4

Έργο και Ενέργεια

4.1 Έργο σε μία διάσταση

Το έργο μιας σταθερής δύναμης F_x, η οποία ασκείται σε ένα σώμα που κινείται σε μία διάσταση x, ορίζεται ως

$$W = F_x \Delta x \Leftrightarrow \text{Έργο Δύναμης} = \text{Δύναμη} \times \text{Μετατόπιση}$$

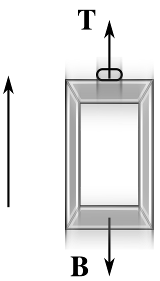
Έχουμε

$$\begin{cases} W > 0, & \text{εάν } F_x,\ \Delta x \text{ ομόρροπα} \\ W < 0, & \text{εάν } F_x,\ \Delta x \text{ αντίρροπα} \end{cases}$$

Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι:

$$1\,\text{Joule} = 1\,\text{Nt} \times 1\,\text{m} = 1\,\text{Kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Παράδειγμα 1



Ανελκυστήρας με μάζα M ανέρχεται ομαλά.

$$W_B = -Bh, \qquad W_T = Th$$

$$B = T \Rightarrow W_T = -W_B$$

Εάν δεν έχουμε ομαλή κίνηση τότε:

$$T - B = Ma \Rightarrow W_T = Th > |W_B| = Bh$$

Άνθρωπος ακίνητος που κρατάει ένα βάρος δεν παράγει έργο, αν και καταναλώνεται ενέργεια στους μυς για να κρατήσει το βάρος.
Αν ο άνθρωπος είναι μέσα σε ανελκυστήρα που κινείται ομαλά προς τα επάνω, τότε για έναν παρατηρητή εκτός ανελκυστήρα δίνεται έργο στο «βάρος» για να μετακινηθεί προς τα επάνω.

Αν η δύναμη είναι μεταβλητή:

$$F = F(x)$$

τότε χωρίζουμε το διάστημα μετακίνησης $[a, b]$ σε μικρά τμήματα, έστω N, και υποθέτουμε τη δύναμη σταθερή σε αυτά τα μικρά διαστήματα:

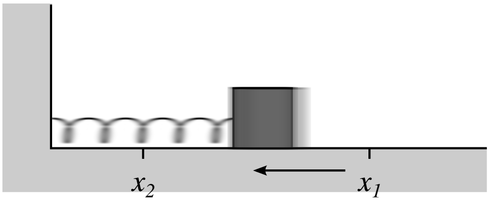
$$W_{\text{ολικό}} = \sum_{k=1}^{N} \Delta W_k = \sum_{k=1}^{N} F(x_k) \Delta x_k$$

και, τέλος, παίρνουμε τη διαμέριση $N \to \infty$, $|\Delta x_k| \to 0$

$$\Rightarrow W_{\text{ολικό}} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} F(x_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) \mathrm{d}x$$

Παράδειγμα 2

Ελατήριο ασκεί δύναμη $F(x) = -kx$ σε σωματίδιο που κινείται από τη θέση $x_1 = a$ στη $x_2 = b$. Ποιο είναι το έργο της δύναμης του ελατηρίου που προσφέρεται στο σώμα;



Σχήμα 4.1

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\mathrm{d}x = -k\int_{x_1}^{x_2} x\mathrm{d}x = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Παράδειγμα 3

Σώμα μάζας m μετακινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ που εξαρτάται από την θέση x, όπου

$$\mu(x) = \frac{\mu_0}{1+\frac{x}{a}}$$

και μ_0 μια σταθερά με διαστάσεις μήκους. Πόσο έργο καταναλώνεται από την δύναμη τριβής για μετατόπιση του αντικειμένου από τη θέση $x_1 = a$ έως τη θέση $x_2 = 2a$;

Η δύναμη της τριβής T κατά την κίνηση του σώματος είναι ίση με

$$T = \mu N = \mu B = \mu mg \qquad \Rightarrow \qquad T(x) = \mu_0 mg\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$

Το έργο της τριβής δίνεται από το ολοκλήρωμα της δύναμης $T(x)$ από την θέση $x_1 = a$ έως την θέση $x_2 = 2a$

$$W_{1\to 2}^{T} = \int_{x_1}^{x_2} \mu_0 mg\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x}{a}} = \mu_0 mg\int_{x_1/a}^{x_2/a}\frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \mu_0 mg\ln(\frac{1+\frac{x_2}{a}}{1+\frac{x_1}{a}}) = \mu_0 mg\ln(\frac{3}{2})$$

Παράδειγμα 4

Δύναμη $F = 6t$ σε Nt, όπου t είναι ο χρόνος, ασκείται σε σώμα μάζας $m = 2$ Kg. Αν το σώμα ήταν αρχικά σε ηρεμία να βρεθεί το έργο της δύναμης στα πρώτα δύο δευτερόλεπτα της κίνησης του.

Το έργο της δύναμης F δίνεται από το ολοκλήρωμα $W = \int_A^B F\mathrm{d}x$, όπου το κάτω όριο A αντιστοιχει σε $t = 0$ και το πάνω όριο B σε $t = 2$. Επειδή η δύναμη F στο ολοκλήρωμα εξαρτάται από τον χρόνο εκφράζουμε και το $\mathrm{d}x$ σαν συνάρτηση του χρόνου.

Υπολογίζουμε λοιπόν την συνάρτηση $x(t)$ από τον νόμο του Νεύτωνα:

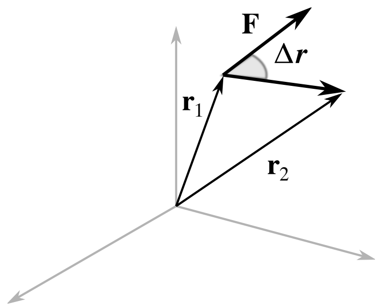
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{m}F(t)\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow v = \frac{1}{m}\int_0^t F(t')\mathrm{d}t' = 3\int_0^t t'\mathrm{d}t' = \frac{3}{2}t^2$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}t^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{3}{2}\int_0^t t'^2\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}t^3$$

Εκφράζουμε το διαφορικό $\mathrm{d}x$ ως προς τον χρόνο $\mathrm{d}x = \frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$ και ολοκληρώνουμε

$$W = \int_0^2 6t\cdot\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t = 9\int_0^2 t^3\mathrm{d}t = \frac{9}{4}t^4|_0^2 = \frac{9}{4}\cdot 16 = 36 \quad \text{Joule}$$

4.2 Έργο δύναμης στο χώρο

Εάν το σώμα κινηθεί κατά $\Delta \boldsymbol{r}$ υπό την επίδραση της δύναμης $\boldsymbol{F}$, το στοιχειώδες έργο ΔW της δύναμης ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης επί τη μετατόπιση:



$$\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F\,\Delta r \cos\theta$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \Delta \boldsymbol{r}$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες έχουμε

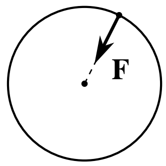
$$\boldsymbol{F} = F_x \hat{\boldsymbol{x}} + F_y \hat{\boldsymbol{y}} + F_z \hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \Delta x \hat{\boldsymbol{x}} + \Delta y \hat{\boldsymbol{y}} + \Delta z \hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Εάν $\boldsymbol{F} \perp \Delta \boldsymbol{r} \Rightarrow \Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = 0$.

Παράδειγμα 5



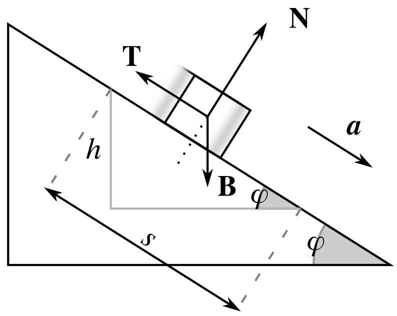
Κυκλική κίνηση, κεντρομόλος Δύναμη $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_k$$

$$\text{Έργο}_F = 0$$

διότι $\boldsymbol{F} \perp$ μετατόπιση.

Παράδειγμα 6



Ολίσθηση σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο.
Έργο αντίδρασης $= 0$, δύναμη $\boldsymbol{N}$ κάθετη στη μετατόπιση.

$$W_N = 0, \qquad W_T = -T \cdot s$$

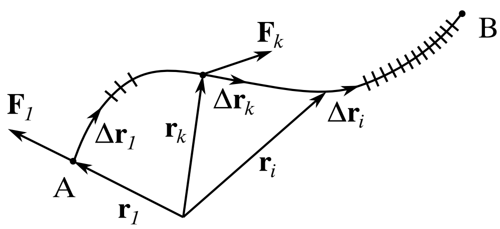
$$W_B = B\sin\phi \cdot s = Bh, \quad W_B > |W_T|$$

Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\begin{cases} B\sin\phi - T &= ma \\ B\cos\phi &= N \\ T = \mu N \end{cases}$$

Έργο (μεταβλητής δύναμης) όταν το σώμα κινείται από τη θέση A στη θέση B

Χωρίζουμε το δρόμο $A \to B$ σε μικρά ευθύγραμμα τμήματα $\Delta \boldsymbol{r}_k$ με $k = 1, \ldots, N$. Υπολογίζουμε το έργο της δύναμης χωριστά σε κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, επομένως $\Delta W_k = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k$



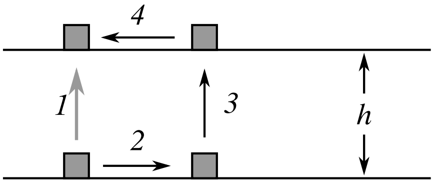
Σχήμα 4.2

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

Η προηγούμενη ολοκληρωτική σχέση που μας δίνει το έργο της δύναμης στο επίπεδο (δύο διαστάσεις) ή στο χώρο (τρείς διαστάσεις) στα μαθηματικά χαρακτηρίζεται σαν ένα ¨Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα¨.

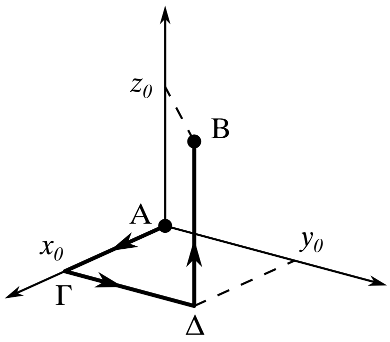
Παράδειγμα 7: Έργο βάρους για σταθερό πεδίο βαρύτητας



$$W_{\text{βάρους}} = -mgh$$
$$\boldsymbol{B} = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$$

$W_{\text{βάρους}}$ ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθούμε. Η διαδρομή **1** και η διαδρομή **2** $\to$ **3** $\to$ **4** δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 8



Σχήμα 4.3

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}\left[ay\left(y^2 - 3z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{y}}\left[3ax\left(y^2 - z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{z}}\left[-6axyz\right]$$

(α) Έργο στη διαδρομή $A \to \Gamma \to \Delta \to B$ (βλ. σχήμα 4.3)

$$W_{A\to B} = 0 + ax_0y_0^3 - 3ax_0y_0z_0^2$$

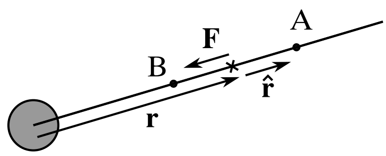
(β) Έργο της $\boldsymbol{F}$ στην ευθύγραμμη διαδρομή $A \to B$

$$\boldsymbol{r}_0 = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 t \qquad \text{και} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0\mathrm{d}t, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,(\boldsymbol{F}_0\cdot\boldsymbol{r}_0)\,t^3 = (4ax_0y_0^3 - 12ax_0y_0z_0^2)\cdot\frac{1}{4} = ax_0y_0^3 - 3ax_0y_0z_0^2$$

όπου $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0)$.

Παράδειγμα 9: Πτώση στο πεδίο βαρύτητας μακριά από τη Γη, ακτινική κίνηση ($r_A \to r_B$)



Σχήμα 4.4

Η δύναμη του βάρους είναι $\boldsymbol{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$, και η στοιχειώδης μετατόπιση είναι $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_A}^{r_B}(-GMm)\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = (-GMm)\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B}$$

$$W_{A\to B} = \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A} > 0$$

επομένως το σύστημα κερδίζει ενέργεια.

Υπολογισμός του Επικαμπύλιου Ολοκληρώματος

Στην παράγραφο αυτή περιοριζόμαστε στις δύο διαστάσεις, τα αποτελέσματα επεκτεινονται εύκολα και άμεσα και στις τρεις διαστάσεις.
Η έκφραση για το έργο μεταβλητής δύναμης κατά μήκος μίας καμπύλης στο επίπεδο γενικά έχει της εξής μορφή:

$$W = \int_A^B [P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y]$$

και θα δώσουμε αμέσως παρακάτω τρείς τρόπους υπολογισμού αυτού του ολοκληρώματος.

(1) Η καμπύλη περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$ όπου $a_1 \leq x \leq a_2$ εκφράζουμε το διαφορικό $\mathrm{d}y$ ως προς την μεταβλητή x, άρα $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ και ολοκληρώνουμε:

$$\Rightarrow W = \int_{a_1}^{a_2} [P(x,f(x))\mathrm{d}x + Q(x,f(x))f'(x)\mathrm{d}x] = \int_{a_1}^{a_2} [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]\mathrm{d}x$$

(2) Η καμπύλη περιγράφεται από τη συνάρτηση $x = g(y)$ όπου $b_1 \leq y \leq b_2$ εκφράζουμε το διαφορικό $\mathrm{d}x$ ως προς την μεταβλητή y, άρα $\mathrm{d}x = g'(y)\mathrm{d}y$ και ολοκληρώνουμε:

$$\Rightarrow W = \int_{b_1}^{b_2} [P(g(y),y)g'(y)\mathrm{d}y + Q(g(y),y)\mathrm{d}y] = \int_{b_1}^{b_2} [P(g(y),y)g'(y) + Q(g(y),y)]\mathrm{d}y$$

(3) Η καμπύλη περιγράφεται από την παραμετρική μορφή $x = f(t), y = g(t)$ όπου $t_A \leq t \leq t_B$, εκφράζουμε τα διαφορικά $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ ως προς την μεταβλητή t και ολοκληρώνουμε:

$$\Rightarrow W = \int_{t_A}^{t_B} [P(f(t),g(t))f'(t)\mathrm{d}t + Q(f(t),g(t))g'(t)\mathrm{d}t] = \int_{t_A}^{t_B} [P(f(t),g(t))f'(t) + Q(f(t),g(t))g'(t)]\mathrm{d}t$$

Παράδειγμα 10

Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης

$$\boldsymbol{F} = F_0 \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + F_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

όπου F_0, ω σταθερές. Βρείτε το έργο της δύναμης σε χρόνο t εάν το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία.

Επειδή η δύναμη εξαρτάται ρητά από τον χρόνο εφαρμόζουμε τον νόμο του Νεύτωνα για να βρούμε τις συντεταγμένες $x(t), y(t)$ της καμπύλης που διαγράφει το σώμα σαν συνάρτηση του χρόνου t. Αλλά επειδή στο ολοκλήρωμα που δίνει το έργο της δύναμης εμφανίζονται τα διαφορικά $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ αρκεί να βρούμε την ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή διότι $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$.

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = F_0 \sin(\omega t), \quad m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F_0 \cos(\omega t)$$

Ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε τη ταχύτητα, με την συνθήκη $v_x(0) = 0, v_y(0) = 0$

$$v_x(t) = \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t), \quad v_y(t) = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F

$$W = \int \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y) = \int_0^t [F_x(t')v_x(t')\mathrm{d}t' + F_y(t')v_y(t')\mathrm{d}t']$$

$$= \frac{F_0^2}{m\omega}\int_0^t [\sin\omega t'(1 - \cos\omega t') + \cos\omega t' \sin\omega t']\mathrm{d}t' = \frac{F_0^2}{m\omega}\int_0^t \sin\omega t'\mathrm{d}t' = \frac{F_0^2}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

Παράδειγμα 11

Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = ay\hat{\boldsymbol{x}} + bx\hat{\boldsymbol{y}}$$

κατά την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της απο το σημείο $A = (0,0)$ στο σημείο $B = (R,R)$ κατά μήκος των εξής διαδρομών:

(1) Κατά μήκος της ευθείας γραμμής που ενώνει τα δύο σημεία A, B.

(2) Κατά μήκος των δύο ευθυγράμμων τμημάτων $A\Delta$ και ΔB όπου $\Delta = (R,0)$.

(3) Κατά μήκος του τεταρτοκυκλιου που γράφεται με κέντρο το σημείο $\Gamma = (0,R)$ και ενώνει τα δύο σημεία A, B.

(1) Κατά μήκος της ευθείας γραμμής που ενώνει τα δύο σημεία A, B (Καμπύλη 1) έχουμε $y = x$ για τα διαφορικά ισχύει επίσης ότι $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το έργο της δύναμης βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_0^R (ax\mathrm{d}x + bx\mathrm{d}x) \\ &= \int_0^R (a+b)x\mathrm{d}x = (a+b)\frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

(2) Εάν κινηθούμε κατά μήκος της καμπύλης $A \to \Delta \to B$ (Καμπύλη 2) το έργο της δύναμης γράφεται σαν άθροισμα δύο όρων, $W_{A\to\Delta}$ και $W_{\Delta\to B}$ κατά μήκος του άξονα των x και του άξονα των y αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} = W_{A\to\Delta} + W_{\Delta\to B} &= \int_A^\Delta F_x \mathrm{d}x + \int_\Delta^B F_y \mathrm{d}y \\ &= 0 + \int_0^R bR\mathrm{d}y = bR^2 \end{aligned}$$

(3) Η τρίτη διαδρομή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο το σημείο $\Gamma = (x_0, y_0) = (0, R)$ και ακτίνα R (Καμπύλη 3). Η εξίσωση της τροχιάς είναι:

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = R + \sqrt{R^2 - x^2}$$

όπου $0 \le x \le R$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των διαφορικών

$$dy = -\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το έργο της δύναμης βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_0^R [a(R + \sqrt{R^2 - x^2})\mathrm{d}x + bx\frac{(-1)x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= \int_0^R aR\mathrm{d}x + a\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x - b\int_0^R \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Τελικά το έργο της δύναμης στην τρίτη διαδρομή ειναι ίσο με:

$$W_{A\to B} = R^2(a + \frac{(a-b)\pi}{8})$$

4.3 Κινητική Ενέργεια – Έργο Δύναμης

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= \int_A^B m\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{m}{2}\int_A^B \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned}$$

διότι $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ και από το νόμο του Νεύτωνα

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

και επίσης

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

Ορίζουμε την **κινητική ενέργεια** $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow \boxed{W_{A\to B} = \Delta K} \qquad \text{όπου} \quad \boxed{\Delta K = K_B - K_A}$$

Εάν $W_{A\to B} > 0 \Rightarrow \Delta K > 0 \Rightarrow K_B > K_A$.

Η δύναμη παράγει έργο $\Rightarrow$ άρα αυξάνεται η κινητική ενέργεια του συστήματος.

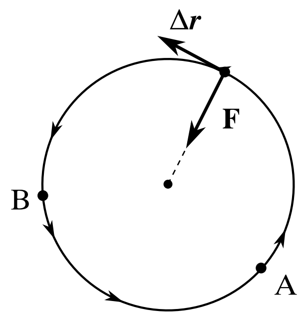
Παράδειγμα 12: Έργο σταθερής δύναμης

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = at + v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$\Rightarrow W^F_{A\to B} = F\cdot\Delta x = ma\cdot\Delta x = \frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{2}{2}mav_0t \pm \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(at+v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Παράδειγμα 13: Ομαλή κυκλική κίνηση



Σχήμα 4.5

$$\boldsymbol{F}\perp\Delta\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow W^F_{A\to B} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

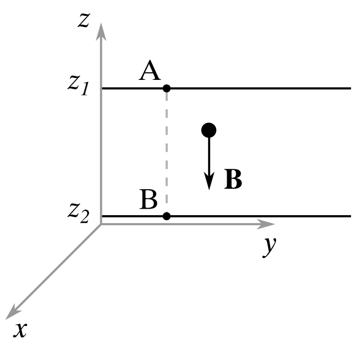
αλλά

$$W^F_{A\to B} = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow v_B^2 = v_A^2$$

Η δύναμη του Μαγνητικού Πεδίου π.χ. είναι κάθετη στην ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ άρα και στην στιγμιαία μετατόπιση $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ ως εκ τούτου δεν παράγει έργο άρα δεν μεταβάλει το μέτρο της ταχύτητας. Αυτό που αλλάζει είναι μόνο η διεύθυνση της ταχύτητας του φορτισμένου σώματος.

Παράδειγμα 14: Δυναμική Ενέργεια Βαρύτητας

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{z_1}^{z_2}(-mg\hat{\boldsymbol{z}})\cdot(\mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= \int_{z_1}^{z_2}(-mg)\,\mathrm{d}z = -mgz\Big|_{z_1}^{z_2} = -mgz_2 + mgz_1 \end{aligned}$$



Σχήμα 4.6

Όπως και αν κινηθεί το σώμα ανάμεσα στα δύο σημεία A και B, θα έχουμε

$$W_{A\to B} = mgz_1 - mgz_2$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \Delta K$$

$$\Rightarrow mgz_1 - mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2}$$

4.3.1 Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει μια ποσότητα η οποία διατηρείται σταθερή:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{ σταθερό}$$

Ορισμός Δυναμικής Ενέργειας

$$U(z) = mgz \quad \text{εάν ορίσουμε } U(z=0) = 0$$

Ακόμη ισχύει ότι:

$$W_{1\to 2} = U(1) - U(2)$$

Η ποσότητα E, η οποία είναι το άθροισμα κινητικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας, ονομάζεται μηχανική ενέργεια.

Παράδειγμα 15

Ένα εκκρεμές αποτελείται από μάζα m δεμένη σε νήμα μήκους ℓ. Το εκκρεμές κρατείται αρχικά σε γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Εάν το εκκρεμές αφεθεί ελεύθερο, ποια είναι η τάση του νήματος όταν το εκκρεμές διέρχεται από την κατακόρυφο;

$$E_1 = 0 + mgh \qquad \text{θέση (1)}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \qquad \text{θέση (2)}$$

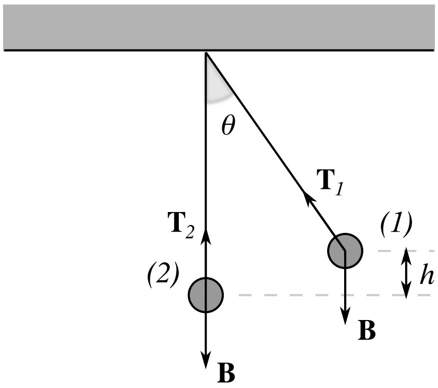
Το έργο της τάσης του νήματος είναι μηδέν.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv^2 = mgh}$$

$$\boxed{h = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta)}$$

Στη θέση (2):

$$\boxed{T_2 - B = m\frac{v^2}{\ell}}$$



Σχήμα 4.7

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ell(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{v^2}{l} = 2g(1-\cos\theta)$$
$$\Rightarrow T_2 - B = 2mg(1-\cos\theta)$$
$$T_2 = mg + 2mg - 2mg\cos\theta \Rightarrow T_2 = mg(3-2\cos\theta)$$

Πρόβλημα 1

Αλυσίδα με γραμμική πυκνότητα μάζας $\lambda\ Kg/m$, βρίσκεται σωριασμένη στο έδαφος. Κατακόρυφη δύναμη F δρα στο ένα άκρο της αλυσίδας, ανυψώνοντάς την κατακόρυφα.
(α) Να βρεθεί η δύναμη F που απαιτείται για να ανυψώσει την αλυσίδα με σταθερή ταχύτητα v.
(β) Να βρεθεί η δύναμη F που απαιτείται για να ανυψώσει την αλυσίδα με σταθερή επιτάχυνση γ προς τα πάνω, αν το άνω άκρο της αλυσίδας ξεκινά από το έδαφος με μηδενική αρχική ταχύτητα.
(γ) Υπολογίστε, συναρτήσει του ύψους z του άνω άκρου της αλυσίδας, και για τις δυο περιπτώσεις (α) και (β), το έργο W που παράγεται από τη δύναμη F, την κινητική ενέργεια E_k και τη δυναμική ενέργεια E_Δ της αλυσίδας, καθώς και την απώλεια ενέργειας ως κλάσμα της E_k.

(α) Η αλυσίδα ανυψώνεται με σταθερή ταχύτητα v. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη F_α που ασκείται χρησιμοποιώντας τον νόμο του Νεύτωνα. Η μάζα της αλυσίδας που έχει ήδη ανυψωθεί κατά z την χρονική στιγμή t είναι $m = \lambda z$ όπου $z = vt$.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F_\alpha - B \qquad \text{όπου} \qquad p = mv \qquad \text{η ορμή της αλυσίδας}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v = \lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}v = \lambda v^2 \qquad \text{διότι} \qquad v = \text{σταθερή}$$
$$\Rightarrow \lambda v^2 = F_\alpha - mg = F_\alpha - \lambda gz \Rightarrow F_\alpha = \lambda v^2 + \lambda gz = \lambda v^2 + \lambda gvt$$

(β) Η αλυσίδα ανυψώνεται με σταθερή επιτάχυνση γ και $v(t=0)=0$. Από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F_\beta - B \Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\beta - mg$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\beta - \lambda gz \Rightarrow \lambda v^2 + \lambda z\gamma = F_\beta - \lambda gz$$

Τελικά έχουμε

$$F_\beta = \lambda v^2 + \lambda z\gamma + \lambda zg = \lambda v^2 + \lambda(\gamma+g)z$$
$$v = \gamma t, \qquad z = \frac{1}{2}\gamma t^2 \Rightarrow F_\beta = \lambda\gamma^2 t^2 + \frac{\lambda}{2}\gamma(\gamma+g)t^2$$
$$\Rightarrow F_\beta = \lambda\gamma(\frac{3\gamma}{2} + \frac{g}{2})t^2 = \lambda(3\gamma+g)z$$

(γ) Έργο δύναμης στις δύο περιπτώσεις (α) και (β):

$$W_\alpha = \int_0^z F_\alpha(z')\mathrm{d}z' = \int_0^z (\lambda v^2 + \lambda gz')\mathrm{d}z' = \lambda v^2 z + \frac{1}{2}\lambda gz^2$$
$$W_\beta = \int_0^z F_\beta(z')\mathrm{d}z' = \int_0^z (3\lambda\gamma + g)z'\mathrm{d}z' = \frac{1}{2}(3\lambda\gamma + \lambda g)z^2$$

Υπολογισμός της δυναμικής ενέργειας:

$$E_\Delta^\alpha = E_\Delta^\beta = \int_0^z gz'\mathrm{d}m = \int_0^z gz'\lambda\mathrm{d}z' = \lambda g\frac{z^2}{2} = m(z)g\frac{z}{2}$$

Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας:

$$E_K^\alpha = \frac{1}{2}m(z)v^2 = \frac{1}{2}\lambda v^2 z$$
$$E_K^\beta = \frac{1}{2}m(z)v^2 = \frac{1}{2}\lambda z\gamma^2 t^2 = \lambda\gamma z^2$$

Σχέση έργου δύναμης με κινητική και δυναμική ενέργεια, απώλεια ενέργειας:

$$W_\alpha = E_K^\alpha + E_\Delta^\alpha + \frac{1}{2}\lambda v^2 z = E_K^\alpha + E_\Delta^\alpha + \Delta E_\alpha$$
$$W_\beta = E_K^\beta + E_\Delta^\beta + \frac{1}{2}\lambda\gamma z^2 = E_K^\beta + E_\Delta^\beta + \Delta E_\beta$$
$$\frac{\Delta E_\alpha}{E_K^\alpha} = 1, \qquad \frac{\Delta E_\beta}{E_K^\beta} = 0.5$$

Πρόβλημα 2

Δακτύλιος μάζας M και ακτίνας R κρέμεται κατακόρυφα από το ταβάνι μέσω ενός αβαρούς νήματος. Δύο χάντρες μάζας m έκαστη γλιστρούν στον δακτύλιο χωρίς τριβή σε αντίθετες κατευθύνσεις ξεκινώντας συγχρόνως από την κορυφή του δακτυλίου. Δείξτε ότι ο δακτύλιος θα αρχίσει να κινείται προς τα πάνω εάν $m > \frac{3M}{2}$, και βρείτε την γωνία θ της θέσης των χαντρών με την κατακόρυφο.

Λύση: :

Μελετάμε την κίνηση για μία από τις δύο χάντρες, τα συμπεράσματα εφαρμόζονται ομοίως και στην άλλη χάντρα.
Στη χάντρα ασκείται η δύναμη του βάρους $\boldsymbol{B} = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$ και η αντίδραση $\boldsymbol{N} = N\hat{\boldsymbol{R}}$ απο τον δακτύλιο. Η δύναμη που ασκείται από τον δακτύλιο είναι ακτινική διότι δεν υπάρχει δύναμη τριβής. Η διανυσματική εξίσωση κίνησης είναι:

$$m\boldsymbol{a}_k + m\boldsymbol{a}_\varepsilon = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{N}$$

Αναλύωντας σε συνιστώσες $\hat{\boldsymbol{R}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} + \sin\vartheta\hat{\boldsymbol{x}}$ έχουμε ακτινικά την εξίσωση:

$$-m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N$$

Από το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας υπολογίζουμε την ταχύτητα της χάντρας όταν η χάντρα αποκλίνει κατά γωνία θ από τον κατακόρυφο άξονα z:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta) \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης βρίσκουμε την δύναμη του δακτυλίου στην χάντρα:

$$-2mg(1-\cos\theta) = -mg\cos\theta + N \;\Rightarrow\; N = (-2+3\cos\theta)mg$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta = 0 \Rightarrow N = mg$ ενώ όταν $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ η αντίδραση από τον δακτύλιο μηδενίζεται $N = 0$. Ακόμη έχουμε ότι για $0 < \theta < \theta_0$ η αντίδραση του δακτυλίου είνα ακτινικά προς τα έξω $N > 0$ άρα το βάρος υπερτερεί και τραβά την χάντρα προς το κέντρο του κύκλου. Ενώ για $\theta > \theta_0$ η δύναμη του δακτυλίου στην χάντρα βλεπει προς το κέντρο $N < 0$ άρα δεν αρκεί το βάρος για να κάνει το σώμα κυκλική κίνηση.

Η κάθε χάντρα ασκεί στον δακτύλιο δύναμη αντίθετη της αντιδρασης του δακτυλίου $\boldsymbol{N}_1' = -N\hat{\boldsymbol{R}}$ και $\boldsymbol{N}_2' = -N\hat{\boldsymbol{R}}'$. Όπου $\hat{\boldsymbol{R}}' = \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} - \sin\vartheta\hat{\boldsymbol{x}}$.
Το νήμα ασκεί στον δακτύλιο δύναμη $\boldsymbol{T} = T\hat{\boldsymbol{z}}$ κατακόρυφα προς τα πάνω.
Η συνθήκη για να έχουμε ακίνητο δακτύλιο είναι:

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}_1' + \boldsymbol{N}_2' + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\delta\alpha\kappa\tau}} = 0 \;\Rightarrow\; T\hat{\boldsymbol{z}} - N\hat{\boldsymbol{R}} - N\hat{\boldsymbol{R}}' - Mg\hat{\boldsymbol{z}} = 0$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες έχουμε κατακόρυφα την εξίσωση

$$T - 2N\cos\theta - Mg = 0 \;\Rightarrow\; T - 2mg(-2 + 3\cos\theta)\cos\theta - Mg = 0$$

Οριακά ο δακτύλιος θα αρχίσει να κινείται προς τα πάνω όταν η τάση του νήματος T μηδενιστεί:

$$\Rightarrow\; -2mg(-2 + 3\cos\theta)\cos\theta - Mg = 0 \;\Rightarrow\; -6\cos^2\theta + 4\cos\theta - \frac{M}{m} = 0$$

Λύνωντας το τριώνυμο ως προς $\cos\theta$ έχουμε:

$$\cos\theta_{1,2} = \frac{4}{12} \pm \frac{1}{12}\sqrt{16 - 24\frac{M}{m}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}$$
$$\Rightarrow\; \cos\theta_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3M}{2m}},\; \cos\theta_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}$$

Η λύση είναι πραγματικός αριθμός όταν η διακρίνουσα $\Delta = 1 - \frac{3M}{2m}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Άρα $2 - 3\frac{M}{m} > 0$ που μας δίνει την ζητούμενη συνθήκη για τις μάζες $m > \frac{3}{2}M$.

Η συνθήκη για τις δύο λύσεις του τριωνύμου είναι $0 < \cos\theta_2 < \cos\theta_1 < \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$. Άρα για τις γωνίες αντίστοιχα έχουμε $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. Η Τάση του νήματος γίνεται μηδέν (και ο δακτύλιος αναπηδά) όταν η γωνία θ γίνει ίση με θ_1. Η αντίδραση του δακτυλίου N είναι τώρα αρνητική και βλέπει προς το κέντρο του δακτυλίου άρα έχει z συνιστώσα προς τα κάτω.

4.4 Διατήρηση της Ενέργειας

4.4.1 Διατηρητικές Δυνάμεις

Για να ορίσουμε τη μηχανική ενέργεια χρειαζόμαστε την έννοια της δυναμικής ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο για τις διατηρητικές δυνάμεις. Πρέπει να ορίσουμε λοιπόν ποιες δυνάμεις είναι διατηρητικές.
Για ένα σωματίδιο που κινείται από τη θέση P_1 στη θέση P_2 υπό την επίδραση μιας δύναμης που δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος ή ρητά από το χρόνο, μπορούμε να ψάξουμε για το εάν η δύναμη είναι διατηρητική ή όχι.
Το έργο της δύναμης είναι

$$W_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Η δύναμη είναι διατηρητική εάν το $W_{1,2}$ δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ενώνει τα σημεία P_1 και P_2, είναι δηλαδή ίδιο για όλες τις διαδρομές από το P_1 στο P_2. Επειδή $W_{1,2} = -W_{2,1}$, μπορούμε να δείξουμε ότι το έργο σε μια κλειστή διαδρομή από το P_1 στο P_1 είναι μηδέν *για ένα διατηρητικό πεδίο δυνάμεων*.

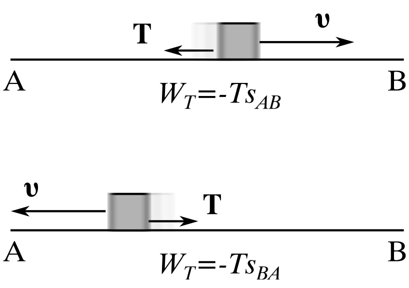
Παραδείγματα διατηρητικών δυνάμεων

- βαρύτητα κοντά στη Γη
- ελατήριο, και γενικά για κάθε μονοδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση δύναμης, η οποία δεν εξαρτάται από την ταχύτητα.

Παραδείγματα μη-διατηρητικών δυνάμεων

- Τριβή σαν μακροσκοπική δύναμη, παράγει αρνητικό έργο, όπως κι αν κινηθεί το σώμα.

Μικροσκοπικά πάνω σε έναν κλειστό δρόμο το σύστημα δεν επανέρχεται στην ίδια κατάσταση.



Σχήμα 4.8

4.4.2 Δυναμική Ενέργεια

Έστω ότι το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό, διαλέγουμε ένα σημείο P_0 στο χώρο σαν σημείο αναφοράς (στην αρχή των αξόνων, στο άπειρο, εκεί που οι δυνάμεις μηδενίζονται, κάποιο αυθαίρετο σημείο) και ορίζουμε εκεί ότι η δυναμική ενέργεια $U(P_0) = 0$ (ή κάτι άλλο αυθαίρετα πεπερασμένο):

$$\Rightarrow \boxed{U(P) = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + U(P_0)}$$

και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος οποιουδήποτε συγκεκριμένου δρόμου. Κρατώντας το P_0 σταθερό $\Rightarrow U(P)$ είναι συνάρτηση μόνο του άνω ορίου P

$$\begin{aligned}
\Rightarrow U(P_2) - U(P_1) &= -\int_{P_0}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -W_{P_1 \to P_2} \\
\Rightarrow W^F_{P_1 \to P_2} &= U(P_1) - U(P_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{U(P_1) - U(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

Από το προηγούμενο κεφάλαιο $W^F_{1\to 2} = \Delta K = K_2 - K_1$

$$\Rightarrow U(P_1) - U(P_2) = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U(P_1) = K_2 + U(P_2)}$$

Η μηχανική ενέργεια $E = K + U$ διατηρείται σταθερή.

Παραδείγματα

(Α) Πεδίο βαρύτητας της Γης κοντά στη Γη:

$$P_0 = \text{αρχή των αξόνων} \Rightarrow U(z) = mgz$$

(Β) ελατήριο: $P_0 \equiv (x = 0) \Rightarrow U(x = 0) = 0$

$$\Rightarrow U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2$$

(Γ) Δύναμη $F(x) = -\dfrac{A}{x^2}, \quad P_0 = \infty, \quad U(x = \infty) = 0$

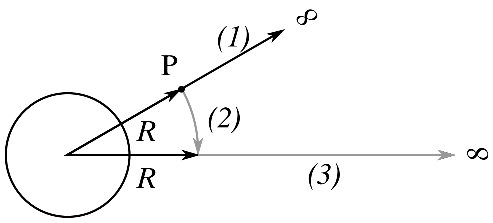
$$U(x) = -\int_\infty^x F(x')\mathrm{d}x' = +\int_\infty^x \left(+\frac{A}{x'^2}\right)\mathrm{d}x' = -\frac{A}{x'}\bigg|_\infty^x = -\frac{A}{x}$$

$$\Rightarrow U(x) = -\frac{A}{x}$$

(Δ) Πεδίο βαρύτητας της Γης μακριά από τη Γη

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \text{το πεδίο είναι διατηρητικό}$$
$$P_0 = \infty, \qquad \text{(η μάζα δεν εκτείνεται μέχρι το άπειρο)}$$

$$U(\boldsymbol{r} = \infty) = 0$$
$$U(\boldsymbol{R}) = -\int_{\infty}^{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\infty}^{R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\mathrm{d}r = -\frac{GMm}{R}$$



Σχήμα 4.9: *Οι διαδρομές (1) και (2)+(3) είναι ισοδύναμες.*

Εάν έχουμε διατηρητικές δυνάμεις $\boldsymbol{F}$ και μη διατηρητικές δυνάμεις $\boldsymbol{T}$, τότε

$$\boxed{W^F_{1\to 2} + W^T_{1\to 2} = \Delta K} \Rightarrow U_{(1)} - U_{(2)} + W^T_{1\to 2} = \Delta K$$

$$\Rightarrow \boxed{W^T_{1\to 2} = \Delta K + \Delta U}$$

όπου $\Delta K = K_2 - K_1,\ \Delta U = U_{(2)} - U_{(1)}$.

Δυναμική Ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας κοντά στη Γη

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R}\frac{1}{1+h/R} = -\frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \dots\right)$$
$$= -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h + \dots$$

$$U(h) = \frac{GM}{R^2}mh = mgh, \qquad \text{όπου } g = \frac{GM}{R^2} \text{ και } R \text{ η ακτίνα της Γης.}$$

Μετράμε μόνο μεταβολές της δυναμικής ενέργειας

$$U(R+h) = U(R) + \frac{GMm}{R^2}h$$
$$U(h) = U(R+h) - U(R) = \frac{GM}{R^2}mh$$

Πρόβλημα 3

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k. Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Το σώμα μπορεί να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ανάλογο της απόστασης από τη θέση ισορροπίας.
(α) Βρείτε τη μέγιστη συσπείρωση A του ελατηρίου εάν δώσουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα v_0.
(β) Με πόση ταχύτητα επανέρχεται το σώμα στην αρχική του θέση;

(α) Έστω ότι η κίνηση γίνεται κατά μήκος του άξονα των x και η θέση ισορροπίας είναι για $x = 0$, ο συντελεστής τριβής είναι $\mu(x) = b|x|$, $b > 0$. Η δύναμη τριβής κατά την ολίσθηση είναι $T = b|x|mg$ αντίθετη πάντα στην κίνηση.
Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$W^T_{0\to A} + W^{\varepsilon\lambda}_{0\to A} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W^{\varepsilon\lambda}_{0\to A} = U(0) - U(A) = -\frac{1}{2}kA^2, \quad W^T_{0\to A} = \int_0^A (-bxmg)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}bmgA^2$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}(bmg + k)A^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 \ \Rightarrow\ A^2 = \frac{m}{k + bmg}v_0^2$$

(β) Ομοίως όταν το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας $x = 0$ έχουμε:

$$-\frac{1}{2}bmgA^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \ \Rightarrow\ v_1^2 = \frac{k - bmg}{m}A^2$$

Συνδυάζοντας με το προηγούμενο αποτέλεσμα παίρνουμε:

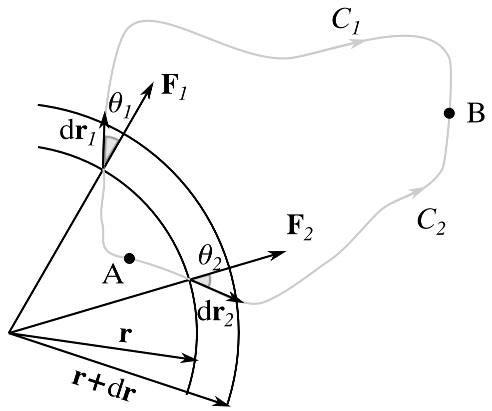
$$v_1^2 = \frac{k - bmg}{k + bmg}v_0^2$$

Προσοχή όταν το σώμα είναι στιγμιαία σε ακινησία στην ακρότατη θέση $x = A$ εάν ισχύει $kA > bAmg$ δηλαδή $k > bmg$ τότε το σώμα αρχίζει να κινείται προς την θέση ισορροπίας για $x = 0$. Διαφορετικά εάν $k < bmg$ το σώμα δεν επιστρέφει στην αρχική του θέση, παραμένει ακίνητο.

Όταν το σώμα κινηθεί προς το άλλο ακρότατο $x = -A'$ και επιστρέψει πάλι στην θέση ισορροπίας $x = 0$ θα έχει ταχύτητα:

$$v_2^2 = \left(\frac{k - bmg}{k + bmg}\right)^2 v_0^2$$

4.4.3 Οι κεντρικές δυνάμεις $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι διατηρητικές (π.χ. δύναμη βαρύτητας)



Σχήμα 4.10

$$W_{C_1} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad W_{C_2} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Χωρίζουμε τους δύο δρόμους C_1 και C_2 σε μικρά κομμάτια παίρνοντας ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$:

$$\mathrm{d}W_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 = F(r)\mathrm{d}r_1 \cos\theta_1 = F(r)\mathrm{d}r$$

όπου $\mathrm{d}r_1 \cos\theta_1$ είναι η προβολή του $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ στην ακτίνα $= \mathrm{d}r$, ομοίως $\mathrm{d}r_2 \cos\theta_2 = \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}W_2 = \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = F(r)\mathrm{d}r_2 \cos\theta_2 = F(r)\mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}W_1 = \mathrm{d}W_2 \quad \text{για κάθε τέτοια στοιχειώδη διαδρομή}$$

Συνολικά

$$W_{C_1} = \sum \mathrm{d}W = W_{C_2}$$

επομένως, το έργο από το σημείο A έως το B είναι το ίδιο για κάθε διαδρομή, και άρα η δύναμη είναι διατηρητική.

4.4.4 Υπολογισμός Δύναμης από τη Δυναμική Ενέργεια

Είδαμε ότι

$$\Delta U = U(P_2) - U(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

για μια απειροστή μετακίνηση $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ μόνο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}U = -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}} \qquad \text{όπου } \mathrm{d}U = U(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}U = -F_x \mathrm{d}x - F_y \mathrm{d}y - F_z \mathrm{d}z}$$

Εάν έχουμε μια μονοδιάστατη κίνηση, τότε

$$U = U(x) \Rightarrow \mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -F(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}}$$

Για τις τρεις διαστάσεις $U = U(x, y, z)$. Για μια τέτοια συνάρτηση έχουμε τη μερική παράγωγο και το ολικό διαφορικό της U, επομένως

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Παράδειγμα : Ελατήριο, $U(x) = (1/2)kx^2 \Rightarrow F(x) = -kx$

Παράδειγμα : Πεδίο βαρύτητας

$$U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \text{όπου } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{x}{r}$$

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{y}{r} \quad \text{και} \quad F_z = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{z}{r}, \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{gmM}{r^2}$$

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}F_x + \hat{\boldsymbol{y}}F_y + \hat{\boldsymbol{z}}F_z = -\frac{GMm}{r^2}\frac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Γενικό αποτέλεσμα

Εάν $U = U(r),\ r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, τότε

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Απόδειξη:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{x}{r}$$

ομοίως για τις άλλες δύο συνιστώσες της δύναμης έχουμε $F_y = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{y}{r}$ και $F_z = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{z}{r}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\hat{\boldsymbol{y}} + F_z\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(\frac{x}{r}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{y}{r}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{z}{r}\hat{\boldsymbol{z}}) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Ορίζουμε

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial U}{\partial z} = -\boldsymbol{\nabla}U$$

και $\mathrm{d}U = \boldsymbol{\nabla}U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Τοπικό κριτήριο για τις διατηρητικές δυνάμεις

Έως τώρα το κριτήριο για το εάν μια δύναμη ήταν συντηρητική–διατηρητική ήταν ότι το έργο της δύναμης σε κάθε διαδρομή από το A στο B είναι το ίδιο, δηλαδή το έργο από το A στο A είναι μηδέν

$$\int_{A \atop C_1}^{B} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{A \atop C_2}^{B} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \Rightarrow \oint_{A\to A} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

Αυτό το κριτήριο για τον έλεγχο μιας δύναμης δύσκολα εφαρμόζεται.
Υπάρχει ένα ισοδύναμο (τοπικό) κριτήριο που αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για τις διατηρητικές δυνάμεις

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = 0 \quad (\text{διαβάζεται στροβιλισμός ή curl}\boldsymbol{F} = 0)$$

για κάθε σημείο στο χώρο.

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Εάν η δύναμη είναι συντηρητική, τότε

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}U = 0$$

όπως μπορείτε εύκολα να δείτε κάνοντας τις παραγωγίσεις.
Για παράδειγμα:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial y}), \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x}) = 0$$

Ειδικά για το πεδίο βαρύτητας βρίσκουμε:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} = -3GMm\frac{xy}{r^5}$$

Παράδειγμα

(α) Δείξτε ότι η δύναμη:

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}\left[ay\left(y^2 - 3z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{y}}\left[3ax\left(y^2 - z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{z}}\left[-6axyz\right]$$

είναι μία διατηρητική δύναμη.
Η δύναμη είναι διατηρητική όταν έχουμε $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = 0$:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Υπολογίζουμε χωριστά τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_z}{\partial y} = -6axz, \frac{\partial F_y}{\partial z} = -6axz \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0\\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = -6ayz, \frac{\partial F_z}{\partial x} = -6ayz \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = 3a(y^2 - z^2), \frac{\partial F_x}{\partial y} = 3ay^2 - 3az^2 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

άρα $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$.
(β) Δείξτε ότι η δύναμη:

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}\left[ay\left(y^2 - 3z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{y}}\left[3ax\left(y^2 - z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{z}}\left[6axyz\right]$$

δεν είναι διατηρητική.
Υπολογίζουμε την ποσότητα $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_z}{\partial y} = 6axz, \frac{\partial F_y}{\partial z} = -6axz \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 12axz\\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = -6ayz, \frac{\partial F_z}{\partial x} = 6ayz \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -12ayz\\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = 3a(y^2 - z^2), \frac{\partial F_x}{\partial y} = 3ay^2 - 3az^2 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

άρα $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}(12axz) + \hat{\boldsymbol{y}}(-12ayz)$.

Παράδειγμα : Υπολογισμός Δυναμικής Ενέργειας

(α) Κάτω από ποιές προυποθέσεις η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = ay\hat{\boldsymbol{x}} + bx\hat{\boldsymbol{y}}$$

είναι διατηρητική;
(β) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας θεωρώντας το σημείο $(0,0)$ ως σημείο αναφοράς.

(α) Η δύναμη είναι διατηρητική όταν έχουμε $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ για κάθε σημείο στο χώρο:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ay & bx & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (b-a)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Άρα εάν $a = b$ τότε $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ ταυτοτικά μηδέν για κάθε σημείο στο χώρο.

(β) (ι) Πρώτος τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:
Ο γενικός τύπος είναι $U(x,y) - U(0,0) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)}(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y)$
Διαλέγουμε κατάλληλη διαδρομή, εδώ διαλέγουμε την διαδρομή $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ και επίσης ορίζουμε ότι $U(0,0) = 0$

$$\Rightarrow U(x,y) = -\int_{(0,0)}^{(x,0)} F_x \mathrm{d}x - \int_{(x,0)}^{(x,y)} F_y \mathrm{d}y = 0 - \int_0^y ax\mathrm{d}y = -axy$$

(ιι) Δεύτερος τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:
Από τον ορισμό της δύναμης μέσω της δυναμικής ενέργειας έχουμε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = -ay$$

και

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -ax$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x παίρνουμε

$$U(x,y) = -axy + f(y)$$

και ολοκληρώνοντας την δεύτερη εξίσωση ως προς y έχουμε

$$U(x, y) = -axy + g(x)$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι συμβατές όταν έχουμε $f(y) = g(x) = c$, ακόμη $c = 0$ διότι $U(0, 0) = 0$.

Πρόβλημα 4

Ένα σώμα μάζας m διαγράφει τροχιά στο χώρο που δίνεται από το διάνυσμα

$$\boldsymbol{r} = \alpha\hat{\boldsymbol{x}} - \beta\hat{\boldsymbol{y}} + (\gamma\hat{\boldsymbol{x}} - \delta\hat{\boldsymbol{y}})\frac{t^2}{2}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σταθερές.
Βρείτε: (ι) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Είναι η δύναμη διατηρητική;
(ιι) Την δυναμική ενέργεια εάν $U(0, 0) = 0$.

(ι) Υπολογίζουμε τη δύναμη από τον Νόμο του Νεύτωνα $\boldsymbol{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\gamma\hat{\boldsymbol{x}} - \delta\hat{\boldsymbol{y}})t, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \gamma\hat{\boldsymbol{x}} - \delta\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\gamma\hat{\boldsymbol{x}} - m\delta\hat{\boldsymbol{y}}$$

Ισχύει

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ m\gamma & -m\delta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

άρα η δύναμη είναι διατηρητική.

(ιι) Υπολογίζουμε την δυναμική ενέργεια από το ολοκλήρωμα της δύναμης σε κατάλληλη διαδρομή:

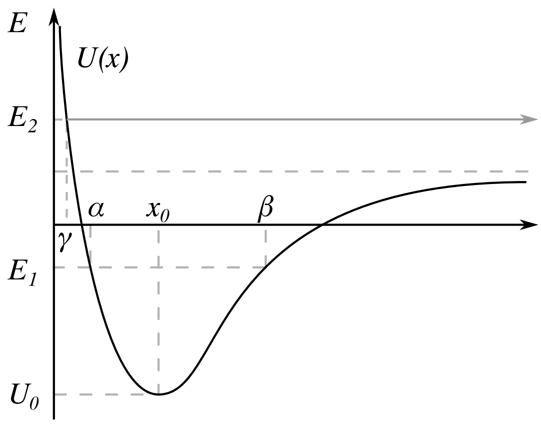
$$U(x, y) - U(0, 0) = -\int_{(0,0)}^{(x,0)} F_x \mathrm{d}x - \int_{(x,0)}^{(x,y)} F_y \mathrm{d}y = -m\gamma x + m\delta y$$

4.5 Δυναμική ενέργεια και σημεία αναστροφής, Δέσμιες τροχιές, σημεία ισορροπίας

Θα αναφερθούμε στην περίπτωση της μίας διάστασης.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{σταθερή}$$

Σχεδιάζουμε πρώτα την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας και μετά με βάση τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας θα εξετάσουμε τις διάφορες δυνατές κινήσεις.



Εάν το σώμα έχει ενέργεια E_1, τότε η κίνησή του γίνεται υποχρεωτικά ανάμεσα στα σημεία α και β, που είναι *σημεία αναστροφής* ($v = 0$), $E = U(\alpha) = U(\beta)$ και η *τροχιά* λέγεται *δέσμια*.

Εάν $E = U_0 \Rightarrow v = 0$, άρα το σώμα ακίνητο σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας (για μικρές αποκλίσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας έχουμε περιοδική κίνηση). Στην θέση ευσταθούς ισορροπίας ισχύει:

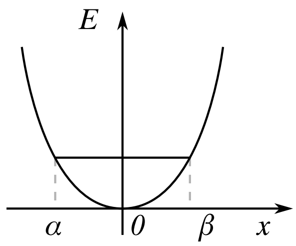
$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Εάν $E = E_2$, τότε το σώμα μπορεί να κινηθεί από τα σημεία γ έως το άπειρο, μη δέσμια τροχιά.
Για κάθε θέση του σώματος έχουμε:

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

Παράδειγμα 1: Ελατήριο



Σχήμα 4.11

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Περιοδική κίνηση ανάμεσα στα σημεία α και β, ταλάντωση

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]$$

$$\text{ακρότατο, σημείο αναστροφής, για} \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{1}{2}k\beta^2 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

καθώς κινείται από το 0 στο β το σώμα επιβραδύνεται, η ταχύτητα ελαττώνεται, η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, καθώς κινείται από το β στο 0 η ταχύτητα αυξάνεται και η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται.

Εφαρμόζουμε στο ελατήριο την σχέση που βρήκαμε προηγουμένως και δίνει τον χρόνο κίνησης ανάμεσα σε δύο σημεία. Εάν T η περίοδος της ταλάντωσης τότε ο χρόνος κίνησης από την θέση ισορροπίας μέχρι το ακρότατο είναι $\frac{T}{4}$ και ισχύει:

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(\frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}kx^2)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Άρα η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Παράδειγμα 2

Κάντε γραφική παράσταση της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας

$$U(x) = \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x}, \qquad b > 0, \qquad c > 0, \qquad x > 0$$

και περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση σώματος μάζας m.

Οριακή συμπεριφορά της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας

$$U(x \to 0) \to \infty, \qquad U(x \to \infty) \to 0, \qquad U(x_1 = \frac{b}{2c}) = 0, \qquad U(x > x_1) < 0$$

Ακρότατο της δυναμικής ενέργειας:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\left(x = x_0 = \frac{b}{c}\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \frac{2c^4}{b^3} > 0, \text{ ελάχιστο, σημείο ευσταθούς ισορροπίας.}$$

$$U\left(x_0 = b/c\right) = -\frac{c^2}{b} = U_0$$

Ενεργειακά ξεχωρίζουμε δύο περιοχές:

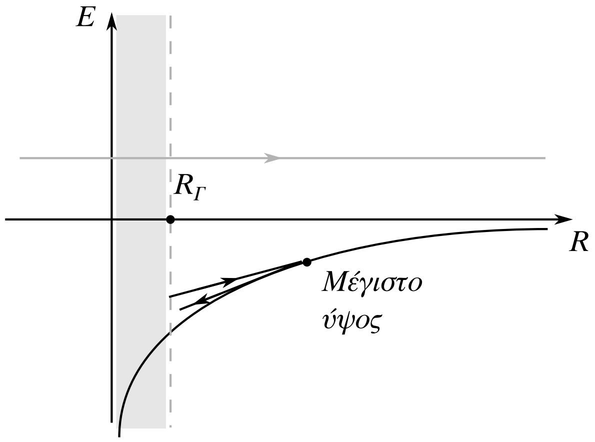
(ι) $E \geq 0$

Το σώμα μπορεί να κινηθεί από μία ελάχιστη τιμή του x, όπου η δυναμική ενέργεια ισούται με την ολική ενέργεια, μέχρι το άπειρο με θετική κινήτική ενέργεια για $E > 0$. Η κινητική ενέργεια στο άπειρο είναι μηδέν εάν το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = 0$. Εάν το σώμα έρχεται από δεξιά προς μικρότερες τιμές του x έχει ένα σημείο αναστροφής γ όπου $\gamma < x_1$ για $E > 0$, εκει η κινητική ενέργεια είναι μηδέν και $E = U(\gamma)$. Εάν $E = 0$ το σημείο αναστροφής ειναι το x_1.

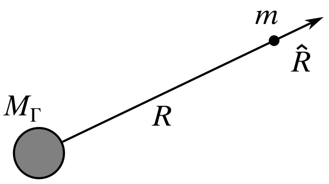
(ιι) $U_0 < E < 0$

Η κίνηση του σώματος είναι περιοδική. Το σώμα κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία αναστροφής α και β,εκατέρωθεν του x_0, όπου η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται και $E = U(\alpha) = U(\beta)$, δέσμια τροχιά.

Παράδειγμα 3: Πεδίο βαρύτητας της Γης



Σχήμα 4.12



$$\boldsymbol{F} = -\frac{GM_\Gamma m}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}$$

$$U(R) = -\frac{GM_\Gamma m}{R}$$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\Gamma m}{R} = \text{σταθερό} = E$$

Ταχύτητα Διαφυγής

$$E(\text{επιφάνεια της Γης}) = E(\text{σε άπειρη απόσταση})$$

$$\frac{1}{2}mv_{\Gamma}^{2} - \frac{GM_{\Gamma}m}{R_{\Gamma}} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^{2}$$

επομένως, εάν $v_{\infty}^{2} = 0$, τότε

$$\frac{1}{2}mv_{\Gamma}^{2} = G\frac{M_{\Gamma}m}{R_{\Gamma}} \Rightarrow \boxed{v_{\Gamma}^{2} = \frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}}$$

Ενέργεια Σελήνης σε κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη

$$\left\{\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M_{\Sigma}v^{2} - \frac{GM_{\Gamma}M_{\Sigma}}{R} \\ \frac{GM_{\Gamma}M_{\Sigma}}{R^{2}} &= M_{\Sigma}\frac{v^{2}}{R} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow E = -\frac{1}{2}G\frac{M_{\Gamma}M_{\Sigma}}{R} < 0$$

4.6 Θερμότητα και Ισχύς

Θερμότητα : Μακροσκοπικά μια άλλη μορφή ενέργειας $\rightarrow$ μη διατηρητικές δυνάμεις $\rightarrow$ μικροσκοπικά έχουμε κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων του σώματος.

Ισχύς Δύναμης :

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

Μονάδα Ισχύος: $\quad 1\,\mathrm{Watt} = 1\,\mathrm{J/s}, \qquad 1\,\mathrm{hP} = 745,7\,\mathrm{W}$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

Απώλειες ισχύος σε ένα κινούμενο αυτοκίνητο

Το αυτοκίνητο είναι μια μηχανική κατασκευή χαμηλής απόδοσης, λιγότερο από 15% της διαθέσιμης ενέργειας χρησιμοποιείται στην κίνηση του αυτοκινήτου ενώ το υπόλοιπο 85% είναι απώλειες τις οποίες θα περιγράψουμε σε αυτή την παράγραφο.
Χοντρικά η κατανομή της παραγόμενης ισχύος απο τη μηχανή του αυτοκινήτου είναι:
10% χάνεται από τριβές στα διάφορα μηχανικά μέρη όπως διαφορικό, άξονας, ιμάντας κ.λ.π..
6% τριβές στον κινητήρα.
4% κλιματισμός, φώτα, φρένα.
65% περίπου ενεργειακές απώλειες στο περιβάλλον απο π.χ. εξάτμιση και ψυγείο που επιβάλονται από τους νόμους της θερμοδυναμικής.
Από το 15% διαθέσιμης ισχύος ένα μεγάλο ποσοστό καταναλώνεται στις δυνάμεις τριβής με το οδόστρωμα και κυρίως για να υπερνικήσουμε την αντίσταση του αέρα η οποία εξαρτάται από το τετράγωνο της ταχύτητας του αυτοκινήτου και το σχήμα του.

Εφαρμογή : Αυτοκίνητο που κινείται επιταχυνόμενο σε ανηφόρα

Αυτοκίνητο μάζας m έχει ταχύτητα v και επιταχύνεται καθώς κινείται σε ανηφορικό δρόμο που σχηματίζει γωνία θ με τον ορίζοντα. Το αυτοκίνητο έχει επιτάχυνση a και η δύναμη τριβής που οφείλεται στον αέρα είναι $F_{\alpha\nu} = b_0 + b_1v^2$ αντίθετη της κίνησης του οχήματος. Βρείτε την ισχύ που δίνει η μηχανή.

Έστω $\boldsymbol{F}$ δύναμη που κινεί το αυτοκίνητο. Η διανυσματική εξίσωση κίνησης είναι:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\alpha\nu} + \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{a}$$

μελετάμε την κίνηση κατά μήκος του ¨κεκλιμένου¨ επιπέδου που κινείται το αυτοκίνητο:

$$F - F_{\alpha\nu} - mg\sin\theta = ma \;\Rightarrow\; F = F_{\alpha\nu} + mg\sin\theta + ma$$

Άρα η ισχύς η απαραίτητη για την κίνηση του αυτοκινήτου είναι:

$$P = F\cdot v = mva + b_0v + b_1v^3 + mvg\sin\theta$$

Αριθμητική εφαρμογή για να δούμε το ποσοστό ισχύος που αντιστοιχεί σε κάθε όρο του προηγούμενου αθροίσματος:

Έστω ότι η μάζα του αυτοκινήτου είναι $m = 1250\ Kgr$, η επιτάχυνση $a = 1\ m/sec$, γωνία $\theta = 10^0$, οι δύο όροι στην σχέση της αντίστασης του αέρα είναι $b_0 \simeq 200\ Nt$ και $b_1 \simeq 0.7\ Kg\ m/sec^2$. Τέλος ας υποθέσουμε ότι εχουμε ταχύτητα οχήματος ίση με $v = 20\ m/sec \simeq 72\ Km/h$:

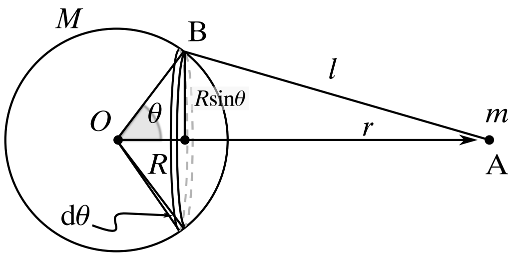
$$mva = 25\ kW,\ mvg\sin\theta = 43\ kW,\ b_0v = 4\ kW,\ b_1v^3 \simeq 6\ kW\ \Rightarrow\ P = 78\ kW$$

Εάν η ταχύτητα του οχήματος διπλασιαστεί $v = 40\ m/sec \simeq 140\ Km/h$ βρίσκουμε:

$$mva = 50\ kW,\ mvg\sin\theta = 85\ kW,\ b_0v = 8\ kW,\ b_1v^3 \simeq 45\ kW\ \Rightarrow\ P = 188\ kW$$

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η μεγαλύτερη κατανάλωση ισχύος οφείλεται στην ανηφόρα και κατόπιν στην αντίσταση του αέρα η οποία είναι ανάλογη με τον κύβο της ταχύτητας. Σημείωση, $\sin 10^0 \simeq 0.1736$ ενώ εάν η γωνία είναι $\theta = 20^0$ τότε $\sin 20^0 \simeq 0.342$ και η κατανάλωση ισχύος λόγω της ανηφόρας σχεδόν διπλασιάζεται.

4.7 Πεδίο Βαρύτητας Σφαιρικού Φλοιού



Σχήμα 4.13

Ολική μάζα σφαιρικού φλοιού ίση με M άρα επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma = M/4\pi R^2$. Χωρίζουμε το σφαιρικό φλοιό σε δακτυλίδια με επίπεδο κάθετο στη γραμμή ΟΑ. Το στοιχειώδες εμβαδόν του κάθε δακτυλιδιού είναι $\Delta S = (2\pi R\sin\theta)\,(R\mathrm{d}\theta)$ όπου $\mathrm{d}\theta$ είναι το γωνιακό εύρος του δακτυλιδιού.

$$\Rightarrow \Delta M(\theta) = \sigma\Delta S = \frac{M}{4\pi R^2}\,(2\pi R\sin\theta)\,(R\mathrm{d}\theta) = \frac{M}{4\pi R^2}2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}M_{\text{δακτ}} = \frac{M}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

και

$$\mathrm{d}U_{\text{δακτ}} = -G\frac{\mathrm{d}M_{\text{δακτ}}m}{l} = -G\frac{M}{2}m\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{l}$$

$$\Rightarrow U = \sum_{\text{δακτυλίδια}} \text{δυναμικών ενεργειών από κάθε δακτυλίδι} = -\frac{GMm}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{l}$$

$$\text{Τρίγωνο OAB} \Rightarrow l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ αυτή την παράσταση

$$\frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}\theta} = 2Rr\sin\theta \Rightarrow 2l\mathrm{d}l = 2Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}l}{Rr} = \frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{l}$$

Για τα όρια ολοκλήρωσης έχουμε: $\theta = 0 \Rightarrow l = r - R, \quad \theta = \pi \Rightarrow l = r + R$

$$\Rightarrow U = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{Rr}\int_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}l = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{Rr}\left(r + R - (r - R)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{Rr}2R = -\frac{GMm}{r}} \quad \text{όταν έχουμε } r > R$$

Εάν η μάζα βρίσκεται μέσα στο φλοιό, τότε $\int_{R-r}^{R+r} \mathrm{d}l = 2r$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{GMm}{R} = \text{ σταθερή για κάθε } r} \quad \text{όταν έχουμε } r < R$$

επομένως όταν η μάζα είναι μέσα δεν δέχεται καμία δύναμη,

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 0$$

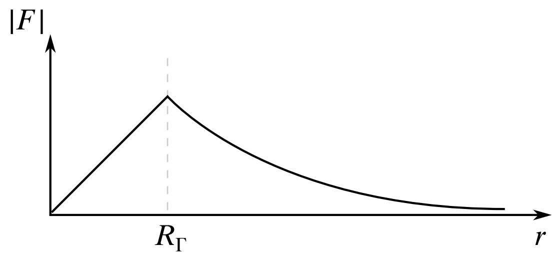
Εάν λοιπόν θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη της Γης σε μάζα μέσα στη Γη, τότε χωρίζουμε τη Γη σε δύο συμπαγείς φλοιούς, έναν με ακτίνα $(0, r)$ και έναν με ακτίνα (r, R_Γ). Η πυκνότητα της μάζας είναι $\varrho = \frac{M_\Gamma}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3}$ και ο εσωτερικός φλοιός έχει μάζα $M(r) = \frac{4}{3}\rho\pi r^3$. Ο εξωτερικός ασκεί δύναμη μηδέν στη m, ενώ για τον εσωτερικό έχουμε

$$F = -G\frac{M(r)m}{r^2} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^3}r^3\frac{m}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^3}r} \quad \text{για } r < R_\Gamma$$

και

$$F = -\frac{GM_\Gamma m}{r^2} \quad \text{για } r > R_\Gamma.$$



Σχήμα 4.14

$$U(R) = -\int_\infty^R \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_\infty^{R_\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{R_\Gamma}^R \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} - \int_{R_\Gamma}^R \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} - \int_{R_\Gamma}^R \left(-\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^3}r\right)\mathrm{d}r = \ldots = -\frac{3}{2}\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^3}\frac{R^2}{2}$$

όπου R η απόσταση από το κέντρο της Γης, $R < R_\Gamma$.