ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

[Η παρούσα Ενότητα: Κινήσεις σε πεδίο κεντρικής δύναμης ~$1/r^2$, Νόμοι του Kepler, εμπίπτει οριακά στην Ύλη του μαθήματος και αναρτάται ως Δώρο Πρωτοχρονιάς]

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

9. Κίνηση σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων της μορφής: $\vec{F} = k\hat{r}/r^2$

Στην Ενότητα 4 δείξαμε ότι όλες οι κεντρικές δυνάμεις, δηλ., δυνάμεις της μορφής $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$, (όπου: $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το κέντρο έλξης ή άπωσης που ασκεί την κεντρική δύναμη, και $\hat{r}$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα), είναι διατηρητικές. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κεντρική δύναμη μπορούμε να παράγουμε μία καλώς ορισμένη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

όπου $U(\vec{r}_0)$ μία τιμή αναφοράς δυναμικής ενέργειας, σε κάποιο γωνστό σημείο $\vec{r}_0$. Ειδικότερα δείξαμε ότι , για κάθε κεντρική δύναμη της μορφής $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{k\hat{r}}{r^2}$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το «κέντρο» της δύναμης, και k μία θετική ή αρνητική σταθερά, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $U(\vec{r}) = \dfrac{k}{r}$, με σημείο αναφοράς μηδενικής δυναμικής ενέργειας το $r \to \infty$.

Επίσης, δείξαμε ότι μία σημειακή μάζα, που κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης, διατηρεί τη στροφορμή της, ως προς το ελκτικό (η, απωστικό) κέντρο του δυναμικού πεδίου

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = (r\hat{r}) \times \left(f(r)\hat{r} \right) = rf(r)(\hat{r} \times \hat{r}) = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Η σταθερότητα της στροφορμής, ως διανυσματικό μέγεθος $L \equiv \vec{r} \times (m\vec{v}) = const.$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τροχιά είναι επίπεδη αφού το εξωτερικό γινόμενο της ακτίνας επί την ταχύτητα διατηρείται ως διάνυσμα. Επιπλέον, από την σταθερότητα του εξωτερικού γινομένου $\vec{r} \times \vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta$, μπορούμε να συνάγουμε τον νόμο των σταθερών εμβαδών ανά μονάδα χρόνου

$$\vec{r} \times \vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{L}}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\vec{r} \times d\vec{r})/2}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \sigma\tau\alpha\theta$$

Αλλά, $\dfrac{(\vec{r} \times d\vec{r})/2}{dt} = \dfrac{d\vec{S}}{dt}$, όπου $d\vec{S}$: η επιφάνεια που σαρώνεται από την ακτίνα μέσα στο χρονικό διάστημα *dt*, που είναι ο **Δεύτερος νόμος του Kepler:** ***"Το διάνυσμα θέσης ενός πλανήτη, σε σχέση με τον Ήλιο, σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους"***

Τα προηγούμενα συμπεράσματα θα μας είναι χρήσιμα στην ανάλυση της κίνησης σωμάτων υπό την επίδραση κεντρικών δυνάμεων, δεδομένου μάλιστα ότι δύο από τις βασικότερες δυνάμεις στη φύση, δηλ., η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών και η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ δύο σημειακών φορτίων είναι της μορφής $\vec{F}(\vec{r}) = k\hat{r}/r^2$, (όπου υποθέτουμε ότι το ένα από τα δύο σώματα, ή φορτία, αντίστοιχα, βρίσκεται στην αρχή του συστήματος αναφοράς $O(\vec{r} = 0)$ και το δεύτερο βρίσκεται στη διανυσματική θέση $\vec{r}$). [Στη βαρυτική δύναμη: $k = GMm$, στην ηλεκτροστατική δύναμη: $k = Qq/4\pi\varepsilon_0$, όπου: (M, m) = οι αλληλεπιδρώσες μάζες, (Q, q) = τα αλλεπιδρόντα φορτία, G = η σταθερά παγκόσμιας έλξης, ε_0 = η διηλεκτρική σταθερά του κενού]

Όσον αφορά τις δυνάμεις $\sim 1/r^2$, μπορούμε να δείξουμε ότι: δύο σφαιρικώς συμμετρικές κατανομές (μάζας, ή φορτίου), ακτίνων R_1, R_2, που βρίσκονται σε απόσταση τέτοια ώστε τα κέντρα τους να απέχουν περισσότερο από το άθροισμα των ακτίνων τους, $\left(|\vec{r}_{12}| \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > R_1 + R_2\right)$, αλληλεπιδρούν ως δύο σημειακά σώματα (συνολικής μάζας, ή φορτίου, αντίστοιχα), τοποθετημένα στα αντίστοιχα κέντρα.

Από εδώ και στο εξής θα περιορίσουμε τη συζήτηση σε αλληλεπίδραση μαζών, που η κάθε μία τους είναι σφαιρικά συμμετρική. Αν τα παραπάνω δύο σώματα έχουν συγκρίσιμες μάζες, τότε είναι βολικό να κάνουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, από τις συνεταγμένες $\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right)$ να πάμε στις συντεταγμένες της σχετικής τους απόστασης $\left(\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$ και του κέντρου μάζας$\left(\vec{R}_{CM} \equiv \left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)/\left(m_1 + m_2\right)\right)$του συστήματος. Ο μετασχηματισμός αυτός μας επιτρέπει να αποφανθούμε ότι, αν δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα, τότε το μεν κέντρο μάζας κινείται ισοταχώς (ή, ακινητεί), ενώ με τη βοήθεια της σχετικής απόστασης $\left(\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$το σύστημα των αλληλοεξαρτόμενων διαφορικών εξισώσεων κίνησης του Νεύτωνα, για τα δύο σώματα, ανάγεται σε μία διαφορική κίνηση για το $\vec{r}$, με αντίστοιχη μάζα την ανηγμένη μάζα του συστήματος, $\mu = Mm/(M + m)$. Από μία ισοδύναμη οπτική, τα δύο σώματα, απουσία εξωτερικών δυνάμεων, θα εκτελούν μία κίνηση σταθερής συνολικής στροφορμής, περί το κέντρο μάζας τους.

Στην περίπτωση που οι δύο μάζες *M* και *m* έχουν σχέση *M>>m,* τότε η ανηγμένη μάζα του συστήματος είναι $\mu \approx m$, και το σύστημα είναι με πολύ καλή προσέγγιση ισοδύναμο με ένα ακλόνητο ελκτικό κέντρο που συμπίπτει με το κέντρο της μεγάλης μάζας *M*, περί το οποίο κινείται η μικρή μάζα *m*,

[Στο πρόβλημα της κίνησης των πλανητών, τα μεν σώματα ειναι περισσότερα των δύο, αφ' εταίρου τόσο οι πλανήτες όσο και ο Ήλιος δεν είναι απολύτως σφαιρικώς συμμετρικά σώματα. Εν τούτοις, οι αποκλίσεις από την σφαιρική συμμετρία, του Ήλιου και των πλανητών, είναι ποσοστιαία πολύ μικρές. Από την άλλη, η εξαιρετικά μεγαλύτερη μάζα του Ήλιου, σε σχέση με τη μάζα του καθε πλανήτη, και οι πολύ μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των πλανητών, μας επιτρέπουν να θεωρήσουμε, σε πρώτη προσέγγιση, ότι ο μεν Ήλιος δεν επηρεάζεται από την κίνηση των πλανητών, η δε κίνηση του κάθε πλανήτη καθορίζεται από την αλληλεπίδρασή του με τον Ήλιο κυρίως, και σε πολύ μικρότερο βαθμό από την αλληλεπίδρασή του με τους άλλους πλανήτες. Στην βάση των προηγούμενων προσεγγίσεων, η ανάλυση που ακολουθεί αναφέρεται στη μελέτη της κίνησης μίας σημειακής μάζας, υπό την επίδραση ακλόνητου ελκτικού κέντρου].

Κάποια γενικά συμπεράσματα, για την κίνηση ενός πλανήτη υπό την ελκτική επίδραση του Ήλιου, μπορούν να συναχθούν από την έκφραση της ενέργειας σε πολικές συντεταγμένες.

Από την έκφραση για την ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + \dot{\theta}r\hat{\theta}$, όπου $\hat{r} \perp \hat{\theta}$, παίρνουμε: $E_K = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2\right)$

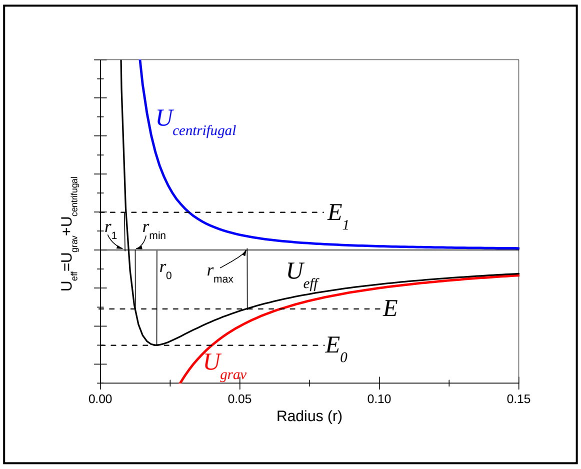
Η ολική ενέργεια του σώματος είναι: $E_{o\lambda} = U\left(r\right) + E_K = U\left(r\right) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$, αλλά, σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες: $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = r\hat{r} \times m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \;\; \Rightarrow \;\; \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$.

Αντικαθιστώντας, στην έκφραση της ενέργειας, το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας, συναρτήσει της στροφορμής, από την τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$\boxed{E_{o\lambda} = U\left(r\right) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}},$$

Αν θεωρήσουμε τον όρο της στροφορμής ως ένα "Φυγοκεντρικό δυναμικό" και τον αθροίσουμε με τον ελκτικό βαρυτικό όρο, τότε παίρνουμε ένα ενεργό δυναμικό (effective potential) της μορφής:

$$U_{eff}\left(r\right) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$



Η μορφή του ενεργού δυναμικού φαίνεται στο διπλανό σχήμα και αποτελείται από έναν ελκτικό όρο (-), ο οποίος κυριαρχεί στις μεγάλες αποστάσεις (ως ανάλογο του $1/r$) και έναν απωστικό όρο (+), ο οποίος κυριαρχεί στις μικρές αποστάσεις (ως ανάλογο του $1/r^2$).

Υπό την επίδραση του ενεργού δυναμικού, η δυναμική του πλανήτη εξαρτάται από τις διαφορετικές τιμές συνολικής ενέργειας $E_{ολ}$.

$$E_{ολ} = U_{eff} + \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \qquad (1)$$

όπου $\frac{1}{2} m\dot{r}^2$: η Ακτινική Κινητική Ενέργεια

Στο σχήμα φαίνεται η δυναμική συμπεριφορά του πλανήτη για τρεις χαρακτηριστικές τιμές συνολικής ενέργειας.

(δ_1) Για συνολική τιμή ενέργειας E_0 ίση με το ελάχιστο της ενεργού συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, υπάρχει μία μόνο τιμή της ακτίνας r_0 συμβατή με αυτή την ενέργεια. Άρα, για αυτή την ενέργεια ο πλανήτης εκτελεί κυκλική τροχιά ($r=r_0$=σταθ.), άρα έχει μηδενική ακτινική κινητική ενέργεια.

(δ_2) Για συνολική τιμή ενέργειας E αρνητική αλλά μεγαλύτερη από την E_0, ($E_0<E<0$), υπάρχουν δύο τιμές της ακτίνας συμβατές με αυτή την ενέργεια, για τις οποίες επομένως μηδενίζεται η ακτινική κινητική ενέργεια. Άρα, για αυτή τη συνολική ενέργεια ο πλανήτης εκτελεί κλειστή (ελλειπτική) τροχιά με περιήλιο ακτίνας $r_{\min}$και αφήλιο ακτίνας $r_{\max}$.

(δ_3) Για συνολική ενέργεια ίση ή μεγαλύτερη από το μηδέν $\left(E_1 \geq 0\right)$ ο πλανήτης εκτελεί ανοικτή τροχιά ($E_1=0$: παραβολή, $E_1>0$: υπερβολή) με περιήλιο r_1 και αφήλιο άπειρης τιμής (δηλ., πρόκειται για κομήτη που δεν επιστρέφει στο Ηλιακό σύστημα).

Τροχιές με $E < U_{eff,\min}$ δεν είναι φυσικά αποδεκτές αφού θα αντιστοιχούσαν σε αρνητική ακτινική κινητική ενέργεια

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την επακριβή ανάλυση της τροχιάς σώματος μάζας m, υπό την επίδραση βαρυτικής έλξης ανάλογης του $1/r^2$, απο σημειακό ελκτικό κέντρο, επιλύοντας τις εξισώσεις κίνησης, όπως γράφονται σε πολικές συντεταγμένες (αφού η κίνηση είναι επίπεδη).

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}\right) \quad \Rightarrow \quad m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}\right] = f\left(r\right)\hat{r} \ (2)$$

Κατά συνιστώσες, έχουμε:

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = f\left(r\right)/m \qquad (3), \qquad \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (4)$$

Αλλά, $$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = r\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = const.$$

Από τη μορφή της στροφορμής σε πολικές συντεταγμένες και τη σταθερή της τιμή έχουμε $\left|\vec{L}\right| = mr^2\dot{\theta} = const \Rightarrow r^2\dot{\theta} = L/m \equiv l$: στροφορμή ανά μονάδα μάζας, που θα είναι χρήσιμη στη συνέχεια. Για την επίλυση της ακτινικής συνιστώσας της εξίσωσης κίνησης έχουμε:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -GM/r^2 \quad (5)$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

$$r = 1/u \quad \Rightarrow \quad r = \left(u\left(\theta\left(t\right)\right)\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = -u^{-2}\left(du/d\theta\right)\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\left(du/d\theta\right) = -l\left(du/d\theta\right),$$

και $$\ddot{r} = -l\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -l\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = -l\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} \quad (6)$$

Επίσης, από τη στροφορμή ανά μονάδα μάζας, έχουμε: $r^2\dot{\theta} = l \Rightarrow \dot{\theta} = lu^2$ (7)

Αντικαθιστώντας τις (6) και (7) στην έκφραση (5), για την ακτινική εξίσωση κίνησης, έχουμε

$$-l^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{u}\left(lu^2\right)^2=-GMu^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{l^2} \qquad (8)$$

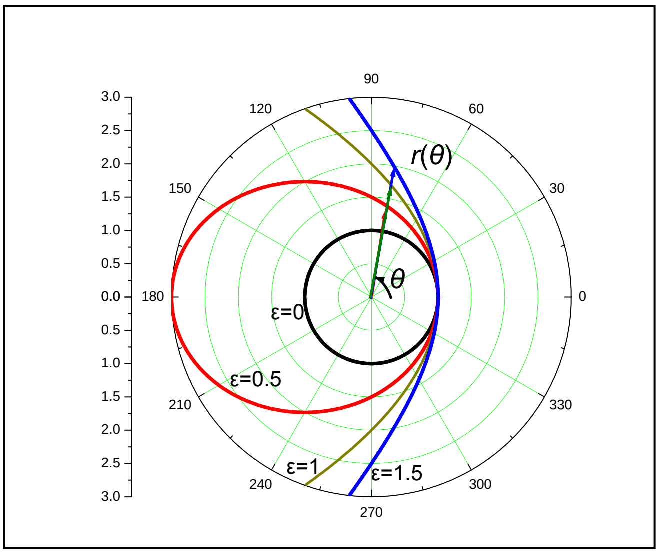
Η τελευταία σχέση είναι η διαφορική εξίσωση της εξίσωσης τροχιάς $u=u(\theta)\Rightarrow r=r(\theta)$, όπως αυτή περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες. Για την επίλυση της (8), επισημαίνουμε ότι είναι μία ***μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και σταθερό μη-ομογενή όρο***. Με βάση την ανάλυση που έχει παρουσιαστεί για τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις στην ενότητα των αρμονικών ταλαντώσεων, έχουμε

Γενική Λύση Μη-Ομογενούς = Γενική Λυση Ομογενούς + Ειδική Λύση της Μη-Ομογενούς

Η ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, ως έχουσα τη μορφή του μη-ομογενούς όρου είναι η σταθερά GM/l^2, ενώ ηλύση της ομογενούς είναι αρμονικής μορφής, οπότε:

$$u=A\cos\left(\theta-\theta_0\right)+GM/l^2 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{A\cos\left(\theta-\theta_0\right)+GM/l^2} \qquad (9)$$

Δηλαδή, η εξίσωση τροχιάς έχει τη γενική μορφή εξίσωσης κωνικών τομών, των οποίων την αναλυτική έκφραση, σε πολικές συντεταγμένες, είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε εν συντομία:



$$r=r_0\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad (10)$$

Όπου, r_0: η ελάχιστη απόσταση, (ως προς τον φορέα της οποίας αναφέρεται η η γωνία θ, άρα θ_0=0), και ε: η ελλειπτικότητα, ανάλογα με την τιμή της οποίας έχουμε:

Υπερβολή: $\varepsilon > 1$

Παραβολή: $\varepsilon = 1$

Έλλειψη: $0 < \varepsilon < 1$

Κύκλος: $\varepsilon = 0$

Για την περίπτωση της έλλειψης:

Μεγάλος Ημιάξονας: $a=\dfrac{r_0}{1-\varepsilon}$

Μικρός Ημιάξονας: $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Μία συνοπτική απεικόνιση των κωνικών τομών, (για r_0=1, και διαφορετικές τιμές ελλειπτικότητας), φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Γράφοντας τη σχέση (9) με τη μορφή

$$r=\frac{l^2/GM}{1+\left(Al^2/GM\right)\cos\left(\theta-\theta_0\right)}, \qquad (11)$$

και συγκρίνοντας τις σχέσεις (10) και (11), υπολογίζουμε τις δύο παραμέτρους

$$\varepsilon=\frac{Al^2}{GM}, \qquad r_0=\frac{l^2/GM}{1+\varepsilon} \qquad (12\ α, β)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως **Πρώτος Νόμος του Kepler:** ***“Κατά την κίνηση υπό την επίδραση κεντρικών ελκτικών δυνάμεων της μορφής*** $\sim 1/r^2$***, οι τροχιές έχουν τη μορφή κωνικών τομών, με το ελκτικό κέντρο να βρίσκεται στη θέση της εστίας των κωνικών τομών”.***

Για την περίπτωση των ελλειπτικών τροχιών ($0 < \varepsilon < 1$) των πλανητών περί το Ήλιο, η ελάχιστη και η μέγιστη απόστασή τους, από τον Ήλιο, αναφέρονται, αντίστοιχα, ως:

$$\text{Περιήλιο: } r_{\min}=r_0, \qquad \text{Αφήλιο: } r_{\max}=r_0\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad (13\ α,β)$$

Σχέση Περιόδου και μεγάλου Ημιάξονα των ελλειπτικών τροχιών

Στην περίπτωση των κλειστών τροχιών (κύκλου: ε=0, και έλλειψη: 0 < ε < 1), άρα περιοδικών κινήσεων, υπάρχει μία ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της τροχιάς και της περιόδου. Η σχέση αυτή διατυπώνεται με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο για τις υποπεριπτώσεις των κυκλικών και των ελλειπτικών τροχιών.

(α) ***Κυκλικές Τροχιές***. Σε αυτή την περίπτωση, η βαρυτική δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\,\omega^2 r \;\Rightarrow\; \frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \;\Rightarrow\; \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3} \qquad (14)$$

(β) ***Ελλειπτικές Τροχιές***. Για την περίπτωση αυτή, με βάση των νόμο των εμβαδών, έχουμε:

$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{l}{2}$, και για την διάρκεια μίας περιόδου (Τ): $S/T = l/2 \;\Rightarrow\; T = 2S/l$,

όπου S: το εμβαδόν στο εσωτερικό της ελλειπτικής (περιοδικής) τροχιάς.

Επομένως το τετράγωνο τηε περιόδου θα είναι $T^2 = 4S^2/l^2$ (15α)

Από την αναλυτική γεωμετρία είναι γνωστό ότι το εμβαδόν μίας έλλειψης με ημιάξονες a και b είναι ίσο με $S = \pi ab$, αν a: ο μεγάλος ημιάξονας, τότε $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, οπότε το τετράγωνο του εμβαδού είναι $S^2 = \pi^2 a^4 \left(1-\varepsilon^2\right)$. Επομένως

$$S^2 = \pi^2 a^4 \left(1-\varepsilon^2\right) = \pi^2 \frac{r_0^4}{\left(1-\varepsilon\right)^4}\left(1-\varepsilon^2\right) = \pi^2 \frac{r_0^3}{\left(1-\varepsilon\right)^3} r_0\left(1+\varepsilon\right) = \pi^2 a^3 \left[r_0\left(1+\varepsilon\right)\right]$$

Αλλά, από (12,β) έχουμε $\left[r_0\left(1+\varepsilon\right)\right] = l^2/GM$, άρα $S^2 = \pi^2 a^3 l^2 / GM$ (15β)

Συνδυάζοντας τις (15α) και (15β), παίρνουμε $\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3}$ (16)

Οι σχέσεις (14) και (16) συναποτελούν τον **Τρίτο νόμο του Kepler*: “Το τετράγωνο της περιόδου της κλειστής (ελλειπτικής, ή κυκλικής) τροχιάς των πλανητών είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα (ή, της ακτίνας, στην περίπτωση κύκλου) της τροχιάς”***

Η σταθερά της αναλογίας εξαρτάται από τη μάζα Μ του Ήλιου και τη σταθερά παγκόσμιας έλξης, ανεξάρτητα από το αν η κλειστή τροχιά είναι κύκλος ή έλλειψη.

Σχέση Ενέργειας – Στροφορμής και είδος τροχιάς

Από την μέχρι στιγμής ανάλυση, έχουν προκύψει οι νόμοι του Kepler και η γενική μορφή όλων των δυνατών πλανητικών τροχιών (κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Εν τούτοις, φαίνεται σαν να μην έχει προκύψει ρητά τι ακριβώς “αποφασίζει” για το είδος της τροχιάς.

Στην αρχή αυτής της ενότητας, μέσω της σχέσης (1), $E_{ολ} = U_{eff} + \frac{1}{2} m\dot{r}^2$, είχε εκφρασθεί η συνολική ενέργεια ως άθροισμα μίας *ενεργού δυναμικής ενέργειας*, $U_{eff}\left(r\right) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$, (που περιλαμβάνει έναν απωστικό “φυγοκεντρικό” όρο ανάλογο του τετραγώνου της στροφορμής), και ενός όρου *ακτινικής κινητικής ενέργειας*. Με την ανάλυση που ακολούθησε τη σχέση (1) έχει δειχθεί ότι, ανάλογα με τη σχέση της συνολικής ενέργειας E ως προς το ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας, προκύπτει ανοικτή ή κλειστή τροχιά. Στην περίπτωση,της κλειστής τροχιάς, είναι φανερό ότι ο μηδενισμός της ακτινικής κινητικής ενέργειας συμπίπτει με την κυκλική τροχιά.

Στη συνέχεια θα ολοκληρώσουμε αυτό το ενεργειακό επιχείρημα, έτσι ώστε η τιμή της ελλειπτικότητας να προκύπτει από τη συσχέτιση κινητικής και δυναμικής ενέργειας, (ενώ μέχρι τώρα προσδιοριζόταν από τη σταθερά ολοκλήρωσης A: $\varepsilon = Al^2/GM$).

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{GMm}{r}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής: $\frac{1}{r}=u \quad \Rightarrow \quad \left\{r^2=\frac{1}{u^2}, \qquad \dot{r}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}\right\}$

Αλλά, (από διατήρηση στροφορμής): $r^2\dot{\theta}=L/m\equiv l \quad \Rightarrow \quad \left\{\dot{\theta}=u^2 l\right\}$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω σχέσεις των αγκυλών στην έκφραση της ενέργειας, παίρνουμε

$$E=\frac{1}{2}ml^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]-\left(GMm\right)u \tag{17}$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί με χωρισμό μεταβλητών

$$2E=ml^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]-\left(2GMm\right)u\Rightarrow\frac{2E+\left(2GMm\right)u}{ml^2}-u^2=\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\Rightarrow$$

$$\frac{du}{d\theta}=\sqrt{\frac{2E+\left(2GMm\right)u}{ml^2}-u^2}\Rightarrow d\theta=\frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2}+\frac{2GM}{l^2}u-u^2}} \tag{18}$$

Η έκφραση αυτή είναι ασφαλώς πολυπλοκότερη της αντίστοιχης (8), (η οποία επιλύεται με τα εργαλεία των αρμονικών ταλαντώσεων), πλεονεκτεί όμως ως προς αυτή κατά το γεγονός ότι, πέραν την ολικής στροφορμής, περιέχει ρητά και την ολική ενέργεια. Ολοκληρώνουμε, σύμφωνα με το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\left\{\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right\}+C$, οπότε παίρνουμε

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{1}}\arcsin\left\{\frac{ml^2u-GMm}{\sqrt{\left(GMm\right)^2+3Eml^2}}\right\}+\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\theta-\theta_0\right)=\frac{ml^2u-GMm}{\sqrt{\left(GMm\right)^2+3Eml^2}}.$$

Επιλύοντας ως προς u, $\left(u=1/r\right)$ και αντιστρέφοντας, ως προς r, (για $\theta_0=-\pi/2$), έχουμε

$$r\left(\theta\right)=\frac{\left(l^2/GM\right)}{1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{G^2M^2m}}\cos\theta}=\frac{r_0\left(1+\varepsilon\right)}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{19}$$

όπου $\left\{\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{G^2M^2m}}, \qquad r_0=\frac{l^2}{GM\left(1+\varepsilon\right)}\right\}$ (20, α,β)

Στις εκφράσεις (19) και (20 α,β) οι παράμετροι της τροχιάς έχουν εκφραστεί συναρτήσει των σταθερών της κίνησης $\left(E, \quad l\equiv L/m\right)$. Από την έκφραση (20α), για την ελλειπτικότητα, έχουμε

Κατ' αρχήν $1+\frac{2El^2}{G^2M^2m}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2El^2}{G^2M^2m}\geq -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E\geq-\frac{G^2M^2m}{2l^2}}$.

Για αυτή την περιοχή ενεργειών, υπάρχουν οι παρακάτω υποπεριπτώσεις:

$E>0 \quad \left(E_K>\left\|E_\Delta\right\|\right)$	$\upsilon^2>2GM/r$	$\varepsilon>1$	Υπερβολή
$E=0 \quad \left(E_K=\left\|E_\Delta\right\|\right)$	$\upsilon^2=2GM/r$	$\varepsilon=1$	Παραβολή
$E<0 \quad \left(E_K<\left\|E_\Delta\right\|\right)$	$\upsilon^2<2GM/r$	$\varepsilon<1$	Έλλειψη ή Κύκλος

Ειδικότερα, για $E_K<\left|E_\Delta\right|/2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2=GM/r \quad \Rightarrow \quad \varepsilon=0$: κυκλική τροχιά