης.



Έστω ότι η διεύθυνση «Πηγής»-«Δέκτη», τη χρονική στιγμή $t_1'=0$, κατά την οποία εκπέμπεται ένας παλμός από την Πηγή, σχηματίζει με τη σταθερή διεύθυνση της ταχύτητας γωνία *θ΄*, και η αντίστοιχη απόσταση είναι r_1'. Ο παλμός αυτός φτάνει στον δέκτη, κατά τη χρονική στιγμή $t_2'=r_1'/c$.

Ο 2^{ος} παλμός εκπέμπεται, ως προς το σύστημα $(O'x'y')$, τη χρονική στιγμή $t_3'=t_1'+\tau=\tau$, οπότε η Πηγή έχει μετατοπιστεί, (ως προς το $(O'x'y')$) κατά $\Delta x'=\tau\upsilon$, και απέχει από τον Δέκτη απόσταση r_2', και άρα φθάνει στον Δέκτη τη χρονική στιγμή $t_4'=\tau+(r_2'/c)$

Η χρονική απόσταση ανάμεσα στη λήψη των δύο παλμών στον Δέκτη είναι ίση με:

$$T'=t_4'-t_2'=\tau+\frac{r_2'}{c}-\frac{r_1'}{c}=\tau-\frac{r_1'-r_2'}{c}.$$

Αλλά, από το τρίγωνο με πλευρές $(r_1',r_2',\Delta x')$, έχουμε: $r_2'\simeq r_1'-\Delta x'\cos\theta'\Rightarrow r_1'-r_2'=\Delta x'\cos\theta'$. [Έχουμε χρησιμοποιήσει την προσέγγιση της μικρής γωνίας μεταξύ των (r_1',r_2'), η οποία είναι δικαιολογημένη, όταν οι αποστάσεις αυτές είναι μεγάλες και η ταχύτητα υ << c].

Άρα, αντικαθιστώντας στη σχέση για το *T΄*, παίρνουμε:

$$T'=\tau-\frac{r_1'-r_2'}{c}=\tau-\frac{\Delta x'}{c}\cos\theta'=\tau-\frac{\tau\upsilon}{c}\cos\theta'=\tau\left(1-\beta\cos\theta'\right)$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τη διαστολή χρόνου για το *τ*, έχουμε

$$T'=\tau\left(1-\beta\cos\theta'\right)=\tau_0\frac{\left(1-\beta\cos\theta'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

απ' όπου υπολογίζουμε τη σχέση συχνοτήτων

$$f'=\frac{1}{T'}=\frac{1}{\tau_0}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\beta\cos\theta'\right)}\Rightarrow\boxed{f'=f\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\beta\cos\theta'\right)}}.$$

Από τη γενική σχέση του πλάγιου φαινομένου Doppler μπορούμε να πάρουμε τις δύο υποπεριπτώσεις του εγκάρσιου και του διαμήκους φαινομένου Doppler.

Εγκάρσιο φαινόμενο Doppler:

Για $\theta' = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'_{transv} = f\sqrt{1-\beta^2}}$

Διάμηκες φαινόμενο Doppler:

Για $\theta' = [0\,\dot{\eta}\,\pi] \quad \Rightarrow \quad f' = f\,\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1\pm\beta)} = f\sqrt{\dfrac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1\pm\beta)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'_{transv} = f\sqrt{\dfrac{(1\mp\beta)}{(1\pm\beta)}}}$

Σύγκριση με το κλασικό (μη-σχετικιστικό) φαινόμενο Doppler

Οι δύο σχέσεις του σχετικιστικού φαινομένου Doppler, (εγκάρσιου και διαμήκους), θα μπορούσαν να συγκριθούν με το (κλασικό) μη-σχετικιστικό φαινόμενο Doppler. Στην περίπτωση του μη-σχετικιστικού φαινομένου Doppler θα πρέπει να επισημανθεί ότι δεν υπάρχει το φαινόμενο της διαστολής χρόνου. Επίσης, εγκάρσιο (κατ' ακρίβεια) φαινόμενο Doppler δεν παρατηρείτει, για τον εξής λόγο. Για την περίπτωση κινούμενης Πηγής, το ακριβές εγκάρσιο φιανόμενο θα έπρεπε να αφορά δύο παλμούς που εκπέμπονται σε δύο θέσεις ως προς τις οποίες ο Δέκτης βρίσκεται στη μεσοκάθετο. Άρα οι δύο διαδρομές είναι ίσες και, επειδή δεν υπάρχει εγγενής διαστολή χρόνου, δεν υπάρχει διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο ίσων διαδρομών και, άρα, δεν υπάρχει συνολική διαφορά χρόνου μεταξύ εκπομπής και λήψης. Αντίστοιχα, όταν κινείται ο Δέκτης, το ακριβές εγκάρσιο φαινόμενο Doppler θα πρέπει να αφορά δύο παλμούς που λαμβάνονται σε δύο θέσεις του Δέκτη ως προς τις οποίες η Πηγή βρίσκεται στη μεσοκάθετο, οπότε, (για τους ίδιους λόγους όπως στην περίπτωση κινούμενης Πηγής), δεν παρατηρείται μεταβολή συχνότητας.

Όσον αφορά το κλασικό (μη-σχετικιστικό) διάμηκες φαινόμενο Doppler, οι σχέσεις που το περιγράφουν είναι της μορφής $f' = f\,\dfrac{c\mp V_\Delta}{c\mp V_\Pi}$, όπου, c : η ταχύτητα του ήχου, και

$V_{\Pi\eta\gamma\eta\varsigma}$: Θετική (+) για απομάκρυνση από τον παρατηρητή

$V_{\Delta\varepsilon\kappa\tau\eta}$: Αρνητική (-) για απομάκρυνση από την πηγή

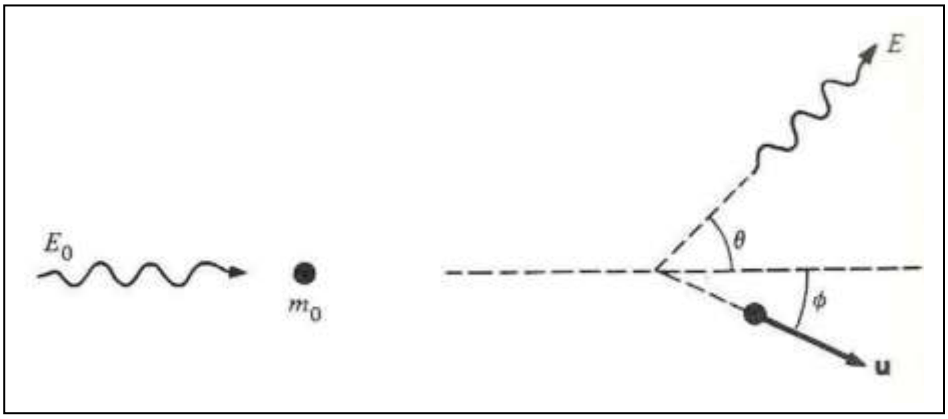
Ισοδύναμη περιγραφή του σχετικιστικού φαινομένου Doppler μπορεί να γίνει μέσω των μετασχηματισμών Ορμής-Ενέργειας κατά Lorentz, μεταξύ των δύο αδρανειακών συστημάτων. Οι μετασχηματισμοί αυτοί αφορούν την ορμή $(p = h/\lambda)$ και την ενέργεια $(E = hf)$ ενός φωτονίου που ταξιδεύει, και ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς, με την ίδια ταχύτητα $(c = f\lambda = f'\lambda')$

Το φαινόμενο *Compton*.

Όταν ένα φωτόνιο, με μήκος κύματος λ_0, (ή, ενέργεια E_0: $E_0 = \hbar\omega_0 = hc/\lambda_0$), συγκρούεται με ένα ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο, που έχει μάζα ηρεμίας m_0, τότε, με βάση τις αρχές διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της σχετικιστικής ενέργειας, προκύπτει ότι το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει διαφορετικό μήκος κύματος *λ*, που εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης: $\lambda = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$.

Ας υποθέσουμε ότι η ορμή και η ενέργεια του αρχικού φωτονίου είναι E_0/c και E_0, αντίστοιχα, ενώ το ακίνητο (ως προς το σύστημα εργαστηρίου) ηλεκτρόνιο διαθέτει μόνο ενέργεια ηρεμίας, ίση με $E_{e,o} = m_0 c^2$, και μηδενική ορμή.

Αν υποθέσουμε ότι, μετά τη διαδικασία σκέδασης, το φωτόνιο και το ηλεκτρόνιο εκτρέπονται, ως προς την αρχική διεύθυνση κίνησης του φωτονίου, σε γωνίες θ και φ, αντίστοιχα, με ενέργεια E και ταχύτητα $\vec{u}$, αντίστοιχα, (οπότε $E_e = m_o c^2 / \sqrt{1-u^2/c^2}$)



τότε οι σχέσεις διατήρησης ενέργειας,

$$E_0 + m_o c^2 = E + E_e = E + m_o c^2 / \sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (1)$$

και διατήρησης ορμής παράλληλα και κάθετα στην αρχική διεύθυνση κίνησης του φωτονίου,

$$\frac{E_0}{c} = \frac{E}{c}\cos\theta + p\cos\varphi \qquad (2)$$

$$0 = \frac{E}{c}\sin\theta - p\sin\varphi \qquad (3)$$

είναι οι σχέσεις που διέπουν την κινηματική της σκέδασης.

Επειδή σε ένα πείραμα αυτής της μορφής ανιχνεύεται το σκεδαζόμενο φωτόνιο, και συσχετίζεται το μήκος κύματος με τη γωνία παρατήρησης, θα πρέπει να απαλείψουμε, με τη βοήθεια των τριών εξισώσεων, τα μεγέθη που αφορούν το ηλεκτρόνιο. Απαλείφουμε τη γωνία φ, μεταξύ των (2) και (3)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E_0}{c} - \frac{E}{c}\cos\theta = p\cos\varphi \\ &\frac{E}{c}\sin\theta = p\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_0^2 - 2EE_0\cos\theta + E^2 = p^2c^2 = E_e^2 - \left(m_0c^2\right)^2$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με τη σχέση (1), απαλείφουμε την E_e:

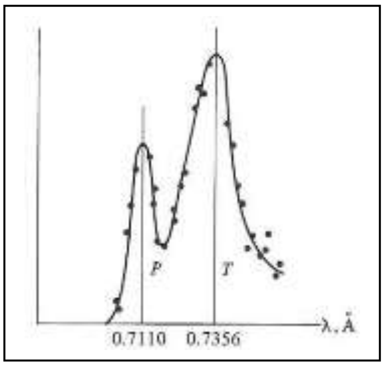
$$\left.\begin{aligned} &E_0^2 - 2EE_0\cos\theta + E^2 = E_e^2 - \left(m_0c^2\right)^2 \\ &E_0 + m_o c^2 = E + m_o c^2 / \sqrt{1-u^2/c^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{E_0}{1+\left(E_0/m_0c^2\right)\left(1-\cos\theta\right)} \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου δεν μπορεί να μηδενιστεί ποτέ, δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να απορροφηθεί πλήρως ένα φωτόνιο από ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Το συμπέρασμα αυτό, που προκύπτει από το συνδυασμό των εκφράσεων για τη διατήρηση της Σχετικιστικής ορμής και ενέργειας, θα μπορούσε να ερμηνευθεί, από την άποψη του ηλεκτρομαγνητισμού και της ηλεκτροδυναμικής, ως εξής. Η πλήρης απορρόφηση ενός φωτονίου από ένα ελεύθερο ακίνητο ηλεκτρόνιο θα είχε ως αποτέλεσμα τη μεταφορά της ορμής του φωτονίου στο ηλεκτρόνιο και, επομένως, την ανάπτυξη ταχύτητας από το ηλεκτρόνιο. Κατά το μεταβατικό στάδιο, από την ηρεμία στην κίνηση, το ηλεκτρόνιο, ως επιταχυνόμενο φορτισμένο σωματίδιο, θα ακτινοβολούσε ηλεκτρομαγνητικό κύμα, επομένως, θα εξέπεμπε ένα δευτερογενές φωτόνιο, το οποίο δεν είναι παρά το «σκεδαζόμενο φωτόνιο», στην σχετικιστική ανάλυση, το οποίο θα έχει, αναγκαστικά, κάποια πεπερασμένη ενέργεια.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $E_0 = \hbar\omega_0 = hc/\lambda_0$, και αντίστοιχα για το E, παίρνουμε

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}\left(1-\cos\theta\right)$$

Η σταθερά $\lambda_C \equiv \frac{h}{m_0 c} = 2.426\times10^{-12} m = 0.02426\,\overset{o}{A}$ είναι γνωστή και ως μήκος κύματος Compton για το ηλεκτρόνιο.



Η προηγούμενη ανάλυση αφορούσε «ελεύθερο ακίνητο» ηλεκτρόνιο. Για μία πειραματική υλοποίηση αυτής της σκέδασης, η συνθήκη «ακίνητο» μεταφράζεται σε πολύ μικρή κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, πριν την κρούση, σε σχέση με το προσπίπτον φωτόνιο, άρα θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν υψηλο-ενεργειακά φωτόνια, οπότε τα χαλαρά ηλεκτρόνια των εξωτερικών στοιβάδων των ατόμων μπορούν να θεωρηθούν, με καλή προσέγγιση, ως «ακίνητα», αφού συγκρατούνται από το άτομο, και ως «ελεύθερα», αφού η ενέργεια σύνδεσής τους με το άτομο είναι εξαιρετικά μικρή. Στο σχήμα φαίνεται η σκεδαζόμενη ένταση ακτίνων-Χ, (που αντιστοιχούν σε προσπίπτοντα φωτόνια μήκους κύματος 0.722 $\overset{o}{A}$), από έναν στόχο γραφίτη, σε γωνία $\theta = 90^o$ ως προς την αρχική διεύθυνση των ακτίνων-Χ. Η πρώτη κορυφή (P) αντιστοιχεί στις πρωτογενείς ακτίνες, ενώ η δεύτερη κορυφή αντιστοιχεί στη σκέδαση Compton.

Παράδειγμα 8.1. Ένα διαστημόπλοιο εκτοξεύει πύραυλο που κατευθύνεται προς τη γη με ταχύτητα 0.84c ως προς το διαστημόπλοιο. Παρατηρητής στη γη διαπιστώνει ότι ο πύραυλος πλησιάζει με ταχύτητα 0.36c. α) με πόση ταχύτητα κινείται το διαστημόπλοιο ως προς τη γη; Πλησιάζει ή απομακρύνεται από αυτήν; β) Αν το μήκος ηρεμίας του πυραύλου είναι Lo=2m, ποιό είναι το μήκος του όπως το μετρά ο αστροναύτης που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο και ποιό όπως το μετρά ο παρατηρητής στη γη; γ) Αν το διαστημόπλοιο εκπέμπει σήματα με συχνότητα 10^4Hz, με ποιά συχνότητα θα τα ανιχνεύει ο παρατηρητής στη γη;

4α) Μετασχηματισμός διαμήκους ταχύτητας: $u'_x = \dfrac{u_x - V}{1-\dfrac{u_x V}{c^2}}$,

όπου: u_x:ταχύτητα πυραύλου ως προς τη ΓΗ (θεωρούμενη ως «ακίνητο» σύστημα αναφοράς), και : u'_x:ταχύτητα πυραύλου ως προς τη ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΟ (θεωρούμενο ως «κινούμενο» σύστημα αναφοράς),

u_x=0.36 c, u'_x=0.84 c,

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1-\frac{u_x V}{c^2}} \Rightarrow u'\left(1-\frac{u_x V}{c^2}\right) = u_x - V \Rightarrow \boxed{V = \frac{\left(u'_x - u_x\right)c^2}{u'_x u_x - c^2}} = \frac{0.48c^3}{\left(0.302-1\right)c^2} \Rightarrow \boxed{V = -0.688c}$$

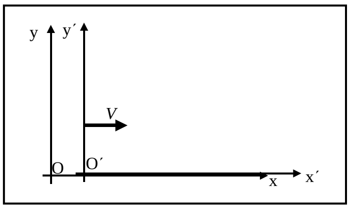
β)

$$\left(L_{\pi\upsilon\rho\beta\lambda}\right)_{\text{ΔΙΑΣΤΜΠΛ}} = L_0\left(\sqrt{1-(0.84)^2}\right) = 0.54L_0$$

$$\left(L_{\pi\upsilon\rho\beta\lambda}\right)_{\text{ΓΗ}} = L_0\left(\sqrt{1-(0.36)^2}\right) = 0.93L_0$$

γ) Η πηγή απομακρύνεται, με β=0.688 : $\nu' = \nu\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \boxed{\nu' = 0.43\nu}$

Παράδειγμα 8.2 Δύο ίδια διαστημόπλοια Α και Β κινούνται αντιμέτωπα, κατά μήκος του άξονα x, με ίσες και αντίθετες ταχύτητες υ=c/4, ως προς αδρανειακό εργαστηριακό παρατηρητή Π. Την χρονική στιγμή $t_0=0$, ως προς τον παρατηρητή Π, τα πλησιέστερα άκρα των δύο διαστημοπλοίων βρίσκονται, ως προς τον Π, στα σημεία $x_{A,0}=0$ και $x_{B,0}=L_0$, αντίστοιχα, και από το μέτωπο του διαστημοπλοίου Α εκτοξεύεται, προς το Β, πύραυλος με σχετική, **ως προς το Α**, ταχύτητα u=c/2, (Γεγονός E_0). Η εκτόξευση του πυραύλου συνοδεύεται από εκπομπή φωτός. Θεωρούμε Γεγονός E_1 την άφιξη αυτού του φωτός στο διαστημόπλοιο Β. α) Υπολογίστε τη θέση x και το χρόνο t των δύο παραπάνω γεγονότων (E_0 και E_1) για το σύστημα του παρατηρητή Π , καθώς και για το σύστημα καθενός από τα διαστημόπλοια, υποθέτοντας ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$, ως προς Π, τα τρία συστήματα αναφοράς (Π, Α, Β) έχουν μηδενικό χρόνο και οι αρχές τους συμπίπτουν.



β) Αν, κατά τη στιγμή που το διαστημόπλοιο Β αντιλαμβάνεται το φως, εκτοξεύει προς τον Α δικό του πύραυλο με ταχύτητα και πάλι c/2 **ως προς το Β**, υπολογίστε την ταχύτητα κάθε πυραύλου ως προς τον παρατηρητή Π (σημειώνοντας και το σχετικό πρόσημο).

γ) Τέλος, θεωρούμε γεγονός E_3 τη σύγκρουση των δύο πυραύλων. Υπολογίστε τη θέση και το χρόνο t αυτού του γεγονότος για το σύστημα του παρατηρητή Π , καθώς και για το σύστημα καθενός από τα διαστημόπλοια

Μετασχηματισμοί Lorentz $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(1/16\right)}} = \dfrac{4}{\sqrt{15}}$

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right), \qquad t' = \gamma\left(t - (V/c^2)x\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad u_{/O'} = \frac{u_{/O} - V}{1 - (Vu_{/O})/c^2}$$

Γεγονός E_0 : Εκτόξευση Πυραύλου από Α

$$E_0 \equiv \left(x_0 = 0, \quad t_0 = 0\right)$$

$$E_0' = \begin{cases} x_0' = \gamma(x_0 - Vt_0) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(0-0\right) = 0 \\ t_o' = \gamma\left(t_0 - (V/c^2)\, x_0\right) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(0-0\right) = 0 \end{cases}$$

$$E_0'' = \begin{cases} x_0'' = \gamma(x_0 + Vt_0) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(0+0\right) = 0 \\ t_o'' = \gamma\left(t_0 + (V/c^2)\, x_0\right) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(0+0\right) = 0 \end{cases}$$

Γεγονός E_1 : Άφειξη Φωτός στον Β + Εκτόξευση Πυραύλου από Β προς Α

$$E_1 \equiv \left(x_1, \quad t_1\right), \qquad t_1 c + \frac{c}{4} t_1 = L_0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{4}{5}\frac{L_0}{c}} \qquad c = \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{4}{5} L_0}$$

$$E_1' = \begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - Vt_1) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{4}{5}L_0 - \dfrac{c}{4}\dfrac{4}{5}\dfrac{L_0}{c}\right) \Rightarrow \boxed{x_1' = \dfrac{12}{5\sqrt{15}}L_0} \\ t_1' = \gamma\left(t_1 - (V/c^2)\,x_1\right) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{4}{5}\dfrac{L_0}{c} - \dfrac{c}{4c^2}\dfrac{5}{4}L_0\right) \Rightarrow \boxed{t_1' = \dfrac{12}{5\sqrt{15}}\dfrac{L_0}{c}} \end{cases}$$

$$E_1'' = \begin{cases} x_1'' = \gamma(x_1 + Vt_1) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{4}{5}L_0 + \dfrac{c}{4}\dfrac{4}{5}\dfrac{L_0}{c}\right) \Rightarrow \boxed{x_1'' = \dfrac{4}{\sqrt{15}}L_0} \\ t_1'' = \gamma\left(t_1 + (V/c^2)\,x_1\right) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{4}{5}\dfrac{L_0}{c} + \dfrac{c}{4c^2}\dfrac{5}{4}L_0\right) \Rightarrow \boxed{t_1'' = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\dfrac{L_0}{c}} \end{cases}$$

$$u_{/O'} = \frac{u_{/O} - V}{1 - {(Vu_{/O})}/{c^2}} \Rightarrow u_{/O} = \frac{u'_{/O} + V}{1 + {(Vu'_{/O})}/{c^2}}$$

$$\boxed{u_{\Pi\rho\beta\lambda,A} = u_{\Pi\rho\beta\lambda,B} = \frac{2}{3}c}$$

Γεγονός E_2 : Σύγκρουση Πυραύλων, $E_2 \equiv (x_2, t_2)$

(Κίνηση Πυραύλου Α, κατά t_1) + 2×(Κίνηση Πυραύλων [είτε Α είτε Β] κατά (t_2-t_1))=(4/5)L_0 , (βλέπε ερ. (α))

$$\frac{2}{3}ct_1 + 2\times\frac{2}{3}c\left(t_2 - t_1\right) = \frac{4}{5}L_0 \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{L_0}{c}}$$

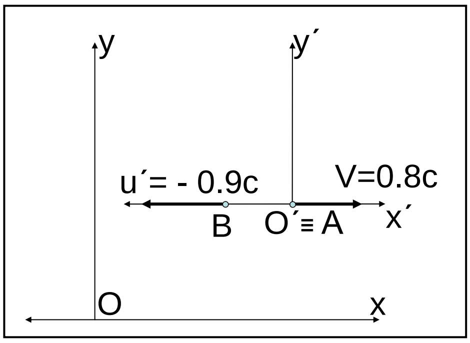
$$x_2 = \frac{2}{3}ct_2 = \frac{2}{3}c\frac{L_0}{c} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2}{3}L_0}$$

$$E_2 \equiv \left(x_2 = \frac{2}{3}L_0,\quad t_2 = \frac{L_0}{c}\right)$$

$$E_2' = \begin{cases} x_2' = \gamma(x_2 - Vt_2) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{2}{3}L_0 - \dfrac{c}{4}\dfrac{L_0}{c}\right) \Rightarrow \boxed{x_2' = \dfrac{5}{3\sqrt{15}}L_0} \\ t_2' = \gamma\left(t_2 - (V/c^2)\,x_2\right) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{L_0}{c} - \dfrac{c}{4c^2}\dfrac{2}{3}L_0\right) \Rightarrow \boxed{t_2' = \dfrac{10}{3\sqrt{15}}\dfrac{L_0}{c}} \end{cases}$$

$$E_2'' = \begin{cases} x_2'' = \gamma(x_2 + Vt_2) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{2}{3}L_0 + \dfrac{c}{4}\dfrac{L_0}{c}\right) \Rightarrow \boxed{x_2'' = \dfrac{11}{3\sqrt{15}}L_0} \\ t_2'' = \gamma\left(t_2 + (V/c^2)\,x_2\right) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}\left(\dfrac{L_0}{c} + \dfrac{c}{4c^2}\dfrac{2}{3}L_0\right) \Rightarrow \boxed{t_2'' = \dfrac{14}{3\sqrt{15}}\dfrac{L_0}{c}} \end{cases}$$

Παράδειγμα 8.3 Δύο σωματίδια Α και Β δημιουργούνται σε έναν επιταχυντή υψηλών ενεργειών και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Η ταχύτητα του σωματιδίου Α, μετρούμενη στο σύστημα εργαστηρίου, είναι 0,8c, ενώ η ταχύτητα του σωματιδίου Β ως προς το Α είναι 0,9c.α) Ποιά είναι η ταχύτητα του σωματιδίου Β ως προς το σύστημα εργαστηρίου; β) Αν το σωματίδιο Β έχει χρόνο (ημι)ζωής, στο δικό του σύστημα αναφοράς, ίσο με 10 ns, πόσο διάστημα θα διανύσει στο εργαστήριο πριν εξαφανιστεί;



α) Θεωρούμε ως «ακίνητο» σύστημα το σύστημα εργαστηρίου.
Αν θεωρήσουμες ως «κινούμενο» σύστημα, το σωματίδιο Α, οπότε V=0.8c,

τότε το Β, ως προς Α, έχει ταχύτητα $u_x{}'= -0.9$ c,
και, ως προς το εργαστήριο, έχει ταχύτητα u_x=;

οπότε:

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} \Rightarrow u_x'\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right) = u_x - V \Rightarrow u_x = \frac{u_x' + V}{1 + \frac{u_x' V}{c^2}}$$

Αντικαθιστώντας τα V και $u_x{}'$, υπολογίζουμε την ταχύτητα u_x του σωματιδίου Β, <u>ως προς το εργαστήριο</u> :

$$u_x = \frac{-0.9c + 0.8c}{1 + (-0.9)(0.8)} = -\frac{-0.1c}{0.28} \Rightarrow \boxed{u_x = -\frac{c}{2.8} = -0.357c}$$

β) Ο χρόνος (ημι)ζωής του Β, τ_0=10ns, (στο δικό του σύστημα αναφοράς), φαίνεται, <u>ως προς το εργαστήριο</u>, να έχει διασταλεί στον :

$$\tau = \tau_0\gamma = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\left(u_x/c\right)^2}} = \frac{10ns}{\sqrt{1-(-0.357)^2}} = \frac{10ns}{\sqrt{1-0.127}} = \frac{10ns}{\sqrt{0.8726}} = \frac{10ns}{0.934} \Rightarrow \boxed{\tau = 10.71ns}$$

Οπότε, το διάστημα που διανύεται, <u>ως προς το εργαστήριο</u>, είναι :

$$L = u_x\tau = u_x\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\left(u_x/c\right)^2}} = \left(0.357\times 3\times 10^8\frac{m}{s}\right)\times\left(10.71\times 10^{-9}s\right) \Rightarrow \boxed{L = 1.147m}$$

Παράδειγμα 8.4 Ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει από τον Ήλιο προς τον Κρόνο με ταχύτητα $c/2$ ως προς τον Ήλιο. Αν η απόσταση του Κρόνου από τον Ήλιο είναι 1.43x 10^{12} m, να υπολογίσετε τη διάρκεια του ταξιδιού όπως θα μετρηθεί **α)** από ένα παρατηρητή στη Γη (που θεωρείται ακίνητη ως προς τον Ήλιο) και **β)** από τον αστροναύτη που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο. Ποια είναι η απόσταση Ήλιου-Κρόνου στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου.
γ) Κάποια στιγμή εκτοξεύεται από το διαστημόπλοιο αντικείμενο αμελητέας μάζας με ταχύτητα μέτρου $c/3$ ως προς αυτό και σε κατεύθυνση κάθετη στην ευθεία κίνησης που ενώνει τον Ήλιο με τον Κρόνο. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας και ποια η κατεύθυνση κίνησης του αντικειμένου όπως τη μετρά ο παρατηρητής στη Γη.

Έστω S το αδρανειακό σύστημα «Ηλιος-Κρόνος» και S´ το αδρανειακό σύστημα του διαστημοπλοίου, το οποίο κινείται με ταχύτητα V=c/2 ως προς το S.

(α) Στο S: $\Delta t = \frac{\Delta x}{V} = \frac{1.43\times 10^{12}m}{c/2} = 2\frac{1.43\times 10^{12}m}{3\times 10^8 m/s} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 9533s}$

(β) Στο S´: η σχετική ταχύτητα V έχει την ίδια τιμή όπως υπολογίζεται με βάση τις τιμές μήκους – χρόνου στο S´, άρα :

$$V=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\Delta x}{\Delta t'}\Rightarrow \Delta t'=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\Delta x}{V}=\sqrt{1-\beta^2}\Delta t=\sqrt{1-1/4}\Delta t\Rightarrow \boxed{\Delta t'=\sqrt{3}/2\;\Delta t=8256\,s}$$

Επομένως, και : $\Delta x'=\sqrt{1-\beta^2}\Delta x=\sqrt{1-1/4}\,\Delta x\Rightarrow \boxed{\Delta x'=\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x=1.24\times10^{12}m}$

(γ) S΄: $\upsilon'_x=0,\qquad \upsilon'_y=c/3,\qquad V=c/2$

S : $\upsilon_x=\dfrac{\upsilon'_x+V}{1+\dfrac{\upsilon'_xV}{c^2}}=\dfrac{0+V}{1+0}=V\Rightarrow \boxed{\upsilon_x=c/2}$

$$\upsilon_y=\frac{\upsilon'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{\upsilon'_xV}{c^2}}=\frac{c/3}{1+0}\sqrt{1-1/4}\Rightarrow \boxed{\upsilon_y=\frac{c}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{2\sqrt{3}}}$$

και $\quad \upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}\sqrt{c^2/4+c^2/12}\Rightarrow \boxed{\upsilon=\frac{c}{\sqrt{3}}}$, $\tan\theta=\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=\dfrac{c/2\sqrt{3}}{c/2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \boxed{\theta=30^o}$

Παράδειγμα 8.5 Προϋπόθεση υπό την οποία, δύο γεγονότα μπορούν να παρατηρηθούν ως ταυτόχρονα, ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σε ένα αδρανειακό εργαστηριακό σύστημα $(Oxyz)$, εκπέμπονται, κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, ένας φωτεινός παλμός χρώματος κόκκινου, από μία πηγή που βρίσκεται στο σημείο $x=0$, και ένας φωτεινός παλμός χρώματος μπλε, από μία πηγή που βρίσκεται στο σημείο $x=2.5x_0$. Ως Γεγονός-1 ορίζουμε την λήψη του κόκκινου παλμού από έναν δέκτη που βρίσκεται ακίνητος στο σημείο $x_1=x_0$, και ως Γεγονός-2 ορίζουμε την λήψη του μπλε παλμού από έναν δέκτη που βρίσκεται ακίνητος στο σημείο $x_2=2x_0$. (α) Να υπολογιστούν οι χρονικές συντεταγμένες των δύο Γεγονότων (1 και 2) ως προς το εργαστηριακό σύστημα $(Oxyz)$. (β) Να υπολογιστούν οι χωρο-χρονικές συντεταγμένες των δύο Γεγονότων (1 και 2) ως προς αδρανειακό σύστημα $(O'x'y'z')$ που κινείται με ταχύτητα $\vec{V}=V\hat{x}$, ως προς το εργαστήριο, έτσι ώστε οι αντίστοιχοι άξονές τους να είναι παράλληλοι και οι αρχές του Ο και Ο΄ να συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t=t'=0$. (γ) Να υπολογιστεί η ταχύτητα V έτσι ώστε τα δύο Γεγονότα (1 και 2) να είναι ταυτόχρονα ως προς το $(O'x'y'z')$. Ποια είναι η αντίστοιχη χωρική τους απόσταση. (δ) Ποιες είναι οι χωρο-χρονικές συντεταγμένες για την εκπομπή των δύο παλμών, ως προς το $(O'x'y'z')$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Χρονικές συντεταγμένες των γεγονότων Γ-1 και Γ-2, ως προς το $(Oxyz)$.

Επειδή και οι δύο παλμοί, ξεκινάνε ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t=0$, και διαδίδονται με την ταχύτητα c του φωτός, διανύοντας, ο πρώτος (κόκκινος) απόσταση $\Delta x_1=x_0-0=x_0$ και ο δεύτερος (μπλε) απόσταση $\Delta x_2=2.5x_0-2x_0=x_0/2$, άρα καταγράφονται τις χρονικές στιγμές: $\qquad t_1=\dfrac{x_0}{c},\qquad t_2=\dfrac{x_0}{2c}$

Άρα: Γ-1: $(x_1,t_1)\equiv\left(x_0,\dfrac{x_0}{c}\right)$, $\qquad$ Γ-2: $(x_2,t_2)\equiv\left(2x_0,\dfrac{x_0}{2c}\right)$

(β) Χωρο-χρονικές συντεταγμένες των Γ-1 και Γ-2, ως προς $(O'x'y'z')$:

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - Vt_1\right) = \gamma\left(x_0 - \beta x_0\right) = \gamma\left(1-\beta\right)x_0, \qquad t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2}\right) = \gamma\left(\frac{x_0}{c} - \beta\frac{x_0}{c}\right) = \gamma\left(1-\beta\right)\frac{x_0}{c}$$

$$x_2' = \gamma\left(x_2 - Vt_2\right) = \gamma\left(2x_0 - \beta\frac{x_0}{2}\right) = \gamma\left(4-\beta\right)\frac{x_0}{2}, \quad t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}\right) = \gamma\left(\frac{x_0}{2c} - 2\beta\frac{x_0}{c}\right) = \gamma\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)\frac{x_0}{c}$$

(γ) Προκειμένου τα δύο Γ-1 και Γ-2 να είναι ταυτόχρονα ως προς το $(O'x'y'z')$, πρέπει:

$$\Delta t' \equiv t_1' - t_2' = 0, \qquad t_1' = \gamma\left(1-\beta\right)\frac{x_0}{c}, \qquad t_2' = \gamma\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)\frac{x_0}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma\left(1-\beta\right)\frac{x_0}{c} = \gamma\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)\frac{x_0}{c} \;\Rightarrow\; \left(1-\beta\right) = \left(\frac{1}{2} - 2\beta\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow V = -\frac{c}{2}}$$

Τότε, η χωρική απόσταση των δύο γεγονότων, ως προς το $(O'x'y'z')$, υπολογίζεται

$$\Delta x' \equiv x_2' - x_1', \qquad x_1' = \gamma\left(1-\beta\right)x_0, \qquad x_2' = \gamma\left(4-\beta\right)\frac{x_0}{2},$$

$$x_2' - x_1' = \gamma\left(4-\beta\right)\frac{x_0}{2} - \gamma\left(1-\beta\right)x_0 = \gamma x_0\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta x' \equiv x_2' - x_1' = \frac{3}{4}\gamma x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma x_0 \neq \gamma x_0}$$

<u>Σχόλιο:</u>

Βλέπουμε ότι όσον αφορά στα δύο συγκεκριμένα γεγονότα, (Γ-1 και Γ-2), (τα οποία, ως προς το $(Oxyz)$, δεν είναι ταυτόχρονα), υπάρχει αδρανειακό σύστημα $(O'x'y'z')$, το οποίο κινείται με ταχύτητα αποδεκτή στο πλαίσιο της Ειδικής Σχετικότητας $\left(\left|\vec{V}\right| < c\right)$, για το οποίο τα δύο αυτά γεγονότα καταγράφονται ταυτόχρονα. Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, αλλά εξαρτάται από τη σχέση των μεγεθών Δx και $c\Delta t$ σε κάποιο αδρανειακό σύστημα. Επειδή δείξαμε σε προηγούμενες παραγράφους (βλ. 8.3, «Αναλλοίωτο "διάστημα" και 4-διανύσματα») ότι ισχύει $r^2 - (ct)^2 = r'^2 - (ct')^2$, συμπεραίνουμε ότι και το $\left(\Delta x\right)^2 - \left(c\Delta t\right)^2 = \left(\Delta x'\right)^2 - \left(c\Delta t'\right)^2$ είναι επίσης αναλλοίωτο μέγεθος, σε μετασχηματισμούς Lorentz, όπου Δx και Δt η χωρική και η χρονική απόσταση δύο γεγονότων, στα αντίστοιχα συστήματα αναφοράς. Αν σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ισχύει $\left(\Delta x\right)^2 - \left(c\Delta t\right)^2 < 0$, τότε, επειδή, σύμφωνα με τα προηγούμενα, αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει, ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει σύστημα ως προς το οποίο τα δύο γεγονότα να είναι ταυτόχρονα $(\Delta t = 0)$, διότι θα έπρεπε, σε αυτό το σύστημα, να ισχύει $\left(\Delta x\right)^2 - \left(c\Delta t\right)^2 = \left(\Delta x\right)^2 < 0$, που είναι άτοπο. Άρα, η ύπαρξη συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο μπορούν να καταγραφούν δύο γεγονότα ως ταυτόχρονα, προϋποθέτει ότι θα πρέπει, για την χωρική και την χρονική απόσταση των δύο γεγονότων να ισχύει $\left(\Delta x\right)^2 - \left(c\Delta t\right)^2 \geq 0$, που ισοδυναμεί με τη σχέση $\Delta x / \Delta t \geq c$. Αν αγνοήσουμε την τετριμμένη περίπτωση του «=», που αντιστοιχεί είτε σε ένα γεγονός $(\Delta x = 0, \Delta t = 0)$, είτε σε γεγονότα που έχουν σχέση με την διάδοση του φωτός, όλα τα άλλα ζεύγη γεγονότων που επιτρέπεται να καταγραφούν ως ταυτόχρονα σε κάποιο σύστημα αναφοράς, θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $\Delta x / \Delta t > c$, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να συνδέονται με σχέση αιτίου-αποτελέσματος, αφού, σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε η αλληλεπίδραση που συνδέει τα δύο γεγονότα ως αίτιο και αποτέλεσμα, να καλύψει την μεταξύ τους απόσταση Δx σε χρονικό διάστημα Δt, που αντιστοιχεί σε ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός (δ) Οι χωρο-χρονικές συντεταγμένες για την εκπομπή των δύο παλμών, ως προς το $(O'x'y'z')$, υπολογίζονται με βάση τις αντίστοιχες χωρο-χρονικές συντεταγμένες, ως προς το $(Oxyz)$.

Ας ονομάσουμε τα δύο αυτά γεγονότα Γ-3 και Γ-4, (αν και προηγούνται των Γ-1 και Γ-2), ως προς το $(Oxyz)$:

$$\Gamma\text{-3 } \left(x_3 = 0, \quad t_3 = 0\right), \text{ και } \Gamma\text{-4 } \left(x_4 = \frac{5}{2}x_0, \quad t_4 = 0\right)$$

Χωρο-χρονικές συντεταγμένες των Γ-3 και Γ-4, ως προς $(O'x'y'z')$:

$$x_3' = \gamma\left(x_3 - Vt_3\right) = \gamma\left(0 - \beta 0\right) = 0, \qquad t_3' = \gamma\left(t_3 - \frac{Vx_3}{c^2}\right) = \gamma\left(0 - \beta\frac{0}{c}\right) = 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συνέπεια με την παραδοχή ότι η εκπομπή του κόκκινου παλμού (Γεγονός Γ-3) γίνεται, όταν συμπίπτουν οι δύο αρχές Ο και Ο΄, από το κοινό αυτό σημείο και τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται ο χρόνος και για τα δύο συστήματα.

$$x_4' = \gamma\left(x_4 - Vt_4\right) = \gamma\left(\frac{5}{2}x_0 - V0\right) = \frac{5}{2}\gamma x_0, \quad t_4' = \gamma\left(t_4 - \frac{Vx_4}{c^2}\right) = \gamma\left(0 - \frac{V}{c^2}\frac{5}{2}x_0\right) = -\frac{5}{2}\gamma x_0\frac{\beta}{c}$$

Παράδειγμα 8.6 Ένα διαστημόπλοιο κινείται πλησιάζοντας τη Γη, (η οποία θεωρείται αδρανειακό σύστημα αναφοράς), με ταχύτητα $V = 0.06c$. Τη στιγμή που το διαστημόπλοιο διέρχεται από ένα διαστημικό Σταθμό, ο σταθμός εκπέμπει ένα ραδιο-σήμα το οποίο λαμβάνεται από τη Γη μετά από ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = 9.6s$, (σύμφωνα με τη Γήινη παρατήρηση). (α) Να βρεθεί ο απαιτούμενος χρόνος $\Delta\tau$ μέχρι το διαστημόπλοιο να διανύσει την απόσταση «Σταθμός-Γη», όπως μετράται σύμφωνα με το αδρανειακό σύστημα της Γης. (β) Να βρεθεί ο αντίστοιχος χρόνος που μετράται από το πλήρωμα του διαστημοπλοίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Σύμφωνα με το αδρανειακό σύστημα της Γης, η απόσταση «Σταθμός-Γη» είναι ίση με $L_0 = c\Delta t$, και διανύεται από το διαστημόπλοιο, μέσα σε χρονικό διάστημα $\Delta\tau$, με ταχύτητα $V = 0.06c$, άρα:

$$V = \frac{L_0}{\Delta\tau} \Rightarrow \Delta\tau = \frac{L_0}{V} = \frac{c}{V}\Delta t = \frac{9.6s}{0.06} \Rightarrow \boxed{\Delta\tau = 160s}$$

Η απόσταση «Σταθμός-Γη», $L_0 = c\Delta t$, είναι ένα «χαρακτηριστικό μήκος» (ιδιομήκος, proper-length) για το αδρανειακό σύστημα της Γης, δεδομένου ότι τα δύο άκρα του διαστήματος αυτού ακινητούν ως προς τη Γη.

(β) Ο αντίστοιχος χρόνος, που μετράται από το πλήρωμα το διαστημοπλοίου, μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους

(β1) Επειδή το ζητούμενο χρονικό διάστημα αφορά δύο γεγονότα τα οποία έχουν καταγραφεί στο ίδιο σημείο του διαστημοπλοίου (π.χ., στην θέση του χειριστή-αστροναύτη), δηλ., τα γεγονότα, «Συνάντηση με τον διερχόμενο Σταθμό» και «Συνάντηση με τη διερχόμενη Γη», είναι «χαρακτηριστικός χρόνος» (ιδιόχρονος, proper-time) $\Delta\tau_0$, άρα:

$$\Delta\tau_0 = \Delta\tau/\gamma = \Delta\tau\sqrt{1 - \left(0.06\right)^2} \Rightarrow \boxed{\Delta\tau_0 \approx \Delta\tau \times 0.9982}$$

(β2) Ο χειριστής-αστροναύτης βλέπει τον Σταθμό και την Γη να διέρχονται με ταχύτητα μέτρου $V = 0.06c$, αλλά η απόσταση «Σταθμός-Γη» δεν είναι πλέον ίση με το ιδιομήκος (αφού και τα δύο άκρα κινούνται ως προς αυτό, άρα $L = L_0/\gamma$, οπότε το αντίστοιχο χρονικό διάστημα διέλευσης υα είναι $\Delta\tau_0 = \dfrac{L}{V} = \dfrac{L_0}{\gamma V} = \dfrac{\Delta\tau}{\gamma}$

Παράδειγμα 8.7 Δύο διαστημόπλοια ίδιου χαρακτηριστικού μήκους $L_{01} = L_{02} = L_0 = 100m$, κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις, πλησιάζοντας το ένα το άλλο. Ο αστροναύτης του ενός διαστημοπλοίου μετρά χρονικό διάστημα $2{,}5\times10^{-6}s$, όσο διαρκεί η διέλευση του άλλου διαστημοπλοίου από μπροστά του. (α) Ποια είναι η σχετική ταχύτητα των δύο διαστημοπλοίων ; (β) Πόσο χρονικό διάστημα μετρά το 1ο διαστημόπλοιο μέχρις ότου η κορυφή του 2^{ου} διαστημοπλοίου περάσει από την κορυφή και το πέρας του 1^{ου} ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Το κάθε διαστημόπλοιο αποδίδει στο άλλο ένα μήκος $L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-(V/c)^2}$, όπου V είναι η σχετική ταχύτητα των δύο διαστημοπλοίων.

Η διέλευση του ενός διαστημοπλοίου από το άλλο διαρκεί

$$\Delta\tau_0 = \frac{L}{V} \Rightarrow L_0\sqrt{1-(V/c)^2} = V\Delta\tau_0 \quad \Rightarrow V^2 = \frac{L_0^2}{\Delta\tau_0^2 + (L_0/c)^2} \Rightarrow \quad \boxed{V = \sqrt{\frac{L_0^2}{\Delta\tau_0^2 + (L_0/c)^2}}}$$

Ο χρόνος $2{,}5\times10^{-6}s$ είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος διότι καταγράφεται στο ίδιο σημείο του ενός διαστημοπλοίου

(β) Πόσο χρονικό διάστημα μετρά το 1ο διαστημόπλοιο μέχρις ότου η κορυφή του 2^{ου} διαστημοπλοίου περάσει από την κορυφή και το πέρας του 1^{ου};

Το 1^{ο} διαστημόπλοιο παρατηρεί ένα σημείο (π.χ., την κορυφή του 2^{ου} διαστημόπλοιου) να διέρχεται, με σχετική ταχύτητα V από δύο σταθερά σημεία (κορυφή και πέρας) του δικού του αδρανειακού συστήματος, τα οποία, επομένως, απέχουν απόσταση ίση με το χαρακτηριστικό του μήκος, άρα η διέλευση διαρκεί $\Delta\tau = \dfrac{L_0}{V}$, όπου αντικαθιστούμε την ταχύτητα που προκύπτει από το (α) ερώτημα.

Παράδειγμα 8.8 Φωτόνιο εκπέμπεται, (με ταχύτητα c), υπό γωνία θ΄ ως προς τον άξονα x΄ ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = -V\hat{x}'$, ως προς το πρώτο , με τους άξονές τους παράλληλους και με τις αρχές τους να συμπίπτουν κατά την χρονική στιγμή, $t = t' = 0$, που εκπέμπεται το φωτόνιο. (α) Να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα του φωτονίου, ως προς το δεύτερο αδρανειακό σύστημα είναι επίσης ίση με c. (β) Να υπολογισθεί η γωνία εκπομπής του φωτονίου, ως προς το δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}}, \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}\right)}, \qquad u'_x = c\cos\theta', \qquad u'_y = c\sin\theta', \qquad u'^2_x + u'^2_y = c^2$$

$$u_x = \frac{c\cos\theta' + V}{1 + \dfrac{c\cos\theta'_x V}{c^2}} = \frac{c\cos\theta' + V}{1+\beta\cos\theta'}, \qquad u_y = \frac{c\sin\theta'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{\cos\theta'_x V}{c^2}\right)} = \frac{c\sin\theta' + V}{\gamma\left(1+\beta\cos\theta'\right)},$$

(α)

$$u_x^2+u_y^2=\left(\frac{c\cos\theta'+V}{1+\beta\cos\theta'}\right)^2+\left(\frac{c\sin\theta'}{\gamma\left(1+\beta\cos\theta'\right)}\right)^2=\frac{1}{\left(1+\beta\cos\theta'\right)^2}\left[\left(c\cos\theta'+V\right)^2+\left(\frac{c\sin\theta'}{\gamma}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1+\beta\cos\theta'\right)^2}\left[\left(c\cos\theta'\right)^2+V^2+2Vc\cos\theta'+\left(c\sin\theta'\right)^2\left(1-\beta^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1+\beta\cos\theta'\right)^2}\left[\left(c\cos\theta'\right)^2+V^2+2Vc\cos\theta'+\left(c\sin\theta'\right)^2-\beta^2\left(c\sin\theta'\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1+\beta\cos\theta'\right)^2}\left[c^2\left(1+\beta\cos\theta'\right)^2\right]=c^2$$

(β)

$$\tan\theta=\frac{u_y}{u_x}=\left(\frac{c\sin\theta'+V}{\gamma\left(1+\beta\cos\theta'\right)}\right)\Bigg/\left(\frac{c\cos\theta'+V}{1+\beta\cos\theta'}\right)=\frac{c\sin\theta'}{\gamma\left(c\cos\theta'+V\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{c\sin\theta'}{\gamma\left(c\cos\theta'+V\right)}=\frac{\tan\theta'}{\gamma\left(1+\beta/\cos\theta'\right)}}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι γνωστό και ως αποπλάνηση του φωτός.

Παράδειγμα 8.9 Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς $\left(Oxyz\right)$ και $\left(O'x'y'z'\right)$ με τους αντίστοιχους άξονες παράλληλους κινούνται έτσι ώστε το $\left(O'x'y'z'\right)$ να έχει σχετική ταχύτητα $\vec{V}=V\hat{x}$, ως προς το $\left(Oxyz\right)$ και, κατά τη χρονική στιγμή $t=t'=0$ να συμπίπτουν οι αρχές τους. Την ίδια χρονική στιγμή $t=t'=0$ εκπέμπεται από το O ηλεκτρομαγνητικό σήμα το οποίο ενεργοποιεί («ανάβει») δύο φωτεινές πηγές οι οποίες βρίσκονται στα σημεία $\left(-L,0,0\right)$ και $\left(+L,0,0\right)$ του συστήματος αναφοράς $\left(Oxyz\right)$. Να περιγραφεί η εξέλιξη του φαινομένου (εκπομπή Η/Μ σήματος – άφιξη Η/Μ σήματος στις φωτεινές πηγές – άφιξη του φωτός που εκπέμπουν οι φωτεινές πηγές στον παρατηρητή) ως προς τους παρατηρητές O και O'.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γεγονός 1: εκπομπή Η/Μ σήματος

$\Gamma 1: x_1=0, t_1=0$

$\Gamma 1': x_1'=0, t_1'=0$

Γεγονός 2: Άναμμα αριστερής πηγής (= άφιξη Η/Μ σήματος στην αριστερή πηγή)

$$\Gamma 2:\quad x_2=-L,\quad t_2=\frac{L}{c}$$

$$\Gamma 2':\quad x_2'=\gamma\left(x_2-Vt_2\right)=-\gamma L\left(1+\frac{V}{c}\right)$$

$$t_2'=\gamma\left(t_2-\frac{V}{c^2}x_2\right)=\gamma\frac{L}{c}\left(1+\frac{V}{c}\right)$$

Άρα: $c_2'=\dfrac{x_2'}{t_2'}=-c$

Γεγονός 3: Άναμμα δεξιάς πηγής (= άφιξη Η/Μ σήματος στη δεξιά πηγή)

$$\Gamma 3: \quad x_3 = +L, \quad t_3 = \frac{L}{c}$$

$$\Gamma 3': \quad x_3' = \gamma\left(x_3 - Vt_3\right) = -\gamma L\left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

$$t_3' = \gamma\left(t_3 - \frac{V}{c^2}x_3\right) = \gamma\frac{L}{c}\left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

Άρα: $c_3' = \dfrac{x_3'}{t_3'} = +c$

Γεγονός 4: Άφιξη του φωτεινού σήματος στον παρατηρητή *O*.

$$\Gamma 4: \quad x_4 = 0, \quad t_4 = \frac{2L}{c}$$

$$\Gamma 4': \quad x_4' = \gamma\left(x_4 - Vt_4\right) = -2\gamma L\frac{V}{c}$$

$$t_4' = \gamma\left(t_4 - \frac{V}{c^2}x_4\right) = 2\gamma\frac{L}{c}$$

Άρα: $\dfrac{x_4'}{t_4'} = -V$, συμφωνία ως προς το μέτρο της σχετικής ταχύτητας των δύο συστημάτων.

Γεγονός 5: Άφιξη του φωτεινού σήματος, από την δεξιά πηγή, στον *O΄*.

$$\Gamma 5: \quad \begin{Bmatrix} x_5 = Vt_5 \\ 2L - x_5 = ct_5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_5 = \dfrac{2LV}{V+c} \\ t_5 = \dfrac{2L}{V+c} \end{Bmatrix}$$

$$\Gamma 5': \quad \begin{Bmatrix} x_5' = \gamma\left(x_5 - Vt_5\right) = 0 \quad ! \\ t_5' = \gamma\left(t_5 - \dfrac{V}{c^2}x_5\right) = \gamma\dfrac{2L}{V+c}\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right) = \dfrac{t_5}{\gamma} \quad ! \end{Bmatrix}$$

Επομένως, οι υπολογισμοί θα μπορούσαν να αρχίσουν από το Γ5΄, όπου οι συντεταγμένες είναι πιο προφανείς (αρχή του συστήματος Ο΄, και διαστολή χρόνου) και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσει κανείς αντίστροφους μετασχηματισμούς Lorentz για να υπολογίσει το Γ5.

Γεγονός 6: Άφιξη του φωτεινού σήματος, από την αριστερή πηγή, στον *O΄*.

$$\Gamma 6: \quad \begin{Bmatrix} x_6 = Vt_6 \\ 2L + x_6 = ct_6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_6 = \dfrac{2LV}{c-V} \\ t_6 = \dfrac{2L}{c-V} \end{Bmatrix}$$

$$\Gamma 65: \quad \begin{Bmatrix} x_6' = \gamma\left(x_6 - Vt_6\right) = 0 \quad ! \\ t_6' = \gamma\left(t_6 - \dfrac{V}{c^2}x_6\right) = \gamma\dfrac{2L}{c-V}\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right) = \dfrac{t_6}{\gamma} \quad ! \end{Bmatrix}$$

Και εδώ ισχύει η ίδια επισήμανση με το προηγούμενο.
Παρ’ ότι η «εντολή του ανάμματος» (εκπομπή αρχικού Η/Μ σήματος) δόθηκε ταυτόχρονα και ως προς τα δύο συστήματα, στη συνέχεια:
Για μεν τον Ο, οι πηγές ανάβουν ταυτόχρονα και των «φωτίζουν» ταυτόχρονα
Για τον Ο΄, οι πηγές δεν ανάβουν ταυτόχρονα και δεν τον «φωτίζουν» ταυτόχρονα

Παράδειγμα 8.10. Πηγή ακτίνων laser βρίσκεται στην αρχή O αδρανειακού συστήματος αναφοράς $Oxyz$ και εκπέμπει, τη χρονική στιγμή $t=0$, φωτόνιο το οποίο, κινούμενο στο επίπεδο Oxy υπό γωνία 45^0 ως προς τον άξονα Ox, χτυπάει στόχο που βρίσκεται ακίνητος σε απόσταση L από την αρχή του συστήματος. Ένα άλλο αδρανειακό σύστημα $O'x'y'z'$, με τους άξονές του παράλληλους στους ομόλογους άξονες του $Oxyz$, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{V}=V\hat{x}$ ως προς το $Oxyz$, τη χρονική στιγμή $t=0$ συμπίπτει με το $Oxyz$.

(α) Περιγράψτε και στα δύο συστήματα, τα δύο γεγονότα, Γ1 = «εκκίνηση φωτονίου από το laser» και Γ2 = «συνάντηση του φωτονίου με το στόχο», προσδιορίζοντας τις αντίστοιχες χωρο-χρονικές συντεταγμένες (x_i, y_i, t_i) και (x_i', y_i', t_i'), συναρτήσει των (L,V,c).

(β) Υπολογίστε τη χρονική απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα, και στα δύο συστήματα $(\Delta t,\quad \Delta t')$. Τα δύο χρονικά διαστήματα συνδέονται με τη σχέση διαστολής χρόνου, ή όχι, και γιατί;

(γ) Υπολογίστε τη χωρική απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα, και στα δύο συστήματα αναφοράς $\left(|\Delta\vec{r}|,\quad |\Delta\vec{r}'|\right)$. Τα δύο χωρικά διαστήματα συνδέονται με τη σχέση συστολής μήκους, ή όχι, και γιατί;

(δ) Υπολογίστε την ταχύτητα του φωτονίου και στα δύο συστήματα αναφοράς, όπως προκύπτει από τον υπολογισμό $c_\varphi = \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$, και $c_\varphi' = \dfrac{|\Delta\vec{r}'|}{\Delta t'}$. Επαναλάβετε τον υπολογισμό, μετασχηματίζοντας τις συνιστώσες ταχύτητας του φωτονίου, από το ένα σύστημα, $\vec{c}_\varphi = \left(c_{\varphi,x}, c_{\varphi,y}\right)$, στο άλλο, $\vec{c}_\varphi' = \left(c_{\varphi,x'}', c_{\varphi,y'}'\right)$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των δύο υπολογισμών.

$$x' = \gamma(x-\beta ct), y' = y, z' = z, t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right), \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}\,,\ \beta = V/c$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(x_1, y_1, t_1) = (0,0,0), \qquad \left(x_1', y_1', t_1'\right) = (0,0,0)$$

$$(x_2, y_2, t_2) = \left(\frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{L}{c}\right), \qquad (x_2', y_2', t_2') = \begin{pmatrix} x_2' = \gamma(x_2 - Vt_2) = \gamma\left(\dfrac{L}{\sqrt{2}} - V\dfrac{L}{c}\right) \\ y_2' = y_2 = \dfrac{L}{\sqrt{2}} \\ t_2' = \gamma\left[t_2 - V\dfrac{x_2}{c^2}\right] = \gamma\left[\dfrac{L}{c} - V\dfrac{L}{\sqrt{2}c^2}\right] \end{pmatrix}$$

(β) Υπολογίστε τη χρονική απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα και το μήκος της διαδρομής του φωτονίου και στα δύο συστήματα $(\Delta t,\quad \Delta t')$. Τα δύο χρονικά διαστήματα συνδέονται με τη σχέση διαστολής χρόνου, ή όχι, και γιατί;

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2 = \frac{L}{c}, \quad \Delta t' = t_2' - t_1' = t_2' = \gamma\left[\frac{L}{c} - V\frac{L}{\sqrt{2}c^2}\right] = \gamma\frac{L}{c}\left[1 - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]$$

Τα δύο χρονικά διαστήματα ΔΕΝ συνδέονται με τη σχέση διαστολής χρόνου, διότι σε κανένα από τα δύο συστήματα αναφοράς δεν λαμβάνουν χώρα στο ίδιο χωρικό σημείο.

(γ) Υπολογίστε τη χωρική απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα, και στα δύο συστήματα αναφοράς $\left(|\Delta\vec{r}|,\ \ |\Delta\vec{r}'|\right)$. Τα δύο χωρικά διαστήματα συνδέονται με τη σχέση συστολής μήκους, ή όχι, και γιατί;

$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\frac{L^2}{2}+\frac{L^2}{2}}=L$$

$$|\Delta\vec{r}'|=\sqrt{\left(x_2'-x_1'\right)^2+\left(y_2'-y_1'\right)^2}=\sqrt{\left(\gamma\left(\frac{L}{\sqrt{2}}-V\frac{L}{c}\right)-0\right)^2+\left(\frac{L}{\sqrt{2}}-0\right)^2}=\sqrt{\gamma^2L^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2+\frac{L^2}{2}}$$

$$|\Delta\vec{r}'|=\sqrt{\gamma^2L^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2+\frac{L^2}{2}}=L\gamma\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2+\frac{1}{2\gamma^2}}$$

Τα δύο χωρικά διαστήματα ΔΕΝ συνδέονται με τη σχέση συστολής μήκους, διότι, σε κάθε ένα από τα δύο συστήματα αναφοράς, ο προσδιορισμός των άκρων τους γίνεται σε διαφορετική χρονική χρονική στιγμή.

(δ) Υπολογίστε την ταχύτητα του φωτονίου και στα δύο συστήματα αναφοράς, όπως προκύπτει από τον υπολογισμό $c_\varphi=\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$, και $c_\varphi'=\dfrac{|\Delta\vec{r}'|}{\Delta t'}$. Επαναλάβετε τον υπολογισμό, μετασχηματίζοντας τις συνιστώσες ταχύτητας του φωτονίου, από το ένα σύστημα, $\vec{c}_\varphi=\left(c_{\varphi,x},c_{\varphi,y}\right)$, στο άλλο, $\vec{c}_\varphi'=\left(c_{\varphi,x'}',c_{\varphi,y'}'\right)$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των δύο υπολογισμών.

$$c_\varphi=\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\frac{L}{L/c}=c$$

$$c_\varphi'=\frac{|\Delta\vec{r}'|}{\Delta t'}=\frac{L\gamma\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2+\frac{1}{2\gamma^2}}}{\gamma\frac{L}{c}\left[1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]}=c\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2+\frac{1}{2\gamma^2}}}{\left[1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]}=c\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\beta^2-\frac{2\beta}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\left(1-\beta^2\right)}}{\left[1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]}$$

Τελικά: $$c_\varphi'=c\frac{\sqrt{\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left[1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]}\Rightarrow c_\varphi'=c$$

Παρόμοια, με μετασχηματισμό ταχυτήτων $\vec{c}_\varphi=\left(c_{\varphi,x},c_{\varphi,y}\right)=\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$

$$c_{\varphi,x}'=\frac{\left(c_{\varphi,x}-V\right)}{\left(1-c_{\varphi,x}V/c^2\right)}=\frac{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}-V\right)}{\left(1-\frac{V}{\sqrt{2}c}\right)}=c\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)}{\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)},\qquad c_{\varphi,y'}'=\frac{c_{\varphi,y}}{\gamma\left(1-c_{\varphi,x}V/c^2\right)}=\frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{\gamma\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$c_\varphi'^2=c_{\varphi,x'}'^2+c_{\varphi,y'}'^2=c^2\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2}{\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2}+c^2\frac{\frac{1}{2}}{\gamma^2\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2}=c^2\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta\right)^2+\frac{1}{2\gamma^2}}{\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2}=c^2$$

Σχολιασμός: και με τους δύο υπολογισμούς, η ταχύτητα του φωτονίου προκύπτει ίση με την ταχύτητα του φωτός c, ανεξάρτητα από την κινητική κατάσταση της πηγής laser, ως προς το κάθε σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα 8.11 Τη χρονική στιγμή $t=0$ παρατηρητής Π_1 αδρανειακού συστήματος Π βρίσκεται στην ίδια θέση με αδρανειακό παρατηρητή Π'. Ο Π_1 βλέπει τον Π' και ένα επίπεδο αντικείμενο που εκτείνεται στο επίπεδο (x, y) να κινούνται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \hat{x}c/2$. Με τη βοήθεια συγχρονισμένων παρατηρητών του συστήματος Π γίνεται τη στιγμή $t=0$ ταυτόχρονη καταγραφή των ορίων του αντικειμένου και διαπιστώνεται ότι ικανοποιούν την εξίσωση περιφέρειας κύκλου ακτίνας R με κέντρο τον Π_1. Βρείτε την αλγεβρική εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες της περιφέρειας του αντικειμένου ως προς τον Π'. Περιγράψτε το σχήμα στο οποίο αντιστοιχεί αυτή η εξίσωση.
(β) Από μία πυρηνική αντίδραση εκπέμπονται δύο ταυτόσημα σωματίδια Α και Β, σε αντίθετες κατευθύνσεις και με ταχύτητες 0,8*c* και 0,6*c*, αντίστοιχα, ως προς αδρανειακό παρατηρητή Π. Παρατηρητής Π_A ως προς τον οποίο το σωματίδιο Α είναι ακίνητο μετράει χρόνο ζωής τ = 2 sec για το Α. Τον ίδιο χρόνο ζωής μετράει για το Β παρατηρητής Π_B που βλέπει το Β να ηρεμεί. Πόσος είναι ο χρόνος ζωής του καθενός σωματιδίου ως προς τον Π; Πόσος είναι ο χρόνος ζωής του σωματιδίου Α όπως καταγράφεται από τον Π_B;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Για τον παρατηρητή Π_1 και τους συγχρονισμένους παρατηρητές του αδρανειακού συστήματος Π, τα όρια του επίπεδου αντικειμένου περιγράφονται από τη σχέση

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Κάθε σημείο (x, y) της περιφέρειας του αντικειμένου έχει μία προβολή x, παράλληλα στην κίνηση, και μία προβολή y, κάθετα στην κίνηση, Όλα αυτά τα μήκη έχουν προσδιοριστεί την ίδια στιγμή για το σύστημα Π, άρα πληρούν την προϋπόθεση μέτρησης μήκους, ως προς σύστημα (Π) για το οποίο κινούνται. Τα ίδια μεγέθη, ως προς το σύστημα Π΄, για το οποίο ακινητούν, αποτελούν «χαρακτηριστικά μήκη» (ή, «ιδιομήκη»), επομένως θα ισχύει $x' = \gamma x, \qquad y' = y$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε

$$\left(\frac{x'}{\gamma}\right)^2 + y'^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x'}{\gamma R}\right)^2 + \left(\frac{y'}{R}\right)^2 = 1$$

Άρα έχουμε: Έλλειψη με κέντρο στο $(x'=0, y'=0)$ και ημιάξονες: $(\gamma R, R)$ στους άξονες (x', y'), αντίστοιχα. [Ισοδύναμα: επειδή $t=0$, έχουμε $x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma x$, και $y' = y$, και συνεχίζουμε όμοια]

(β) Για το χρόνο ζωής του καθενός σωματιδίου, ως προς τον εργαστηριακό παρατηρητή Π, από διαστολή χρόνου, έχουμε: $\tau_{A/\Pi} = (\gamma_{A/\Pi})\tau = \dfrac{\tau}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \dfrac{2s}{0.6} \Rightarrow \boxed{\tau_{A/\Pi} = 3.3333s}$

$$\tau_{B/\Pi} = (\gamma_{B/\Pi})\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = \frac{2s}{0.8} \Rightarrow \boxed{\tau_{B/\Pi} = 2.5s}$$

Για το χρόνο ζωής του καθενός σωματιδίου, ως προς το άλλο, χρειαζόμαστε τη σχετική τους ταχύτητα. Σύστημα S = Π, Σύστημα S΄=Σωματίδιο Α, Σωματίδιο Β = κινητό ως προς τα δύο συστήματα S και S΄.Άρα $v'_x = (v_x - V)/(1 - v_x V/c^2)$, όπου $V = 0.8c$, $v_x = -0.6c$. Επομένως :

$$v' \equiv \upsilon_{B/A} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 - \dfrac{(-0.6c)(0.8c)}{c^2}} = \frac{-1.4c}{1.48} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' \equiv \upsilon_{B/A} = -0.946c},$$

και $\tau_{B/A} = \gamma_{B/A}\tau = \dfrac{2s}{\sqrt{1-(0.946)^2}} \Rightarrow \boxed{\tau_{B/A} = 6.17s}$

Παράδειγμα 8.13. Ένα διαστημόπλοιο εκτοξεύει πύραυλο που κατευθύνεται προς τη γη με ταχύτητα 0.84c ως προς το διαστημόπλοιο. Παρατηρητής στη γη διαπιστώνει ότι ο πύραυλος πλησιάζει με ταχύτητα 0.36c. α) με πόση ταχύτητα κινείται το διαστημόπλοιο ως προς τη γη; Πλησιάζει ή απομακρύνεται από αυτήν; β) Αν το μήκος ηρεμίας του πυραύλου είναι Lo=2m, ποιό είναι το μήκος του όπως το μετρά ο αστροναύτης που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο και ποιό όπως το μετρά ο παρατηρητής στη γη; γ) Αν το διαστημόπλοιο εκπέμπει σήματα με συχνότητα 10^4Hz, με ποιά συχνότητα θα τα ανιχνεύει ο παρατηρητής στη γη;

α) Μετασχηματισμός διαμήκους ταχύτητας: $u'_x = \dfrac{u_x - V}{1-\dfrac{u_x V}{c^2}}$,

όπου: u_x:ταχύτητα πυραύλου ως προς τη ΓΗ (θεωρούμενη ως «ακίνητο» σύστημα αναφοράς),
και : u'_x:ταχύτητα πυραύλου ως προς τη ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΟ (θεωρούμενο ως «κινούμενο» σύστημα αναφοράς),
u_x=0.36 c, u'_x=0.84 c,

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1-\frac{u_x V}{c^2}} \Rightarrow u'\left(1-\frac{u_x V}{c^2}\right) = u_x - V \Rightarrow \boxed{V = \frac{(u'_x - u_x)c^2}{u'_x u_x - c^2}} = \frac{0.48c^3}{(0.302-1)c^2} \Rightarrow \boxed{V = -0.688c}$$

β)

$$\left(L_{\pi\upsilon\rho\beta\lambda}\right)_{\text{ΔΙΑΣΤΜΠΛ}} = L_0\left(\sqrt{1-(0.84)^2}\right) = 0.54L_0$$

$$\left(L_{\pi\upsilon\rho\beta\lambda}\right)_{\text{ΓΗ}} = L_0\left(\sqrt{1-(0.36)^2}\right) = 0.93L_0$$

γ) Η πηγή απομακρύνεται, με β=0.688 : $\nu' = \nu\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \boxed{\nu' = 0.43\nu}$

Παράδειγμα 8.14. Ένας ακίνητος τηλεθεατής (Τ) βρίσκεται στη θέση $x_1 = 0$ ενώ η συσκευή της (ακίνητης) τηλεόρασης βρίσκεται στη θέση $x_2 > 0$ ενός δωματίου (η γραμμή που ενώνει τον Τ με την τηλεόραση ορίζει τον άξονα x).
(α) Βρείτε την απόσταση τηλεθεατή-συσκευής για παρατηρητή Π που κινείται κατά την κατεύθυνση +x με ταχύτητα $\upsilon = c/2$ ως προς το δωμάτιο. Θεωρήστε ότι οι αρχές των συστημάτων αναφοράς του Τ και του Π συμπίπτουν όταν $t = 0$ και ότι ο Π συγχρονίζει το ρολόι του εκείνη τη στιγμή θέτοντάς το στην τιμή $t' = 0$.
(β) Τη χρονική στιγμή $t_1 > 0$ ο τηλεθεατής πατά το κουμπί του τηλεκοντρόλ (γεγονός Γ_1) και η συσκευή της τηλεόρασης ανάβει (γεγονός Γ_2) τη χρονική στιγμή t_2. Τα t_1 και t_2 μετρώνται με ρολόι που βρίσκεται ακίνητο στον τοίχο του δωματίου. Βρείτε τις χωροχρονικές συνταγμένες (x_1', t_1') του γεγονότος Γ_1 και (x_2', , t_2') του Γ_2 ως προς τον παρατηρητή Π.
(γ) Δείξτε ότι για οποιαδήποτε ταχύτητα υ του παρατηρητή Π, το t_2' παραμένει πάντοτε μεγαλύτερο του t_1' (δηλαδή, ως προς κανένα κινούμενο παρατηρητή Π, δεν μπορεί να ανάψει η τηλεόραση πριν πατήσει το σχετικό κουμπί ο τηλεθεατής).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Συστολή Μήκους

$$x_2' - x_1' = \Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)} \Rightarrow \boxed{x_2' - x_1' = \left(x_2 - x_1\right)\sqrt{3}/2}$$

(β) Μετασχηματισμοί Lorentz

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t_1}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} \Rightarrow \boxed{x_1' = 2\left(x_1 - \upsilon t_1\right)/\sqrt{3}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t_2}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} \Rightarrow \boxed{x_2' = 2\left(x_2 - \upsilon t_2\right)/\sqrt{3}}$$

$$t_1' = \frac{t_1 - \left(\upsilon x_1/c^2\right)}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} \Rightarrow \boxed{t_1' = 2\left(t_1 - \left(x_1/2c\right)\right)/\sqrt{3} = \left(2t_1 - \left(x_1/c\right)\right)/\sqrt{3}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \left(\upsilon x_2/c^2\right)}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} \Rightarrow \boxed{t_2' = 2\left(t_2 - \left(x_2/2c\right)\right)/\sqrt{3} = \left(2t_2 - \left(x_2/c\right)\right)/\sqrt{3}}$$

(γ)Η διαφορά χρόνου είναι:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \left(\upsilon x_2/c^2\right)}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} - \frac{t_1 - \left(\upsilon x_1/c^2\right)}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} = \frac{t_2 - \left(\upsilon x_2/c^2\right) - t_1 + \left(\upsilon x_1/c^2\right)}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}$$

<u>Αν υπήρχε ταχύτητα υ τέτοια ώστε:</u>

$$\left(t_2' - t_1'\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 - \left(\upsilon x_2/c^2\right) - t_1 + \left(\upsilon x_1/c^2\right) < 0 \quad \Rightarrow t_2 - t_1 < \left(\upsilon x_2/c^2\right) - \left(\upsilon x_1/c^2\right)$$

Άρα $t_2 - t_1 < \upsilon\left(x_2 - x_1\right)/c^2$ (1), αλλά $\left(x_2 - x_1\right) = c\left(t_2 - t_1\right)$ (2)

Από (1) και (2) : $\left(t_2 - t_1\right) < \upsilon c\left(t_2 - t_1\right)/c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\upsilon/c\right) > 1}$, <u>άτοπο</u>.

Παράδειγμα 8.15 Θεωρούμε, ως προς αδρανειακό σύστημα S, τα γεγονότα $\Gamma 1:\left\{x_1 = L_0, t_1 = L_0/c\right\}$ και $\Gamma 2:\left\{x_2 = 2L_0, t_2 = L_0/(2c)\right\}$. Να βρεθεί (α) το σύστημα, S΄, ως προς το οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα, και (β) η χωρική τους απόσταση στο σύστημα S΄.

(α) Ισχύει: $t_1' = \dfrac{t_1 - \upsilon x_1/c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}, \quad t_2' = \dfrac{t_2 - \upsilon x_2/c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}$.

Προκειμένου τα δύο γεγονότα να είναι ταυτόχρονα στο S΄, πρέπει

$$t_1' - t_2' = 0 \Rightarrow t_1 - \upsilon x_1/c^2 = t_2 - \upsilon x_2/c^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = c^2\frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \boxed{\upsilon = -c/4}$$

(β) Για τη χωρική απόσταση: $x_1' = \dfrac{x_1 - \upsilon t_1}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}, \quad x_2' = \dfrac{x_2 - \upsilon t_2}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_1' - x_2' = \frac{\left(x_1 - x_2\right) - \upsilon\left(t_2 - t_1\right)}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1' - x_2' = \sqrt{3}L_0/2}$$

Παράδειγμα 8.16. Τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς S1 και S2 κινούνται κατά μήκος του άξονα-x ενός τρίτου αδρανειακού συστήματος αναφοράς, S, με ταχύτητες υ1 και υ2, αντίστοιχα. Αν το σύστημα S μετράει χρόνο t, για τη μονάδα χρόνου του συστήματος S1, πόσο χρόνο μετράει το S2, για την ίδια μονάδα χρόνου του συστήματος S1.

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων μεταξύ των S και S1 είναι της μορφής

$$t = \frac{t_1 + \upsilon_1 x_1 / c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon_1 / c\right)^2}}, \quad x = \frac{x_1 + \upsilon_1 t_1}{\sqrt{1-\left(\upsilon_1 / c\right)^2}}$$

Αν το χρονόμετρο του S1 ηρεμεί στην αρχή των αξόνων έχουμε x_1=0 και t_1=1. Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις παίρνουμε: $t = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\upsilon_1 / c\right)^2}} = \gamma_1, \quad x = \frac{\upsilon_1 t_1}{\sqrt{1-\left(\upsilon_1 / c\right)^2}} = \gamma_1 \upsilon_1$.

Η σχέση χωρο-χρονικών συντεταγμένων μεταξύ S2 και S είναι $t_2 = \frac{t - \upsilon_2 x / c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon_2 / c\right)^2}}$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των (x,t), παίρνουμε $t_2 = \frac{t - \upsilon_2 x / c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon_2 / c\right)^2}} = \frac{\gamma_1 - \upsilon_2 \gamma_1 \upsilon_1 / c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon_2 / c\right)^2}}$,

$$t_2 = \frac{\gamma_1 - \upsilon_2 \gamma_1 \upsilon_1 / c^2}{\sqrt{1-\left(\upsilon_2 / c\right)^2}} = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \upsilon_2 \upsilon_1 / c^2\right) \Rightarrow \boxed{t_2 = t\gamma_2 \left(1 - \upsilon_2 \upsilon_1 / c^2\right)}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

***Κ. Χριστοδουλίδης*, Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και οι Εφαρμογές της,** Αθήνα 2014, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε., ISBN: 978-960-418-462-0

***J. L. Martin*, Γενική Σχετικότητα, Μία βασική Εισαγωγή για Φυσικούς**, Ηράκλειο 2005, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, ISBN 960-524-198-6