ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

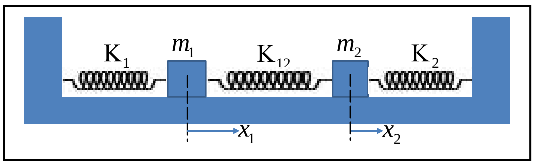
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ

Το πρόβλημα των συζευγμένων ταλαντωτών έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, τόσο από την άποψη της ανάλυσης των βασικών του χαρακτηριστικών, όσο και από την άποψη των εφαρμογών.

Και, όσο μεν αφορά στις εφαρμογές, είναι εύκολα κατανοητό ότι τα περισσότερα συστήματα (μηχανικά, ηλεκτρικά, ή συζευγμένα ηλεκτρομηχανικά συστήματα) αποτελούνται από περισσότερες συνιστώσες, κάθε μία από τις οποίες, κατά την κίνησή της γύρω από μία κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα αρμονικός ταλαντωτής, που όμως, στο πλαίσιο του συστήματος, αλληλεπιδρά επιπλέον και με τους άλλους.

Από την άποψη της μελέτης των βασικών χαρακτηριστικών ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών, προκύπτει ότι ένα τέτοιο σύστημα, ανεξάρτητα από τα επιμέρους χαρακτηριστικά του, παρουσιάζει ορισμένες κοινές συμπεριφορές, (όπως, π.χ., οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης, και οι μεταξύ τους σχέσεις), οι οποίες επανέρχονται σε διάφορους κλάδους των φυσικών επιστημών, αποτελώντας ιδιαίτερα χρήσιμα εννοιολογικά και λογιστικά εργαλεία.

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας ως πρότυπο ένα σχετικά απλό σύστημα και θα προσπαθήσουμε, στη συνέχεια, να γενικεύσουμε τη μέθοδο μελέτης και τα συμπεράσματά μας σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Τέλος, θα δείξουμε ότι με μία κατάλληλη οριακή διαδικασία, μπορούμε να περάσουμε από ένα σύστημα πολλών σημειακών αρμονικών ταλαντωτών σε ένα συνεχές σύστημα, διατυπώνοντας μία «νέα» εξίσωση κίνησης για το συνεχές.



Το σύστημα των συζευγμένων ταλαντωτών του σχήματος αποτελείται από δύο ταλαντωτές μάζας-ελατηρίου, (K_1, M_1), (K_2, M_2), οι μάζες των οποίων συνδέονται με ένα ενδιάμεσο ελατήριο (K_{12}). Όλο το σύστημα είναι στερεωμένο, δεξιά και αριστερά, σε ακλόνητα τοιχώματα (δηλ., σε εξωτερικό σύστημα με άπειρη αδράνεια), και δεχόμαστε (χωρίς αυτή η παραδοχή να μεταβάλει την ουσία των συμπερασμάτων μας, όπως μπορούμε να δούμε παρακάτω), ότι όταν το σύστημα ηρεμεί (κατάσταση ισορροπίας) τότε τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Αν έλειπε το ενδιάμεσο ελατήριο, τότε οι δύο ταλαντωτές, αν διεγείρονταν, θα εκτελούσαν ανεξάρτητη ταλάντωση ο καθένας, με αντίστοιχες συχνότητες $\omega_{01} = \sqrt{K_1/M_1}$ και $\omega_{02} = \sqrt{K_2/M_2}$, και σταθερές πλάτους και φάσης που θα προέκυπταν από τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες. Η παρουσία του ελατηρίου ζεύξης (K_{12}) αναμένεται ότι θα μεταβάλλει την δυναμική του συστήματος.

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος, μέσω των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση των σημειακών μαζών, θα προσπαθήσουμε να εκμεταλλευθούμε τη συμμετρία του συστήματος και να ελέγξουμε ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά που χαρακτηρίζουν την κίνηση του συστήματος. Τα χαρακτηριστικά αυτά αναδεικνύονται όταν φροντίσουμε, με βάση και τη συμμετρία του συστήματος, να εφαρμόσουμε ειδικές αρχικές συνθήκες (ειδική διέγερση του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας). Θα πρέπει επίσης να θυμηθούμε, από το πρόβλημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή ότι το φυσικό περιεχόμενο του μεγέθους ω^2 είναι:

$\omega_0^2 = \frac{s}{m} = \frac{(|F|/|x|)}{m} = \frac{|F|}{|x|m}$: Δύναμη επαναφοράς, ανά μονάδα μάζας και απομάκρυνσης (χρησιμοποιώντας τα μέτρα της δύναμης και της απομάκρυνσης).
Θα πρέπει, επίσης, να έχουμε υπόψη μας, ότι στον απλό αρμονικό ταλαντωτή η συχνότητα ταλάντωσης ω_0 είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών (προσδιορίσεται από τα δομικά χαρακτηριστικά του συστήματος).

Στην περίπτωση που το σύστημα είναι συμμετρικό (K_1=K_2=K, και M_1=M_2=M), μπορούμε εύκολα να κάνουμε τις εξής διαπιστώσεις:

(α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι ταλάντωσης, κατά τους οποίους και οι δύο μάζες ταλαντώνονται με κοινή συχνότητα, και διαφορετικά (εν γένει μιγαδικά, αν υπήρχαν αποσβέσεις) πλάτη. Αν συμβολίσουμε τα (μγαδικά) πλάτη ταλάντωσης της κάθε μάζας με $x_1(t) = x(1,t)$ και $x_2(t) = x(2,t)$, τότε οι δύο τρόποι, που αναφέρονται παραπάνω, έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:
(α_1) Κίνηση «εν φάσει», $x_1(t) = x_2(t)$ και $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t)$. Σε αυτή την περίπτωση, που μπορεί να εξασφαλισθεί με ταυτόσημες αρχικές συνθήκες απομάκρυνσης και ταχύτητας και για τις δύο μάζες, το ενδιάμεσο ελατήριο παραμένει συνεχώς στο φυσικό του μήκος, άρα δεν συνεισφέρει καθόλου δύναμη επαναφοράς σε καμία μάζα. Επομένως, κάθε μάζα αισθάνεται την ίδια δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα απομάκρυνσης, άρα ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{K/M}$
(α_2) Κίνηση «σε αντίθεση φάσης», $x_1(t) = -x_2(t)$ και $\dot{x}_1(t) = -\dot{x}_2(t)$. Σε αυτή την περίπτωση, που μπορεί να εξασφαλισθεί με αντίθετες αρχικές συνθήκες απομάκρυνσης ή/και ταχύτητας και για τις δύο μάζες, το ενδιάμεσο ελατήριο έχει διπλάσια μεταβολή μήκους από εκείνη που έχουν τα δύο ακριανά. Αν θεωρήσουμε ότι έχει την ίδια σταθερά με τα άλλα δύο ελατήρια (K_1=K_2=K_{12}=K), τότε, λόγω της διπλάσιας μεταβολής μήκους ως προς αυτά, θα συνεισφέρει διπλάσια δύναμη επαναφοράς σε κάθε μία μάζα, απ' ότι συνεισφέρει στην κάθε μάζα το αντίστοιχο «δικό της» ελατήριο. Επομένως, κάθε μάζα αισθάνεται την τριπλάσια δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα απομάκρυνσης, άρα ταλαντώνονται και οι δύο με κοινή συχνότητα $\omega_1' = \omega_2' = \sqrt{3K/M}$. Αν τα ακριανά ελατήρια είναι ίδια αλλά διαφέρουν από το κεντρικό ελατήριο σύζευξης, $K_1 = K_2 = K \neq K_0 \equiv K_{12}$ τότε η κοινή συχνότητα των δύο μαζών είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι $\omega_1' = \omega_2' = \sqrt{(K + 2K_0)/M}$.

Στην γενικότερη περίπτωση, η κίνηση των μαζών του συστήματος υπολογίζεται γράφοντας τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης (εξισώσεις του Newton) για κάθε μάζα. Αν υποθέσουμε ότι τα ελατήρια με σταθερές ελατηρίου K_1, K_2, K_{12}, έχουν φυσικά μήκη $l_{1,0}, l_{2,0}, l_{12,0}$, και όταν το σύστημα ηρεμεί, έχουν μήκη ηρεμίας l_1, l_2, l_{12}, αντίστοιχα, τότε η συνθήκη ισορροπίας απαιτεί να ισχύει η διπλή ισότητα

$$K_1(l_1 - l_{1,0}) = K_{12}(l_{12} - l_{12,0}) = K_2(l_2 - l_{2,0}).$$

Αν διαταράξουμε το σύστημα από την κατάσταση ισορροπίας και καταστρώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης σύμφωνα με ένα στιγμιότυπο (χρονική στιγμή, t) κατά το οποίο οι μάζες M_1, M_2 έχουν μετατοπιστεί, από την θέση ισορροπίας, κατά $x_1(t), x_2(t)$, αντίστοιχα, τότε, λόγω της προηγούμενης διπλής ισότητας, οι μόνες καθαρές δυνάμεις που απομένουν ως επιταχύνουσες δυνάμεις, για κάθε μάζα, είναι, αντίστοιχα:

$$M_1 : -x_1K_1 - \left(x_1 - x_2\right)K_{12}$$

$$M_2 : -x_2K_2 - \left(x_2 - x_1\right)K_{12}$$

Επομένως, οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις δύο μάζες, γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} M_1\ddot{x}_1 = -x_1K_1 - \left(x_1 - x_2\right)K_{12} \\ M_2\ddot{x}_2 = -x_2K_2 - \left(x_2 - x_1\right)K_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_1\ddot{x}_1 + x_1K_1 + \left(x_1 - x_2\right)K_{12} = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + x_2K_2 + \left(x_2 - x_1\right)K_{12} = 0 \end{Bmatrix}$$

Ομαδοποιώντας τις συναρτήσεις: $\begin{Bmatrix} M_1\ddot{x}_1 + x_1\left(K_1 + K_{12}\right) - x_2K_{12} = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + x_2\left(K_2 + K_{12}\right) - x_1K_{12} = 0 \end{Bmatrix}$ (1.α,β)

Ας αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi), \qquad (2.α,β)$$

Η μορφές (2.α,β) δικαιολογούντα, με βάση τις ποιοτικές παρατηρήσεις της προηγούμενης σελίδας, ως μία γενίκευση της αναζήτησης τρόπων κίνησης, με διαφορετικά πλάτη αλλά με κοινή συχνότητα και φάση, για όλες τις μάζες του συστήματος, ακόμη και στην περίπτωση του μη-συμμετρικού συστήματος.

[Η παραδοχή αυτή αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με την αναζήτηση δύο κατάλληλων γραμμικών συνδυασμών των $x_1(t), x_2(t)$, με τη βοήθεια των οποίων το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων μετατρέπεται σε δύο μη-συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις. (Βλ., Στ. Τραχανάς, «Διαφορικές Εξισώσεις, Τόμος Ι, Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις», ΠΕΚ 1989, σελ. 299)].

Αντικαθιστώντας στις (1.α,β) τις (2.α,β) και τις παραγώγους τους παίρνουμε :

$$\begin{Bmatrix} \left[\left(-\omega^2M_1 + \left(K_1 + K_{12}\right)\right)A - K_{12}B\right]\cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ \left[-K_{12}A + \left(-\omega^2M_2 + \left(K_2 + K_{12}\right)\right)B\right]\cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{Bmatrix}$$

Για να ισχύουν οι τελευταίες σχέσεις, για κάθε χρονική στιγμή t, θα πρεέπι οι συντελεστές των $\cos(\omega t + \varphi)$ να είναι μηδενικοί. Δηλ., καταλήγουμε σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 2×2 για τα πλάτη A και B, το οποίο (ως ομογενές) είναι επιλύσημο με την προϋπόθεση ότι μηδενίζεται η ορίζουσά του

$$\begin{vmatrix} \left(-\omega^2M_1 + \left(K_1 + K_{12}\right)\right) & -K_{12} \\ -K_{12} & \left(-\omega^2M_2 + \left(K_2 + K_{12}\right)\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Οπότε:

$$\left(-\omega^2M_1 + \left(K_1 + K_{12}\right)\right)\left(-\omega^2M_2 + \left(K_2 + K_{12}\right)\right) - K_{12}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^4M_1M_2 - \omega^2M_1\left(K_2 + K_{12}\right) - \omega^2M_2\left(K_1 + K_{12}\right) + K_1K_2 + K_1K_{12} + K_2K_{12} = 0$$

$$\omega^4M_1M_2 - \omega^2\left[M_1\left(K_2 + K_{12}\right) + M_2\left(K_1 + K_{12}\right)\right] + K_1K_2 + \left(K_1 + K_2\right)K_{12} = 0 \quad (4)$$

Δηλαδή, το σύστημα <u>*είναι επιλύσημο για τις ρίζες και μόνο για τις ρίζες*</u> ω_1^2, ω_2^2 του τελευταίου τριωνύμου. Το τριώνυμο αυτό (ως προς ω^2), έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \left[M_1\left(K_2+K_{12}\right)+M_2\left(K_1+K_{12}\right)\right]^2 - 4M_1M_2\left[K_1K_2+\left(K_1+K_2\right)K_{12}\right]=$$
$$= M_1^2\left(K_2+K_{12}\right)^2 + M_2^2\left(K_1+K_{12}\right)^2 + 2M_1\left(K_2+K_{12}\right)M_2\left(K_1+K_{12}\right)$$
$$-4M_1M_2\left[K_1K_2+\left(K_1+K_2\right)K_{12}\right]=$$
$$= M_1^2\left(K_2+K_{12}\right)^2 + M_2^2\left(K_1+K_{12}\right)^2 - 2M_1M_2\left[K_1K_2+\left(K_1+K_2\right)K_{12}+K_{12}^2\right]+2M_1M_2K_{12}^2 \Rightarrow$$
$$\Delta = \left[M_1\left(K_2+K_{12}\right)-M_2\left(K_1+K_{12}\right)\right]^2 + 2M_1M_2K_{12}^2 > 0$$

Αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου (4) είναι θετική, οι ρίζες του είναι πραγματικές. Επιπλέον, από τη μορφή του τριωνύμου στη σχέση (4), διαπιστώνουμε ότι οι ρίζες του είναι ομόσημες και έχουν θετικό άθροισμα. Επομένως, για οποιοδήποτε συνδυασμό τιμών για τις σταθερές ελατηρίων και για τις μάζες, υπάρχουν δύο ρίζες του τριωνύμου, ω_1^2, ω_2^2 οι οποίες είναι πραγματικές και θετικές.

Αυτό το συμπέρασμα, σε συνδυασμό με την παραδοχή από την οποία ξεκινήσαμε:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t+\varphi), \qquad x_2(t) = B\cos(\omega t+\varphi), \qquad (2.α,β)$$

και το γεγονός ότι το σύστημα (1.α,β) είναι σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, σημαίνει ότι η γενική λύση για κάθε μία από τις συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t)$ θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της μορφής

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (5α)$$
$$x_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (5β)$$

Στις σχέσεις (5.α,β), οι συχνότητες ω_1, ω_2 (που προκύπτουν ως οι θετικές τετραγωνικές ρίζες των λύσεων της εξίσωσης (4)) εξαρτώνται από τις παραμέτρους του συστήματος, $M_1, M_2, K_1, K_2, K_{12}$, και δεν επηρεάζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Όσον αφορά στις σταθερές $A_1, A_2, B_1, B_2, \varphi_1, \varphi_2$, αυτές είναι οι «σταθερές ολοκλήρωσης» του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1.α,β). Αυτό το σύστημα, ως σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, απαιτεί την ύπαρξη δύο σταθερών ολοκλήρωσης, για κάθε συνάρτηση, άρα, συνολικά, τεσσάρων σταθερών ολοκλήρωσης, οι οποίες θα υπολογίζονται με βάση τις ισάριθμες αρχικές συνθήκες του προβλήματος,

$$x_1\left(t=0\right)=x_{01},\ x_2\left(t=0\right)=x_{02},\ \dot{x}_1\left(t=0\right)=\upsilon_{01},\ \dot{x}_2\left(t=0\right)=\upsilon_{02}.$$

Οι συνθήκες αυτές οδηγούν στον υπολογισμό των πλατών A_1, A_2, και των φάσεων φ_1, φ_2. Τα άλλα δύο πλάτη, B_1, B_2 συνδέονται με τα A_1, A_2, αντίστοιχα, μέσω των εξισώσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\left\{\begin{array}{l} \left(-\omega^2 M_1+\left(K_1+K_{12}\right)\right)A - K_{12}B = 0 \\ -K_{12}A+\left(-\omega^2 M_2+\left(K_2+K_{12}\right)\right)B = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.α,β)$$

του οποίου αποτελούν λύσεις. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας σε οποιαδήποτε από τις εξισώσεις (6.α) ή (6.β) την πρώτη από τις δύο λύσεις της εξίσωσης (4), ω_1, υπολογίζουμε το πηλίκο των A_1/B_1. Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας σε οποιαδήποτε από τις εξισώσεις (6.α) ή (6.β) την δεύτερη από τις δύο λύσεις της εξίσωσης (4), ω_2, υπολογίζουμε το πηλίκο των A_2/B_2.

Ας επανέλθουμε στο συμμετρικό σύστημα, $m_1 = m_2 = m$, και $K_1 = K_2 = K_{12} = K$, για να διαπιστώσουμε την ισχύ των αρχικών συμπερασμάτων, στα οποία είχαμε καταλήξει ποιοτικά, (μέσω επιχειρημάτων συμμετρίας). Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (4) γράφεται

$$\omega^4 M_1 M_2 - \omega^2 \left[M_1 \left(K_2 + K_{12} \right) + M_2 \left(K_1 + K_{12} \right) \right] + K_1 K_2 + \left(K_1 + K_2 \right) K_{12} = 0$$

$$\omega^4 M^2 - \omega^2 4MK + 3K^2 = 0 \Rightarrow \omega^4 - \omega^2 4\left(K/M\right) + 3\left(K/M\right)^2 = 0$$

με λύσεις

$$\omega^4 - \omega^2 4\left(K/M\right) + 3\left(K/M\right)^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[4\left(K/M\right) \pm \sqrt{16\left(K/M\right)^2 - 12\left(K/M\right)^2} \right] = \frac{K}{M}\frac{4 \pm 2}{2}$$

Επομένως, οι συχνότητες των δύο ΚΤΤ είναι τέτοιες ώστε: $\omega_1^2 = \frac{K}{M}, \omega_2^2 = 3\frac{K}{M}$, όπως προέκυψε και με βάση την ποιοτική ανάλυση με την οποία ξεκινήσαμε.

Για τον πρώτο ΚΤΤ, τα πλάτη έχουν λόγο $A_1 = B_1$. Για τον δεύτερο ΚΤΤ, τα πλάτη έχουν λόγο $A_1 = -B_1$. Επομένως

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (7.\alpha,\beta)$$

Οι σταθερές $\left(A_1, A_2\right)$ και $\left(\varphi_1, \varphi_2\right)$ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, $\left(x_{0,1}, x_{0,2}\right)$ και $\left(\upsilon_{0,1}, \upsilon_{0,2}\right)$. Συγκεκριμένα, για αρχικές συνθήκες θέσης $\left(x_{0,1} = x_0, x_{0,2} = 0\right)$, και ταχύτητας $\left(\upsilon_{0,1} = 0, \upsilon_{0,2} = 0\right)$, από τις εξίσώσεις (7.α,β) προκύπτει:

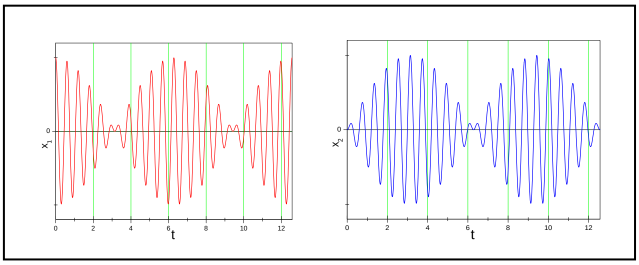
$$x_0 = A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2) \qquad (8\alpha)$$
$$0 = A_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \cos(\varphi_2) \qquad (8\beta)$$
$$0 = -\omega_1 A_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\varphi_2) \qquad (8\gamma)$$
$$0 = -\omega_1 A_1 \sin(\varphi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\varphi_2) \qquad (8\delta)$$

Συνδυάζοντας: $(8\gamma) + (8\delta) \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = 0}$, $(8\gamma) - (8\delta) \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 0}$

$(8\alpha) + (8\beta) \Rightarrow \boxed{A_1 = x_0/2}$, $(8\alpha) - (8\beta) \Rightarrow \boxed{A_2 = x_0/2}$

Τελικά: $x_1(t) = \left(x_0/2\right)\left[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$

$$x_2(t) = \left(x_0/2\right)\left[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$$



Οι x_1 και x_2, ως συναρτήσεις του χρόνου, φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου φαίνεται η μεταφορά κίνησης από τον ένα στον άλλο ταλαντωτή, λόγω της σύζευξης (όπου έχει επιλεγεί, για λόγους ευκρινούς αναπαράστασης του φαινομένου, να ισχύει: $K_{12} \ll K_1 = K_2 = K$).

[Δείτε επίσης: https://www.youtube.com/watch?v=YyOUJUOUvso]

Κανονικές Συντεταγμένες

Ως κανονικές συντεταγμένες $X_1(t), X_2(t)$, που αντιστοιχούν από μία σε κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης, ορίζονται οι κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί των συμβατικών συντεταγμένων, $x_1(t), x_2(t)$, που ταλαντώνονται μόνο με τη συχνότητα του αντίστοιχου τρόπου. Οι κανονικές συντεταγμένες υπολογίζονται από τις (7.α,β), με τις κατάλληλες απαλοιφές. Στην ειδική περίπτωση του παραδείγματος που αναλύουμε, με προσθαφαίρεση προκύπτει:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ X_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned} \qquad (8.α,β)$$

και, αντίστροφα $x_1(t) = \dfrac{X_1(t) + X_2(t)}{2}, \quad x_2(t) = \dfrac{X_1(t) - X_2(t)}{2}$ (9.α,β)

Εκφράζοντας τις συμβατικές συντεταγμένες $x_1(t), x_2(t)$, συναρτήσει των κανονικών συντεταγμένων $X_1(t), X_2(t)$, διαπιστώνουμε ότι χαρακτηρίζονται από τις εξής ιδιότητες:

1) Οι Κανονικές Συντετγμένες προκύπτουν, στη γενικότερη περίπτωση μέσω απαλοιφής όλων των άλλων συχνοτήτων, (πλην εκείνης που αντιστοιχεί στην ΚΣ), από τις εξισώσεις κίνησης των συμβατικών συντεταγμένων.
2) Οι διαφορικές εξισώσει τις οποίες ικανοποιούν οι κανονικές συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και αποτελούν ένα τετριμμένο σύστημα (μη-συζευγμένων) διαφορικών εξισώσεων, δηλ., $\begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0 \end{Bmatrix}$
3) Η συνολική ενέργεια του συστήματος, όταν εκφράζεται συναρτήσει των συμβατικών συντεταγμένων, πέραν των τετραγωνικών όρων των συντεταγμένων και των χρονικών παραγώγων τους, περιέχει και γινόμενα μεταξύ των συμβατικών συντεταγμένων,

$$E = E_K + E_\Delta = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}K\left(x_1 - x_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + Kx_1^2 + Kx_2^2 + K\left(x_1 x_2\right)$$

ενώ, όταν εκφραστεί συναρτήσει των κανονικών συντεταγμένων, περιέχουν μόνο τετραγωνικούς όρους των κανονικών συντεταγμένων και των χρονικών παραγώγων τους $\dot{X}_{1,2} = V_{1,2}$.

$$E = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}K\left(x_1 - x_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(X_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}MV_1^2 + \frac{1}{4}KX_1^2 + \frac{1}{4}MV_2^2 + \frac{1}{4}3KX_2^2 = \left[\frac{1}{4}MV_1^2 + \frac{1}{4}M\omega_1^2 X_1^2\right] + \left[\frac{1}{4}MV_2^2 + \frac{1}{4}M\omega_2^2 X_2^2\right]$$

4) Η συνολική ενέργεια του κάθε κανονικού τρόπου ταλάντωσης, (όπως περιγράφεται μέσω των αντίστοιχων Κανονικών Συντεταγμένων), είναι σταθερή με το χρόνο, (εν αντιθέσει με τη μεταφορά ενέργειας από τον έναν πραγματικό ταλαντωτή προς τον άλλον, συναρτήσει του χρόνου).

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΥ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Στη γενικότερη περίπτωση των δύο αρμονικών ταλαντωτών που έχουν συζευχθεί ελαστικά, η υπόθεση των ΚΤΤ οδηγεί σε ένα σύστημα 2x2 για τα πλάτη *A* και *B*, της μορφής:

$$\left.\begin{cases}\left(-\omega^2 M_1 + a_{11}\right)A + a_{12}B = 0 \\ a_{21}A + \left(-\omega^2 M_2 + a_{22}\right)B = 0\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix}\left(-\omega^2 M_1 + a_{11}\right) & a_{12} \\ a_{21} & \left(-\omega^2 M_2 + a_{22}\right)\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 M_2 \omega^4 - \left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right)\omega^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Με ρίζες:

$$\omega_{1,2}^2 = \left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right) \pm \sqrt{\left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right)^2 - 4M_1 M_2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}$$

Για να είναι πραγματικές και οι δύο ρίζες:

$$\left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right)^2 - 4M_1 M_2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(M_1 a_{22} - M_2 a_{11}\right)^2 + 4M_1 M_2 a_{12}a_{21} > 0$$

που ισχύει, λόγω του ομόσημου των $a_{12},\ a_{21}$

Προκειμένου να είναι θετική και η ρίζα με το αρνητικό πρόσημο του ριζικού, πρέπει

$$\left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right) > \sqrt{\left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right)^2 - 4M_1 M_2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right)^2 > \left(M_1 a_{22} + M_2 a_{11}\right)^2 - 4M_1 M_2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4M_1 M_2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) > 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$$

Μετά τον υπολογισμό των ριζών, επιστρέφουμε σε μία από τις εξισώσεις, π.χ., την $1^η$ εξίσωση, και αντικαθιστώντας την κάθε μία από τις 2 ρίζες στη θέση του ω^2, υπολογίζουμε τους λόγους των πλατών για κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης,

$$\left(-\omega_{1,2}^2 M_1 + a_{11}\right)A_{1,2} + a_{12}B_{1,2} = 0 \Rightarrow a_{12}B_{1,2} = \left(\omega_{1,2}^2 M_1 - a_{11}\right)A_{1,2} \Rightarrow \boxed{B_{1,2} = \frac{\left(\omega_{1,2}^2 M_1 - a_{11}\right)}{a_{12}}A_{1,2}}$$

Γενικά, για ένα σύστημα με Ν-το-πλήθος ταλαντωτές οι οποίοι είναι συζευγμένοι μεταξύ τους με ελατήρια, και οι οποίοι κινούνται λόγω κάποιας αρχικής διαταραχής και λόγω των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων (δηλ., χωρίς της επίδραση εξωτερικών αλληλελπιδράσεων), μπορούμε να διαπιστώσουμε τα εξής:

(α) Αν κάθε ταλαντωτής έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας (δηλ., κινείται μόνο κατά μήκος μίας διεύθυνσης) και υπάρχει ένα ακλόνητο σημείο του συστήματος των ελατηρίων (π.χ., το ένα άκρο ενός ελατηρίου), τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την κίνηση των συζευγμένων ταλαντωτών, ανάγεται, μέσω της υπόθεσης των Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $\left(x_i\left(t\right) = A_i \cos\left(\omega t + \varphi\right)\right)$, σε ένα Ν×Ν ομογενές γραμμικό σύστημα για τα πλάτη $\left(A_i,\ i = 1,2,\ldots N\right)$.

(β) Η συνθήκη επιλυσιμότητας του Ν×Ν ομογενούς γραμμικού συστήματος διατυπώνεται ως απαίτηση να μηδενίζεται η Ν×Ν ορίσουσα των συντελεστών του, σε κάθε γραμμή της οποίας υπάρχει ένας όρος περιέχει το ω^2, ο οποίος προέρχεται από τον αντίστοιχο όρο επιτάχυνσης, $\left(m_i \ddot{x}_i\left(t\right) = -\omega^2 m_i A_i \cos\left(\omega t + \varphi\right)\right)$.

(γ) Επομένως, ο μηδενισμός της N×N ορίζουσας των συντελεστών, (η οποία αναπτύσσεται σε ένα N-τάξης πολυώνυμο, ως προς της ω^2), ανάγεται σε μία έκφραση: $a_N(\omega^2)^N + a_{N-1}(\omega^2)^{N-1} + ... + a_1(\omega^2) + a_0 = 0$.

(δ) Οι ρίζες, $\left(\omega_1^2, \omega_2^2, ...\omega_{N-1}^2, \omega_N^2\right)$ του παραπάνω χαρακτηριστικού πολυωνύμου, $a_N(\omega^2)^N + a_{N-1}(\omega^2)^{N-1} + ... + a_1(\omega^2) + a_0 = 0$, είναι πραγματικές και θετικές, και είναι τα τετράγωνα των ***ιδιοσυχνοτήτων*** $\left(\omega_j, \quad j = 1, 2, ...N\right)$ του συστήματος των συζευγμένων ταλαντωτών.

(ε) Επειδή, με βάση τα προηγούμενα, η υπόθεση των ΚΤΤ, οδηγεί σε N-το-πλήθος ιδιοσυχνότητες, η γενική λύση για την κίνηση του κάθε ταλαντωτή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των ΚΤΤ $\left(x_i(t) = \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} \cos\left(\omega_j t + \varphi_j\right)\right)$.

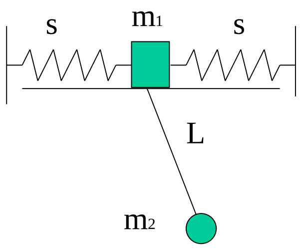
(στ) Η σχέση των πλατών, $A_{i,j}$, με τα οποία συμμετέχει κάθε ΚΤΤ, με ιδιοσυχνότητα ω_j, στην κίνηση x_i, του ταλαντωτή m_i, προκύπτει από την επίλυση του N×N ομογενούς γραμμικού συστήματος των πλατών $A_{i,j}$ για την συγκεκριμένη ω_j. Επειδή το σύστημα είναι ομογενές, υπολογίζονται τα πηλίκα των πλατών $A_{i,j} / A_{1,j}$.

(ζ) Με αυτόν τον τρόπο απομένουν προς προσδιορισμό οι 2N-σταθερές, $\left(A_{1,j}, \varphi_j\right)$, οι οποίες προσδιορίζονται από τις 2N-αρχικές-συνθήκες θέσης και ταχύτητας του κάθε ταλαντωτή, $\left(x_i(t=0) = x_{o,i}, \dot{x}_i(t=0) = \upsilon_{o,i}\right)$.

Τα προηγούμενα βήματα (α) – (δ) είναι η διαδικασία της διαγωνοποίησης ενός N×N τετραγωνικού πίνακα μέσω της εύρεσης των ιδιοτιμών του $\left(\omega_j, \quad j = 1, 2, ...N\right)$ και των ιδιοδιανυσμάτων του $A_{1,j}, A_{2,j}, A_{3,j}, ..., A_{N-1,j}, A_{N,j}$, για κάθε ιδιοτιμή ω_j.

Στην περίπτωση που το προηγούμενο σύστημα των N-συζευγμένων ταλαντωτών είναι ελεύθερο (δεν υπάρχει ελατήριο συνδεδεμένο με ακλόνητο σημείο), τότε μία από τις $\left(\omega_j, \quad j = 1, 2, ...N\right)$ ιδιοσυχνότητες έχει μηδενική τιμή, $\left(\omega_k = 0\right)$ και αντιστοιχεί στην ακινησία ή την ισοταχή κίνηση του Κέντρου Μάζας του συστήματος, (δηλ., όλα τα αντίστοιχα πλάτη είναι ίσα, $A_{1,k} = A_{2,k} = ... = A_{N,k}$).

Στην περίπτωση που κάθε ταλαντωτής είναι ελεύθερος να κινείται στις τρεις κατευθύνσεις $\left(x_i, y_i, z_i\right)$, τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει των κίνηση των συζευγμένων ταλαντωτών, γίνεται ένα (3N×3N) σύστημα με γενίκευση των αντίστοιχων συμπερασμάτων. Αν το σύστημα είναι ελεύθερο (δεν υπάρχει, δηλ., ακλόνητο σημείο του συστήματος των ελατηρίων), τότε υπάρχουν 3-μηδενικές ιδιοσυχνότητες (που αντιστοιχούν στην ισοταχή κίνηση του ΚΜ στις *x*-*y*-*z* διευθύνσεις).



Παράδειγμα 10.1. Σώμα μάζας m_1 ευρίσκεται μεταξύ δύο ακλόνητων τοιχωμάτων με τα οποία είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια σταθεράς s, το καθένα, και μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές Από το σώμα κρέμεται, με αβαρές μη-εκτατό νήμα μήκους L, σώμα μάζας m_2. α) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης, για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ισορροπίας. Στην περίπτωση που $s/m_1 = g/L = \omega_0^2,\quad m_2 = 2m_1$: β) Να υπολογίσετε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης,. γ) Να προσδιορίσετε τις κανονικές μεταβλητές.

<u>Απάντηση</u>

(α) Έστω ότι x_1, x_2 είναι οι μετακινήσεις των δύο μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους, σε κάποιο τυχαίο στιγμιότυπο της κίνησής τους. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης γράφονται:

$m_1\ddot{x}_1 = -2sx_1 + T_x$, και $m_1\ddot{x}_2 = -T_x$, όπου $T_x \equiv Tsin\theta$, ενώ, (λόγω των μικρών γωνιών ταλάντωσης),

$$T_y \equiv T\cos\theta = m_2 g \quad \Rightarrow T = \frac{m_2 g}{\cos\theta} \quad \Rightarrow T_x = m_2 g\tan\theta \approx m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L} = m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1),$$

οπότε οι εξισώσεις κίνησης γράφονται: $m_1\ddot{x}_1 = -2sx_1 + m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1)$,

$m_2\ddot{x}_2 = -m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1)$. Ισοδύναμα :

$$\left\{\begin{matrix} m_1\ddot{x}_1 = -2sx_1 + m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} m_1\ddot{x}_1 + 2sx_1 - m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2\frac{g}{L}(x_2 - x_1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \frac{m_2}{m_1}\omega_0^2(x_2 - x_1) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_2 - x_1) = 0 \end{matrix}\right\}$$

(β) Στην περίπτωση που $s/m_1 = g/L = \omega_0^2,\quad m_2 = 2m_1$, έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2(x_2 - x_1) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_2 - x_1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ddot{x}_1 + 4\omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 = 0 \\ -\omega_0^2 x_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Οπότε, θέτοντας

$$\left\{\begin{matrix} x_1 = A\cos(\omega t + \theta) \\ x_2 = B\cos(\omega t + \theta) \end{matrix}\right\}$$

παίρνουμε:

$$\left\{\begin{matrix} (4\omega_0^2 - \omega^2)A - 2\omega_0^2 B = 0 \quad (1a) \\ -\omega_0^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \quad (1\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (4\omega_0^2 - \omega^2) & -2\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 5\omega_o^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

με ρίζες $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2})$

(γ) Για τον προσδιορισμό των κανονικών μεταβλητών, προσδιορίζουμε πρώτα το λόγο των πλατών A/B για κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης, από τις εξισώσεις (1α) ή (1β), παραπάνω. Συγκεκριμένα :

για $\omega=\omega_1$, η σχέση : $(1a)\Rightarrow(4\omega_o^2-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\omega_0^2)A_1=2\omega_o^2B_1\Rightarrow\frac{B_1}{A_1}=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$.

για $\omega=\omega_2$, η σχέση : $(1a)\Rightarrow(4\omega_o^2-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\omega_o^2)A_2=2\omega_o^2B_2\Rightarrow\frac{B_2}{A_2}=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$.

Οπότε, η γενική κίνηση γράφεται ως εξής:

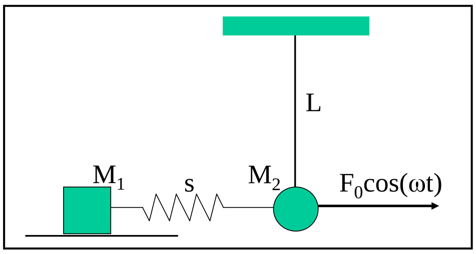
$$x_1(t)=A_1\cos(\omega_1t+\theta_1)+A_2\cos(\omega_2t+\theta_2)\Rightarrow x_1(t)=A_1\cos(\omega_1t+\theta_1)+A_2\cos(\omega_2t+\theta_2) \qquad (2a)$$

$$x_2(t)=B_1\cos(\omega_1t+\theta_1)+B_2\cos(\omega_2t+\theta_2)\Rightarrow x_2(t)=\frac{3-\sqrt{17}}{4}A_1\cos(\omega_1t+\theta_1)+\frac{3+\sqrt{17}}{4}A_2\cos(\omega_2t+\theta_2) \quad (2\beta)$$

Απαλείφοντας από τις (2α) και (2β) εναλλάξ τους όρους με την μία ή την άλλη συχνότητα παίρνουμε:

$-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\times(2a)+(2\beta)\Rightarrow\left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4}x_1+x_2\right)=-\frac{\sqrt{17}}{2}A_1\cos(\omega_1t+\theta_1)$, άρα η πρώτη κανονική συντεταγμένη, που ταλαντώνεται με την πρώτη ιδιοσυχνότητα είναι ο συνδυασμός $\left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4}x_1+x_2\right)=X_1$.

Όμοια, προκύπτει η δεύτερη κανονική συντεταγμένη του συστήματος $\left(-\frac{3-\sqrt{17}}{4}x_1+x_2\right)=X_2$



Παράδειγμα10.2: Συζευγμένοι Ταλαντωτές υπό εξωτερική διέγερση Σημειακή μάζα M_1 βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, επί του οποίου μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές. Η μάζα αυτή είναι συνδεδεμένη, μέσω ελατηρίου σταθεράς s, με σημειακή μάζα M_2 η οποία κρέμεται από ακλόνητη οροφή με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους L, μέσα σε πεδίο βαρύτητας (g). Στην μάζα M_2 ασκείται οριζόντια δύναμη της μορφής $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, ώστε οι δύο μάζες να εκτελούν κινήσεις μικρού πλάτους.

(α) Γράψτε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης των δύο μαζών.

(β) Υποθέστε ότι, ***στη μόνιμη κατάσταση κίνησης***, οι δύο μάζες κινούνται με την συχνότητα της διέγερσης ω και με διαφορετικά πλάτη, $x_1=A\cos(\omega t)$ και $x_2=B\cos(\omega t)$, και αντικαθιστώντας στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης, γράψτε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που ικανοποιούν τα πλάτη A και B.

(γ) Λύστε το γραμμικό σύστημα και υπολογίστε τα πλάτη A και B, συναρτήσει των ω^2, $\omega_{01}^2={}^{s}\!/_{M_1}$, $\omega_{02}^2={}^{g}\!/_{L}$ και $\lambda={}^{M_1}\!/_{M_2}$.

(δ) Δείξτε ότι και τα δύο πλάτη A και B τείνουν στο άπειρο, για δύο τιμές, ω_1 και ω_2 της συχνότητας διέγερσης και υπολογίστε τις ω_1 και ω_2, συναρτήσει του ω_{01}, αν $\omega_{02} = 0.5\omega_{01}$ και $\lambda = 0.75$.

(ε) Εξηγείστε τη σχέση που έχουν οι ω_1 και ω_2 με τις ιδιοσυχνότητες του συζευγμένου συστήματος.

<u>Απάντηση</u>

Αν x_1 και x_2 οι μετατοπίσεις, από τις θέσεις ισορροπίας, των μαζών m_1 και m_2, αντίστοιχα, οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\left.\begin{array}{c} M_1\ddot{x}_1 = -s(x_1 - x_2) \\ M_2\ddot{x}_2 = -s(x_2 - x_1) - M_2 g\dfrac{x_2}{L} + F_0\cos(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} M_1\ddot{x}_1 + sx_1 - sx_2 = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + sx_2 + M_2 g\dfrac{x_2}{L} - sx_1 = F_0\cos(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} M_1\ddot{x}_1 + sx_1 - sx_2 = 0 \\ -sx_1 + M_2\ddot{x}_2 + sx_2 + M_2 g\dfrac{x_2}{L} = F_0\cos(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \ddot{x}_1 + \dfrac{s}{M_1}x_1 - \dfrac{s}{M_1}x_2 = 0 \\ -\dfrac{s}{M_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \dfrac{s}{M_2}x_2 + \dfrac{g}{L}x_2 = \dfrac{F_0}{M_2}\cos(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{x}_1 + \dfrac{s}{M_1}x_1 - \dfrac{s}{M_1}x_2 = 0 \\ -\dfrac{s}{M_2}\dfrac{M_1}{M_1}x_1 + \ddot{x}_2 + \dfrac{s}{M_2}\dfrac{M_1}{M_1}x_2 + \dfrac{g}{L}x_2 = \dfrac{F_0}{M_2}\cos(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \ddot{x}_1 + \dfrac{s}{M_1}x_1 - \dfrac{s}{M_1}x_2 = 0 \\ -\dfrac{s}{M_1}\dfrac{M_1}{M_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \dfrac{s}{M_1}\dfrac{M_1}{M_2}x_2 + \dfrac{g}{L}x_2 = \dfrac{F_0}{M_2}\cos(\omega t) \end{array}\right\}$$

(β) Έστω ότι $x_1 = A\cos(\omega t)$ και $x_2 = B\cos(\omega t)$, επομένως: $\ddot{x}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t)$ και $\ddot{x}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t)$

$$\left.\begin{array}{c} \left(\dfrac{s}{M_1} - \omega^2\right)A - \dfrac{s}{M_1}B = 0 \\ -\dfrac{s}{M_1}\dfrac{M_1}{M_2}A + \left(\dfrac{s}{M_1}\dfrac{M_1}{M_2} + \dfrac{g}{L} - \omega^2\right)B = \dfrac{F_0}{M_2} \end{array}\right\}$$

(γ) Αν, $\omega_{01}^2 = {s}/{M_1}$, $\omega_{02}^2 = {g}/{L}$ και $\lambda = {M_1}/{M_2}$, τότε το προηγούμενο γραμμικό σύστημα γράφεται

$$\left.\begin{array}{c} \left(\omega_{01}^2 - \omega^2\right)A - \omega_{01}^2 B = 0 \\ -\omega_{01}^2\lambda A + \left(\omega_{01}^2\lambda + \omega_{02}^2 - \omega^2\right)B = \dfrac{F_0}{M_2} \end{array}\right\}$$ και οι λύσεις του προκύπτουν με τη μέθοδο των ορίζουσών

$$A=\frac{\begin{vmatrix}0 & -\omega_{01}^2\\ F_0/M_2 & \lambda\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\omega_{01}^2-\omega^2 & -\omega_{01}^2\\ -\lambda\omega_{01}^2 & \lambda\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\end{vmatrix}}=\frac{\omega_{01}^2\,F_0/M_2}{\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)\left(\lambda\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\right)-\lambda\omega_{01}^4}$$

$$B=\frac{\begin{vmatrix}\omega_{01}^2-\omega^2 & 0\\ -\lambda\omega_{01}^2 & F_0/M_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\omega_{01}^2-\omega^2 & -\omega_{01}^2\\ -\lambda\omega_{01}^2 & \lambda\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\end{vmatrix}}=\frac{\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)F_0/M_2}{\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)\left(\lambda\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\right)-\lambda\omega_{01}^4}$$

(δ) Τα πλάτη A και B απειρίζονται όταν ο κοινός παρανομαστής τείνει στο μηδέν

$$\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)\left(\lambda\omega_{01}^2+\omega_{02}^2-\omega^2\right)-\lambda\omega_{01}^4=0\Rightarrow\lambda\omega_{01}^4-\lambda\omega_{01}^2\omega^2+\omega_{01}^2\omega_{02}^2-\omega_{02}^2\omega^2-\omega_{01}^2\omega^2+\omega^4-\lambda\omega_{01}^4=0$$

$\omega^4-\left(\lambda\omega_{01}^2+\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)\omega^2+\omega_{01}^2\omega_{02}^2=0$, οι ρίζες του οποίου υπολογίζονται

$\omega_{1,2}^2=\dfrac{1}{2}\left[\left((\lambda+1)\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)\pm\sqrt{\left((\lambda+1)\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)^2-4\omega_{01}^2\omega_{02}^2}\right]$, του οποίου η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta=\left((\lambda+1)\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)^2-4\omega_{01}^2\omega_{02}^2=(\lambda+1)^2\omega_{01}^4+\omega_{02}^4+2(\lambda+1-2)\omega_{01}^2\omega_{02}^2$$

$$\Delta=(\lambda+1)^2\omega_{01}^4+\omega_{02}^4+2(\lambda+1-2)\omega_{01}^2\omega_{02}^2=(\lambda-1+2)^2\omega_{01}^4+\omega_{02}^4+2(\lambda-1)\omega_{01}^2\omega_{02}^2=$$

$$=\left[(\lambda-1)^2+4+2(\lambda-1)\right]\omega_{01}^4+\omega_{02}^4+2(\lambda-1)\omega_{01}^2\omega_{02}^2=(\lambda-1)^2\omega_{01}^4+\omega_{02}^4+2(\lambda-1)\omega_{01}^2\omega_{02}^2+2(\lambda+1)\omega_{01}^4$$

Τελικώς : $\Delta=\left[(\lambda-1)^2\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right]^2+2(\lambda+1+\omega_{01}^4>0$, επομένως οι ρίζες $\omega_{1,2}^2$ είναι πραγματικές και μάλιστα θετικές, αφού η θετική $\sqrt{\Delta}$ είναι μικρότερη του όρου $\left((\lambda+1)\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)$ από τον οποίον προσθαφαιρείται . Αν $\omega_{02}=0.5\,\omega_{01}$ και $\lambda=0.75$, από τη σχέση υπολογισμού των δύο ριζών, έχουμε :

$$\omega_{1,2}^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\omega_{01}^2$$

(ε) Οι $\omega_{1,2}^2=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}\omega_{01}^2$ είναι οι ιδιοσυχνότητες του συζευγμένου συστήματος

Επίσης παρατηρούμε ότι για $\omega=\omega_{01}$, (ιδιοσυχνότητα του ασύζευκτου συστήματος 1), το πλάτος B μηδενίζεται, ενώ το A (πλάτος ταλάντωσης του συστήματος 1), παραμένει πεπερασμένο, (η διέγερση «προτιμάει να περάσει» στο σύστημα με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης του οποίου «ταιριάζει» η συχνότητα διεγερσης). Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται και ως «αντι-συντονισμός», και χρησιμοποιείται στην περίπτωση που χρειάζεται να «διοχετεύσουμε» μία ανεπιθύμητη συχνότητα από ένα σύστημα (π.χ., Μ2) σε ένα βοηθητικό σύστημα απορρόφησης (π.χ., Μ1).