3

Αδρανειακά συστήματα αναφοράς, μετασχηματισμός Γαλιλαίου. Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς, δύναμη Coriolis

3.1 Αδρανειακά και επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς

Οι δύο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν μόνο όταν τα φαινόμενα παρατηρούνται μέσα σε μη επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς. Τότε ένα σώμα μένει ακίνητο εάν δεν ασκείται καμία δύναμη. Αν θέλετε να μείνετε ακίνητοι μέσα σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς, π.χ. σε μια ρόδα του λούνα-πάρκ ή σ' ένα λεωφορείο, τότε πρέπει να υποστείτε μια δύναμη, από την πλάτη του καθίσματος στο λεωφορείο για παράδειγμα.

Ο θεμελιώδης νόμος της κλασικής μηχανικής είναι

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

Ως προς ποιο σύστημα αναφοράς μετράμε τα μεγέθη $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}$;

1. Εάν το σύστημα αναφοράς είναι μη επιταχυνόμενο, τότε αυτή είναι η σχέση ορισμού της δύναμης $\boldsymbol{F}$ (πραγματικές δυνάμεις)

2. Αντίστροφα, **εάν γνωρίζουμε** την πραγματική (αληθινή) δύναμη $\boldsymbol{F}$ και σε κάποιο σύστημα αναφοράς ισχύει με ακρίβεια ότι $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, τότε αυτό είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

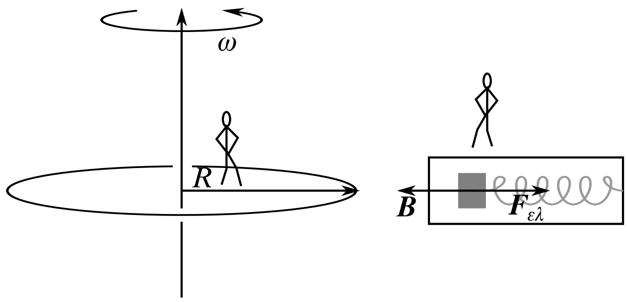
Η Γη είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς; Εξαρτάται από το βαθμό προσέγγισης και ακρίβειας του πειράματος. Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της σε 24 ώρες, άρα όλα τα σημεία της Γης έχουν μια γωνιακή ταχύτητα. Όταν μετράμε λοιπόν την επιτάχυνση της βαρύτητας, δεν βρίσκουμε σε όλους τους τόπους την ίδια τιμή. Αυτό είναι το *φαίνομενο βάρος* και μεταβάλλεται από τον Ισημερινό ως τους πόλους κατά $0,034\,\mathrm{m/s^2}$, ενώ η συνολική μεταβολή είναι $0,052\,\mathrm{m/s^2}$ και το υπόλοιπο οφείλεται στο ελλειπτικό σχήμα της Γης.

$$\begin{aligned} \text{Βόρειος Πόλος} \quad & g_{\mathrm{\pi}} = 9,8324\,\mathrm{m/s^2} \\ \text{Ισημερινός} \quad & g_{\mathrm{I}} = 9,7810\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

- Μέτρηση του g στον Ισημερινό:

Ένας απλός τρόπος μέτρησης του g είναι ο εξής. Ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία κρεμασμένο από ένα ελατήριο. Για τον παρατηρητή στο κέντρο της Γης έχουμε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_{\text{ελ}} &= m\boldsymbol{a}_k \\
-mg + k\Delta x &= -m\omega^2 R \\
\Rightarrow k\Delta x &= m\left(g - \omega^2 R\right)
\end{aligned}
$$



Σχήμα 3.1

Η δύναμη του ελατηρίου $F_{\text{ελ}} = k\Delta x$ είναι αυτό που εμείς ονομάζουμε Βάρος (φαινόμενο βάρος), άρα μας δίνει τη μετρούμενη σε αυτό τον τόπο επιτάχυνση της βαρύτητας

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow g_{\text{Ισημερινού}} = g - \omega^2 R$$

- Μέτρηση του g στον πόλο:

$$g_{\text{πολ}} = g$$

Ποιο σύστημα αναφοράς είναι πρακτικά αδρανειακό;
$\Rightarrow$ Το σύστημα των Απλανών Αστέρων (χωρίς απόδειξη). Αστέρια με επιτάχυνση πειραματικά μηδέν, επιτάχυνση $< 10^{-6}$ m/sec^2.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της Γης ως προς το κέντρο της είναι

$$a_{\text{κ, Γ}} \simeq 0,034\,\mathbf{m/s}^2$$

ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης ως προς τον Ήλιο είναι $\simeq 4,4 \times 10^{-3} m/s^2$.

Το φαινόμενο Doppler δίνει την ταχύτητα του Ήλιου ως προς το κέντρου του Γαλαξία μας

$$v \simeq 3 \times 10^5\,\mathbf{m/s} \qquad \left(R \simeq 3 \times 10^{20}\,\mathbf{m}\right)$$

τελικά η επιτάχυνση του Ήλιου ως προς το κέντρου του Γαλαξία μας (μη ανιχνεύσιμη και αμελητέα) είναι

$$a_{\text{κ, Η}} \simeq 3 \times 10^{-10}\,\mathbf{m/s}^2$$

3.2 Απόλυτη και σχετική επιτάχυνση

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς μέσα στο οποίο ισχύει $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ με μεγάλη ακρίβεια. Οι δυνάμεις (βαρυτικές, ηλεκτρικές) που έχουμε επικαλεστεί για να εξηγήσουμε την κίνηση των άστρων και των ηλεκτρονίων μείωνονται συνεχώς (και ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης) όσο το σώμα απομακρύνεται από τα γειτονικά του σώματα. Εάν διαλέξουμε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, *φαίνονται* να αναπτύσσονται δυνάμεις που δεν έχουν αυτην την ιδιότητα. Εμφανίζονται λοιπόν *υποθετικές* δυνάμεις που υπάρχουν μόνο και μόνο επειδή το σύστημα αναφοράς είναι επιταχυνόμενο.

- Αδρανειακό σύστημα αναφοράς:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_I$$

  όπου $\boldsymbol{a}_I$ η επιτάχυνση που μετρά ένας παρατηρητής σε αδρανειακό (inertial) σύστημα αναφοράς.

- Επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς με επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_0$:

  Το σώμα που κινείται έχει επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$ ως προς το δεύτερο σύστημα, επομένως

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_I &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_0 \\
\Rightarrow \boldsymbol{F} &= m\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_0\right) \\
\Rightarrow m\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0
\end{aligned}
$$

Επομένως, έχουμε την *εμφάνιση υποθετικής δύναμης* (δύναμη αδράνειας)

$$\boldsymbol{F}_0 = -m\boldsymbol{a}_0$$

και εάν $\boldsymbol{a} = 0$ τότε

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0 = 0$$

το οποίο δηλώνει ισορροπία μέσα στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα

Εκκρεμές κρέμεται κατακόρυφα σε όχημα που ηρεμεί. Όταν το όχημα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με επιτάχυνση $a_0 = 1\,\mathrm{m/s^2}$, με ποια γωνία ως προς την κατακόρυφο κρέμεται το εκκρεμές; Πόση είναι η υποθετική δύναμη αδράνειας; Επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9,81 m/sec^2$.

Λύση:

Για τον «ακίνητο» παρατηρητή έχουμε

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{a}_0$$

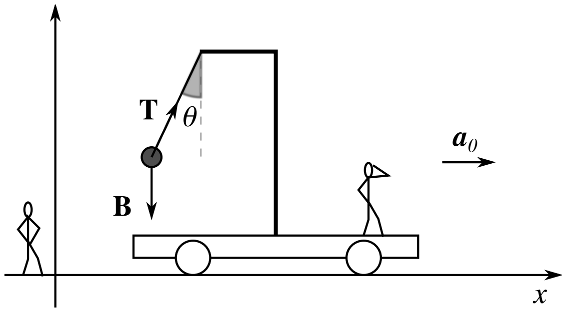
Επίσης από κατακόρυφη ισορροπία έχουμε

$$T\cos\theta = B = mg$$

και από οριζόντια κίνηση

$$T\sin\theta = ma_0$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{a_0}{g}$$



Σχήμα 3.2

Για τον κινούμενο με επιτάχυνση a_0 παρατηρητή

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_0 = 0, \qquad \boldsymbol{F}_0 = -ma_0\hat{\boldsymbol{x}}$$

Τι είναι η F_0; Πού οφείλεται; Πουθενά!

Παράδειγμα - Πειράματα μέσα σε ανελκυστήρα

Ως προς τον παρατηρητή 1 έχουμε

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{a}_1$$

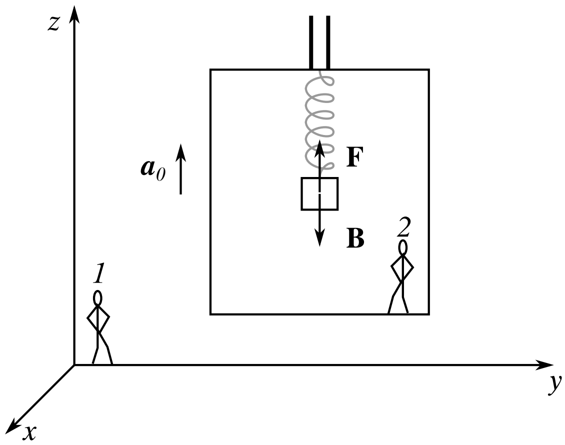
$$\begin{cases} \boldsymbol{F} &= k\Delta l\hat{\boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{B} &= -mg\hat{\boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{a}_0 &= a_0\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

Το σώμα βρίσκεται ακίνητο μέσα στον ανελκυστήρα

$$k\Delta l - mg = ma_0$$
$$\Rightarrow k\Delta l = m(a_0 + g)$$

Εάν $a_0 = -g$ τότε έχουμε $\Delta l = 0$, δηλαδή έχουμε ελεύθερη πτώση.

Ως προς τον παρατηρητή 2 έχουμε



Σχήμα 3.3

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_0 = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}_{\text{φαινόμενο}} = 0$$
$$\boldsymbol{F}_0 = -m\boldsymbol{a}_0, \qquad \boldsymbol{B}_{\text{φαινόμενο}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_0$$

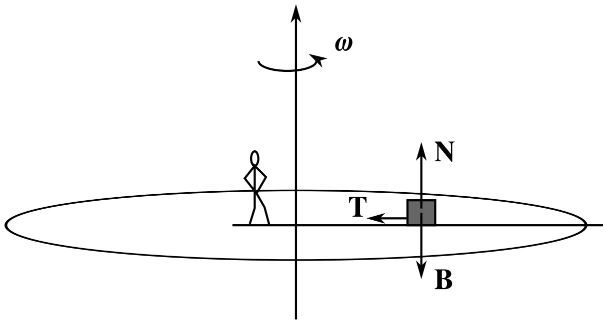
Παράδειγμα - Σύστημα που περιστρέφεται (με ω σταθερό)

Ένα βιβλίο βρίσκεται επάνω σε ένα τραπέζι. Θέλουμε το βιβλίο να παραμένει ακίνητο ως προς το τραπέζι, όταν αυτό περιστρέφεται με $\omega = 20$ στροφές/λεπτό. Το βιβλίο απέχει απόσταση $R = 1,5\,\mathrm{m}$ από τον άξονα περιστροφής, ο οποίος είναι κατακόρυφος.

(α) Βρείτε τον συντελεστή τριβής

(β) Σχεδιάστε τη δύναμη τριβής και τη φυγόκεντρο δύναμη, ως συνάρτηση της απόστασης r.

Λύση:

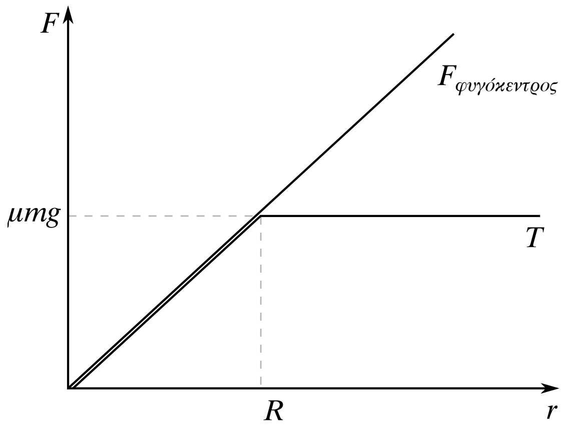


Σχήμα 3.4

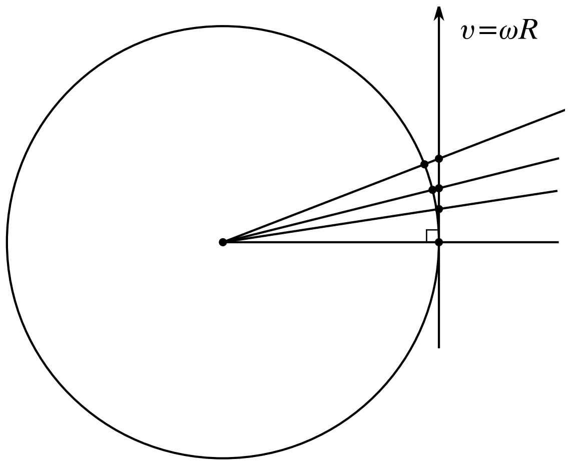
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} + \boldsymbol{B} &= 0 \\
\boldsymbol{T} &= m\boldsymbol{a}_k \\
\boldsymbol{T} &= -T\hat{\boldsymbol{r}} \\
T_{\max} &= \mu N = \mu B \\
\mu m g &= m\omega^2 R \\
\Rightarrow \mu g &= \omega^2 R
\end{aligned}
$$

Για να παραμείνει ακίνητο το σώμα επάνω στον περιστρεφόμενο δίσκο, χρειάζεται μια δύναμη. Το σώμα έχει την τάση να κινηθεί εφαπτομενικώς, δηλαδή κατά μήκος της ταχύτητας, και έτσι απομακρύνεται από το κέντρο της τροχιάς. Στιγμιαία η κίνηση είναι ακτινική για κάποιον που περιστρέφεται με το επίπεδο, άρα η τριβή είναι ακτινική.
Η τάση του σώματος να κινηθεί «ακτινικά», δηλαδή προς τα έξω, αποδίδεται σε μια δύναμη (*υποθετική δύναμη* όπως βλέπουμε), τη *φυγόκεντρο δύναμη* $\boldsymbol{F}_0 = m\omega^2 r\hat{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{F}_0 = -m\boldsymbol{a}_k$.



Σχήμα 3.5

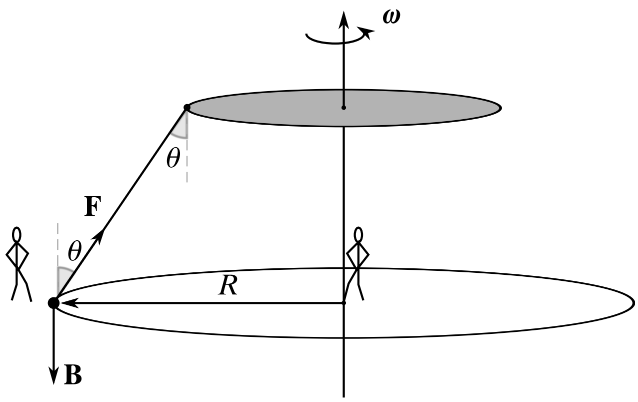


Σχήμα 3.6: *Για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, το τόξο και η ευθύγραμμη κίνηση ταυτίζονται.*

Παράδειγμα - Περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

Για τον αδρανειακό παρατηρητή έχουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_k &= -m\frac{v^2}{R}\hat{\boldsymbol{R}} = -m\omega^2 R\hat{\boldsymbol{R}} = -m\omega^2\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{B}+\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a}_k \\ &\Rightarrow \begin{cases} F\cos\theta = B & \Rightarrow F\cos\theta = mg \\ F\sin\theta = m\omega^2 R & \Rightarrow mg\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = m\omega^2 R \end{cases} \\ &\Rightarrow \tan\theta = \omega^2 R/g \end{aligned}$$



Σχήμα 3.7

Εάν η γωνία απόκλισης είναι θ, τότε η περίοδος περιστροφής είναι:

$$\omega^2 = \frac{g\tan\theta}{R}, \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g\tan\theta}{R}, \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{g\tan\theta}}$$

Εάν a είναι η ακτίνα του δίσκου και l το μήκος του νήματος τότε η ακτίνα περιστροφής R ισούται με $R = a + l\sin\theta$. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής σαν συνάρτηση της γωνίας θ τελικά είναι:

$$\omega^2 = \frac{g\tan\theta}{a+l\sin\theta} = \frac{g\sin\theta}{a+l\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

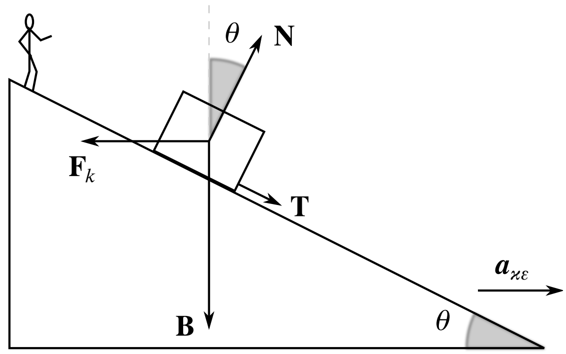
Για το μη αδρανειακό παρατηρητή θα έχουμε:

$$F\cos\theta = mg$$
$$F\sin\theta = F_{\text{φυγόκεντρη}}$$

διανυσματικά:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_\phi = 0$$
$$\text{όπου}\quad \boldsymbol{F}_\phi = m\omega^2 R\hat{\boldsymbol{R}}$$
$$\boldsymbol{F}_\phi = -m\boldsymbol{a}_k \quad \text{προς τα έξω}$$

Πρόβλημα



Σχήμα 3.8

Ένα κουτί μάζας M είναι ακίνητο σε επιταχυνόμενο όχημα, σχήματος κεκλιμένου επιπέδου. Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ κουτιού και κεκλιμένου επιπέδου είναι μ,

(α) να βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση $a_{\kappa\varepsilon}$ για να μένει ακίνητο το κουτί στο κινούμενο κεκλιμένο επίπεδο.

(β) εάν η επιτάχυνση του κεκλιμένου επιπέδου γίνει μεγαλύτερη, με πόση επιτάχυνση κινείται το κουτί ως προς το κεκλιμένο επίπεδο;

Λύση:

(α) Σχεδιάστε την υποθετική δύναμη $\boldsymbol{F}_k$:

$$\boldsymbol{F}_k = -m\boldsymbol{a}_{\kappa\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} = 0, \qquad T_{\max} = \mu N$$

(β)

$$\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{a}$$

όπου το $\boldsymbol{a}$ είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο.

$$T = T_{\max} = \mu N$$

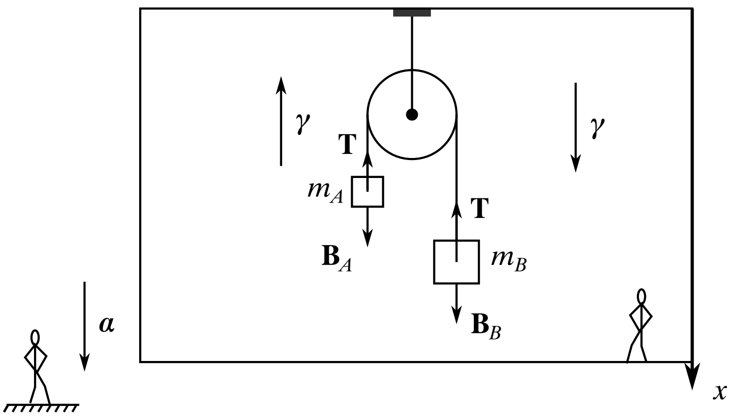
$$\text{κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο:}\quad N = B\cos\theta + F_k\sin\theta$$
$$\text{παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο:}\quad ma = -B\sin\theta + F_k\cos\theta - T$$

$$\Rightarrow a = a_{\kappa\varepsilon}\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) - g\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)$$

3.2.1 Μηχανή του Atwood

Ο ανελκυστήρας κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση a. Έστω $m_B > m_A$ και $a \le g$.
Για το μη αδρανειακό παρατηρητή, ο οποίος βλέπει επιτάχυνση γ, έχουμε

$$\text{Σώμα A:}\ T + m_A a - m_A g = m_A\gamma$$



Σχήμα 3.9

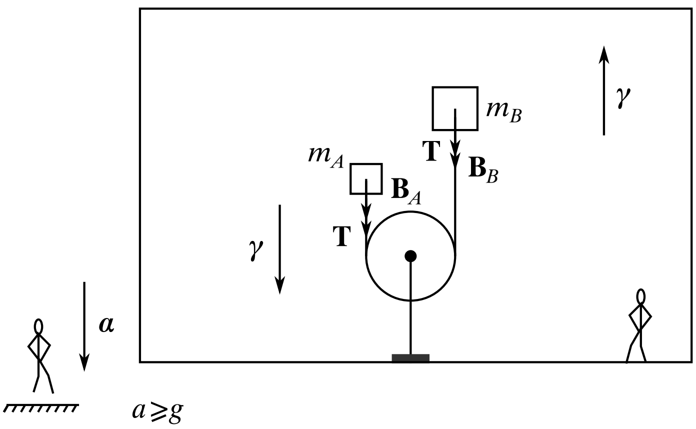
Σώμα Β: $-T - m_B a + m_B g = m_B \gamma$

$$(m_A - m_B)(a - g) = (m_A + m_B)\gamma$$

$$\gamma = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A}(g - a), \qquad a \leq g$$

Για την περίπτωση όπου $a > g$ έχουμε για το σώμα Α και το σώμα Β:

$$T + m_A g - m_A a = m_A \gamma$$
$$-T - m_B g + m_B a = m_B \gamma$$
$$(m_A - m_B)g - (m_A - m_B)a = (m_A + m_B)\gamma$$
$$\gamma = \frac{(m_A - m_B)(g - a)}{m_A + m_B} = \frac{(m_B - m_A)(a - g)}{m_B + m_A}$$



Σχήμα 3.10

3.3 Απόλυτη και σχετική ταχύτητα

Σύμφωνα με όλα τα πειράματα που έχουν γίνει ως τώρα, η απόλυτη ταχύτητα δεν έχει φυσικό νόημα.

Θεμελιώδης υπόθεση του Γαλιλαίου

*«Οι βασικοί νόμοι της φυσικής είναι **ταυτόσημοι** για όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται με ομοιόμορφη ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο.»*

Παρατηρητής σε εργαστήριο χωρίς παράθυρα δεν μπορεί να αποφανθεί εάν κινείται ή είναι ακίνητος (σταθερή ταχύτητα) ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς των απλανών αστέρων.
Εάν λοιπόν δύο παρατηρητές παρακολουθούν κάποιο φαινόμενο, και κινούνται με σχετική ταχύτητα σταθερή, τότε με τη βοήθεια των νόμων της φυσικής μπορούμε να προβλέψουμε τις μετρήσεις του δεύτερου παρατηρητή, εάν ξέρουμε τις μετρήσεις του πρώτου.

3.4 Μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Έχουμε δύο αδρανειακά καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων S και S'. Παίρνουμε για απλότητα $x \parallel x'$, $y \parallel y'$, $z \parallel z'$. Το S' κινείται ως προς το S με $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ και προφανώς v σταθερή.

1. Εάν έχουμε δύο σειρές ρολογιών που είναι πανομοιότυπα, μια σειρά στο S και μία στο S' κατά μήκος των αξόνων x και x', και συγχρονισμένα μεταξύ τους, δείχνουν όλα την ίδια ώρα για κάθε σύστημα αναφοράς. Τότε μπορούμε να συγκρίνουμε την ένδειξη των ρολογιών του S' με τα ρολόγια του S, και έχουμε
$$t' \equiv t$$
όταν βέβαια
$$v \ll 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} = c$$
για παράδειγμα $v = 10^4 \,\mathrm{m/s}$.
2. εάν έχουμε έναν χάρακα μήκους L', όπως τον μετράμε στο σύστημα S' όπου είναι ακίνητος, τότε ορίζοντας σαν μήκος L του χάρακα στο σύστημα S τη θέση των άκρων του την ίδια χρονική στιγμή, έχουμε
$$L \equiv L'$$

3.4.1 Εξισώσεις μετασχηματισμού Γαλιλαίου

Εάν $t' = 0$ όταν $t = 0$ και τα άκρα των δύο συστημάτων ταυτίζονται, τότε
$$t = t', \qquad x = x' + vt, \qquad y = y', \qquad z = z'$$
Άρα για την πρόσθεση των ταχυτήτων έχουμε
$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + v = u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z \\ \Rightarrow \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} \end{aligned}$$
Ακόμη
$$\Delta\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u}' \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{a}' = \frac{\Delta\boldsymbol{u}'}{\Delta t'}, \qquad \Delta t = \Delta t'$$

Εάν το τονούμενο σύστημα αναφοράς S' κινείται με επιτάχυνση a_0 και αρχική ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα των x, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S, τότε
$$t = t', \qquad x = x' + vt + \frac{1}{2}a_0 t^2, \qquad y = y', \qquad z = z'$$
Για τον νόμο του Νεύτωνα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς έχουμε
$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{dt^2}, \qquad F_y = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{dt^2}, \qquad F_z = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{dt^2}$$
Ενώ για το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς ισχύει
$$\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - a_0 \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - ma_0 = F_x - ma_0$$

και

$$m\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z$$

Για τον μη αδρανειακό παρατηρητή εμφανίζεται λοιπόν στις εξισώσεις κίνησης μία πρόσθετη υποθετική δύναμη $F_0 = -ma_0$ ανάλογη της επιτάχυνσης του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

3.5 Διατήρηση της ορμής

Ο νόμος διατήρησης της ορμής «αποδείχθηκε» χρησιμοποιώντας την αρχή της Δράσης-Αντίδρασης που απαιτεί άπειρη ταχύτητα αλληλεπίδρασης.

A. Μπορούμε να τον επαναδιατυπώσουμε ή «αποδείξουμε» από την Αρχή του Γαλιλαίου για το αναλλοίωτο των νόμων και τις Αρχές Διατήρησης της ενέργειας και μάζας.

   Έστω δύο σώματα 1 και 2, αρχικά ελεύθερα, με ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$. Μετά την κρούση έχουν ταχύτητες $\boldsymbol{w}_1$ και $\boldsymbol{w}_2$.

   Νόμος διατήρησης της ενέργειας (στο σύστημα S):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2 + \Delta\varepsilon \tag{3.1}$$

   Η ενέργεια $\Delta\varepsilon$ παριστάνει τη μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια των δύο σωμάτων και είναι αναλλοίωτη ποσότητα, όπως δείχνει το πείραμα.

   Νόμος διατήρησης της ενέργειας (στο σύστημα S'):

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1w_1'^2 + \frac{1}{2}m_2w_2'^2 + \Delta\varepsilon \tag{3.2}$$

   Μετασχηματισμός ταχυτήτων (μεταξύ S και S'):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1' \qquad & \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_1' \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_2' \qquad & \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_2' \end{aligned} \tag{3.3}$$

   Αντικαθιστούμε την (3.3) στην (3.2), δεχόμαστε την (3.1) και παίρνουμε

$$(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v} = (m_1\boldsymbol{w}_1 + m_2\boldsymbol{w}_2)\cdot\boldsymbol{v}$$

   για κάθε $\boldsymbol{v}$. Άρα

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{w}_1 + m_2\boldsymbol{w}_2 \tag{3.4}$$

   Αρχή Διατήρησης της ορμής.

   Επομένως

   Αναλλοίωτο + Αρχή Διατήρησης της ενέργειας $\Rightarrow$ Αρχή Διατήρησης της ορμής

B. Εάν σε ένα σύστημα έχουμε

   1. Αρχή διατήρησης ενέργειας
   2. Αρχή διατήρησης ορμής

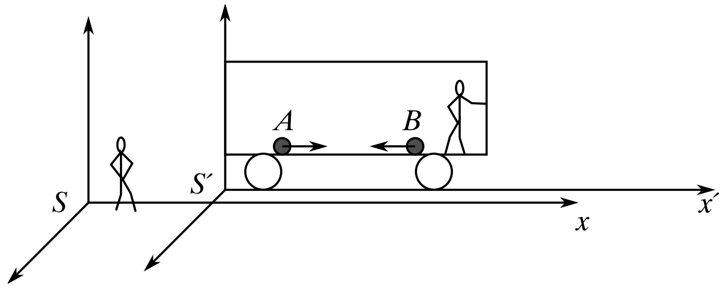
   και το αναλλοίωτο των νόμων σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου για δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα (3.2) και (3.4) σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Πρόβλημα - Εφαρμογή

Μέσα σε ένα όχημα που κινείται σε σιδηροτροχιές, σε ευθεία γραμμή και με ταχύτητα $5\,\mathrm{m/s}$, έχουμε κρούση μιας μάζας Α, $0,1\,\mathrm{kgr}$ που κινείται με ταχύτητα $1\,\mathrm{m/s}$ στην ίδια κατεύθυνση με το όχημα με μια δεύτερη μάζα Β, $0,05\,\mathrm{kgr}$ που κινείται με ταχύτητα $5\,\mathrm{m/s}$ σε κατεύθυνση αντίθετη του οχήματος.
Οι ταχύτητες των δύο μαζών αναφέρονται ως προς το όχημα. Μετά την κρούση η μάζα Β βρίσκεται ακίνητη μέσα στο όχημα.

(α) Ποια είναι η ταχύτητα της μάζας Α; Πόση κινητική ενέργεια χάθηκε;

(β) Τι βλέπει ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς τις σιδηροτροχιές;



Σχήμα 3.11

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{m/s}\,\hat{\boldsymbol{x}} &\qquad \hat{\boldsymbol{v}}'_{\mathrm{A}} &= ? = -1,5\,\mathrm{m/s}\,\hat{\boldsymbol{x}} \\ &\underbrace{\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}_{\text{προ}} = -5\,\mathrm{m/s}\,\hat{\boldsymbol{x}} &\qquad \underbrace{\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}}}_{\text{μετά}} &= 0 \end{aligned}$$

Από διατήρηση ορμής έχουμε

$$m_A\boldsymbol{v}_A + m_B\boldsymbol{v}_B = m_A\boldsymbol{v}'_A + m_B\boldsymbol{v}'_B$$

$$0,1\times 1 - 0,05\times 5 = 0,1\times v'_A + 0 \Rightarrow v'_A = \frac{0,1-0,25}{0,1} = -\frac{0,15}{0,1}$$

$$E_{\text{κιν}}(\text{προ}) = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1350}{2000}\underbrace{\mathrm{Kgr\ m^2/s^2}}_{\text{Joule}}$$

$$E_{\text{κιν}}(\text{μετά}) = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2 = \frac{225}{2000}\,\text{Joule}$$

$$\Delta E_k = E_{\text{κιν(μετά)}} - E_{\text{κιν(προ)}} = -\frac{1125}{2000}\,\text{Joule}$$

$$\Delta E_k < 0 \Rightarrow \text{ χάθηκε ενέργεια}$$

(β) Ακίνητος παρατηρητής

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{v}_{0x} + \boldsymbol{v}_A = 6\,\mathrm{m/sec}\,\hat{\boldsymbol{x}} &\qquad \boldsymbol{u}'_A &= \boldsymbol{v}_{0x} + \boldsymbol{v}'_A = 3,5\,\mathrm{m/sec}\,\hat{\boldsymbol{x}} \\ &\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{v}_{0x} + \boldsymbol{v}_B = 0 &\qquad \boldsymbol{u}'_B &= \boldsymbol{v}_{0x} + \boldsymbol{v}'_B = 5\,\mathrm{m/sec}\,\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{p}_{\text{προ}} = \boldsymbol{p}_{\text{μετά}}, \qquad \text{μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα}$$

$$E^S_{\text{κιν(προ)}} = \frac{1}{2}m_A u_A^2 + \frac{1}{2}m_B u_B^2 = \frac{3600}{2000}\,\text{Joule}$$

$$E^S_{\text{κιν(μετά)}} = \frac{1}{2}m_A u_A'^2 + \frac{1}{2}m_B u_B'^2 = \frac{2475}{2000}\,\text{Joule}$$

$$\Delta E^S_k = E_{\text{κιν(μετά)}} - E_{\text{κιν(προ)}} = -\frac{1125}{2000}$$

$$\Delta E^S_k = \Delta E_{\text{κ(τρένο)}}$$

Χάθηκε ενέργεια κατά την κρούση από τις εσωτερικές δυνάμεις τριβής, πραγματικές δυνάμεις.

3.6 Περιστρεφόμενα Συστήματα Αναφοράς - Δύναμη Coriolis

3.6.1 Σχετικά προβλήματα

Πρόβλημα 1

Ένα έντομο κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος ράβδου που περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο της, ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος της ράβδου. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου ως προς την επιφάνεια της Γης είναι ω. Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του εντόμου ως προς την επιφάνεια της Γης.

Πρόβλημα 2

Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m, το οποίο ξεκινά από το σταθερό άκρο της ράβδου με αρχική ταχύτητα v_0. Πότε φθάνει στο L;
Πόση δύναμη ασκεί η ράβδος στο σφαιρίδιο·

Πρόβλημα 3

Πόση είναι η οριζόντια απόκλιση ενός σώματος που πέφτει κατακόρυφα στον Ισημερινό λόγω της επιτάχυνσης Coriolis;

Πρόβλημα 4

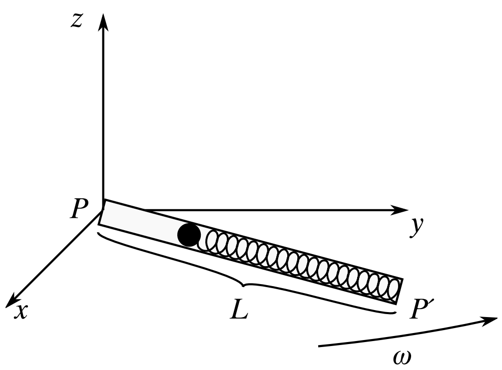
Λεπτή ράβδος μήκους $L = 1\,\mathrm{m}$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\,\mathrm{rad/sec}$ σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της, P. Σε εσωτερική ορθογώνια εσοχή και κατά μήκος της ράβδου μπορεί να κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας $M = 1\,\mathrm{Kgr}$. Το σφαιρίδιο είναι προσαρτημένο στην άκρη αβαρούς ελατηρίου φυσικού μήκους $L/2$ και σταθεράς $k = 1200\,\mathrm{Nt/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου έχει καρφωθεί στο περιστρεφόμενο άκρο P′ της ράβδου. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σφαιρίδιο βρίσκεται σε απόσταση $L/3$ από το P και έχει ταχύτητα $v_0 = 5$ m/sec με φορά από το P προς το P′.

(α) Υπολογίστε και σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται το σφαιρίδιο για $t = 0$, όπως αυτές τις μετράει ακίνητος παρατηρητής O.

(β) Υπολογίστε και σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται το σφαιρίδιο για $t = 0$, όπως αυτές τις μετράει παρατηρητής Π που περιστρέφεται μαζί με τη ράβδο.

(γ) Δείξτε ότι σύμφωνα με τον Π, η ολική δύναμη που ασκείται στο σφαιρίδιο μηδενίζεται όταν αυτό βρίσκεται σε κάποιο σημείο Α της ράβδου.

(δ) Δείξτε ότι η κίνηση του σφαιριδίου ως προς τον παρατηρητή Π είναι αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο Α και βρείτε την κυκλική της συχνότητα.



Σχήμα 3.12

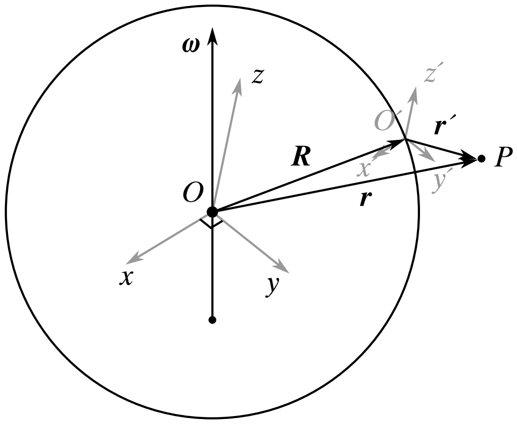
3.6.2 Δύναμη Coriolis

Έστω ένα στερεό σώμα (πχ. η Γη) το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ γύρω από ένα σταθερό σημείο Ο.

Στο σημείο P ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{u}$ ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς (x, y, z)

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στο σημείο P ως προς το τοπικό περιστρεφόμενο, με το στερεό σώμα, σύστημα αναφοράς (x', y', z'); Πώς συνδέονται οι δύο μετρήσεις;
Παρατήρηση, το τοπικό σύστημα αναφοράς (x', y', z') περιστρέφεται στιγμιαία με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ ως προς το σταθερό αδρανειακό σύστημα αναφοράς (x, y, z).



Σχήμα 3.13

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}' \\
\boldsymbol{r}' &= x'\hat{\boldsymbol{x}}' + y'\hat{\boldsymbol{y}}' + z'\hat{\boldsymbol{z}}' \\
\boldsymbol{u} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_O \quad \text{η ταχύτητα του P ως προς τον O} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}}' \quad \text{η ταχύτητα του P ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς } O'. \\
\Rightarrow \boldsymbol{v} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{O'}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)_O + \boldsymbol{v} + \underbrace{x'\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{y}}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}'}{\mathrm{d}t}}_{\text{μεταβολή του } \boldsymbol{r}' \text{ λόγω περιστροφής του } O'}$$

Για τα μοναδιαία διανύσματα ισχύει ότι λόγω περιστροφής έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{x}}', \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{y}}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}', \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{z}}'$$

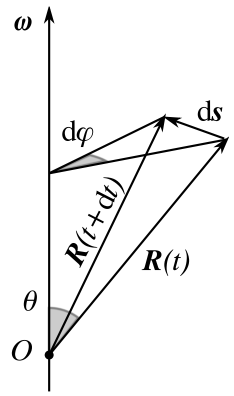
η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη για την μεταβολή του $\boldsymbol{R}$ ποιό κάτω.
Άρα:

$$\begin{aligned}
x'\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{y}}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}'}{\mathrm{d}t} &= x'\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{x}}' + y'\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}' + z'\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{z}}' \\
&= \boldsymbol{\omega} \times (x'\hat{\boldsymbol{x}}' + y'\hat{\boldsymbol{y}}' + z'\hat{\boldsymbol{z}}') = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'
\end{aligned}$$

Είναι ισοδύναμο με την περιστροφή του O' ως προς το P κατά $(-\boldsymbol{\omega})$ θεωρώντας το P στιγμιαία ακίνητο.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u} = v + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}$$



Σχήμα 3.14

διότι $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$.

Απόδειξη του τύπου για την μεταβολή του $\boldsymbol{R}$, (βλέπε σχήμα 3.14):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= R\sin\theta \mathrm{d}\phi \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= R\sin\theta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = R\sin\theta\omega \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} &= \omega \times \boldsymbol{R}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{s}\perp(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{R}) \\
\mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{R}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{R}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{R} \\
\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)_O &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}
\end{aligned}
$$

Η προηγούμενη απόδειξη είναι γενική μπορεί να εφαρμοστεί για την μεταβολή οποιασδήποτε διανυσματικής ποσότητας.
Πόση είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου στο σύστημα O'; Πώς συνδέονται οι μετρήσεις στα δύο συστήματα O και O';

$$
\boldsymbol{a} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_O
$$

είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου P στο «αδρανειακό» σύστημα αναφοράς O.

Για την επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$ στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς O' έχουμε

$$
\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathrm{d}v_{x'}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}}' + \frac{\mathrm{d}v_{y'}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}' + \frac{\mathrm{d}v_{z'}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}' = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{O'}
$$

είναι η μεταβολή της ταχύτητας $\boldsymbol{v}$ ως προς τον O'.

$$
\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_O}_{(?)} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_O}_{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})}
$$

διότι υποθέσαμε $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = 0$

$$
\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}
$$

όπου $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σωματιδίου P ως προς το χρόνο λόγω περιστροφής του συστήματος αναφοράς, υποθέτοντας ότι στιγμιαία το P έχει σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς. Επομένως έχουμε

$$
\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\gamma} + 2\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)}
$$

Εφαρμόζωντας τον νόμο του Νεύτωνα στα δύο συστήματα αναφοράς βρίσκουμε:

$$
\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\gamma} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)
$$

$$\Rightarrow m\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Η δύναμη που ασκείται στην μάζα m για το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι το άθροισμα τριών όρων. Της πραγματικής δύναμης $\boldsymbol{F}$ και δύο υποθετικών δυνάμεων, της δύναμης $Coriolis$ και της φυγόκεντρης δύναμης.

$$\boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

όπου $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα κινητού ως προς την περιστρεφόμενη Γη και $\boldsymbol{\omega}$ το διάνυσμα περιστροφής της Γης.

$$\boldsymbol{F}_{\text{φυγόκεντρος}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

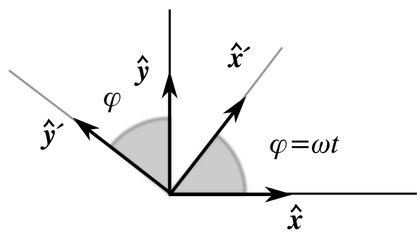
είναι η *φυγόκεντρος δύναμη* λόγω περιστροφής, και $\boldsymbol{\gamma}$ είναι η επιτάχυνση στο κινούμενο σύστημα αναφοράς.

Εφαρμογή : $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$

Σχετική κίνηση επάνω στο επίπεδο (x, y), ή θέτοντάς το αλλιώς, γύρω από τον Ισημερινό της Γης. Το σύστημα αναφοράς (x', y') περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, ως προς το ακίνητο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (x, y).
Το σημείο P έχει συντεταγμένες (x, y) ή $(x', y') = (x_R, y_R)$.

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} = x_R\hat{\boldsymbol{x}}' + y_R\hat{\boldsymbol{y}}'$$

για τα μοναδιαία διανύσματα (δες σχήμα) ισχύει



$$\hat{\boldsymbol{x}}' = a\hat{\boldsymbol{x}} + \beta\hat{\boldsymbol{y}}$$

όπου

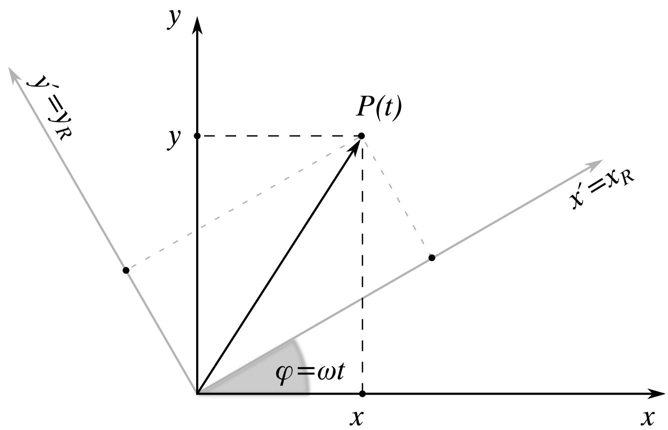
$$a = \hat{\boldsymbol{x}}' \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \cos\phi = \cos(\omega t), \qquad \beta = \hat{\boldsymbol{x}}' \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = \sin\phi = \sin(\omega t)$$

τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}' &= \hat{\boldsymbol{x}}\cos(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}\sin(\omega t)\\ \hat{\boldsymbol{y}}' &= -\hat{\boldsymbol{x}}\sin(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}\cos(\omega t)\end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες του P ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x = x_R\cos(\omega t) - y_R\sin(\omega t), \qquad y = x_R\sin(\omega t) + y_R\cos(\omega t) \qquad z = z_R$$



Σχήμα 3.15

Για την ταχύτητα $\boldsymbol{u}$ του σημείου P στα δύο συστήματα αναφοράς παραγωγίζουμε την προηγούμενη σχέση ορισμού των συντεταγμένων.
Ορίζουμε κατάρχάς για ευκολία τις ποσότητες:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$$

και βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{x}_R \cos(\omega t) - x_R \omega \sin(\omega t) - \dot{y}_R \sin(\omega t) - y_R \omega \cos(\omega t) \\
\dot{y} &= \dot{x}_R \sin(\omega t) + x_R \omega \cos(\omega t) + \dot{y}_R \cos(\omega t) - y_R \omega \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

και διανυσματικά

$$\boldsymbol{u} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{y}} = \dot{x}_R \hat{\boldsymbol{x}}' + \dot{y}_R \hat{\boldsymbol{y}}' - \hat{\boldsymbol{x}}' \omega \dot{y}_R + \hat{\boldsymbol{y}}' \omega \dot{x}_R = \boldsymbol{v} + \omega \times \boldsymbol{r}$$

όπου $\boldsymbol{v} = \dot{x}_R \hat{\boldsymbol{x}}' + \dot{y}_R \hat{\boldsymbol{y}}'$.

Για την επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$ παραγωγίζοντας τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{x}_R \cos(\omega t) - 2\omega \dot{x}_R \sin(\omega t) - \omega^2 x_R \cos(\omega t) - \ddot{y}_R \sin(\omega t) - 2\omega \dot{y}_R \cos(\omega t) + \omega^2 y_R \sin(\omega t) \\
\ddot{y} &= \ddot{x}_R \sin(\omega t) + 2\omega \dot{x}_R \cos(\omega t) - \omega^2 x_R \sin(\omega t) + \ddot{y}_R \cos(\omega t) - 2\omega \dot{y}_R \sin(\omega t) - \omega^2 y_R \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \ddot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \ddot{y}\hat{\boldsymbol{y}} = \ddot{x}_R \hat{\boldsymbol{x}}' + \ddot{y}_R \hat{\boldsymbol{y}}' + 2\omega \dot{x}_R \hat{\boldsymbol{y}}' - 2\omega \dot{y}_R \hat{\boldsymbol{x}}' - \omega^2 x_R \hat{\boldsymbol{x}}' - \omega^2 y_R \hat{\boldsymbol{y}}' \\
&= \boldsymbol{\gamma} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - \omega^2 \boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

όπου $\boldsymbol{\gamma} = \ddot{x}_R \hat{\boldsymbol{x}}' + \ddot{y}_R \hat{\boldsymbol{y}}'$.

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}' & \hat{\boldsymbol{y}}' & \hat{\boldsymbol{z}}' \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}_R & \dot{y}_R & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\boldsymbol{x}}' \omega \dot{y}_R + \hat{\boldsymbol{y}}' \omega \dot{x}_R$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}' & \hat{\boldsymbol{y}}' & \hat{\boldsymbol{z}}' \\ 0 & 0 & \omega \\ x_R & y_R & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\boldsymbol{x}}' \omega y_R + \hat{\boldsymbol{y}}' \omega x_R$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}' & \hat{\boldsymbol{y}}' & \hat{\boldsymbol{z}}' \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_R & \omega x_R & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\boldsymbol{x}}' \omega^2 x_R - \hat{\boldsymbol{y}}' \omega^2 y_R = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$

Πρόβλημα 1

Ταυτίζουμε τη ράβδο με τον άξονα x' που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Έχουμε

$$\boldsymbol{r} = x_R \hat{\boldsymbol{x}}', \qquad \boldsymbol{v} = \dot{x}_R \hat{\boldsymbol{x}}', \qquad \boldsymbol{\gamma} = \ddot{x}_R \hat{\boldsymbol{x}}'$$

όπου

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}' &= \hat{\boldsymbol{x}} \cos(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}} \sin(\omega t) \\
\hat{\boldsymbol{y}}' &= -\hat{\boldsymbol{x}} \sin(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}} \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

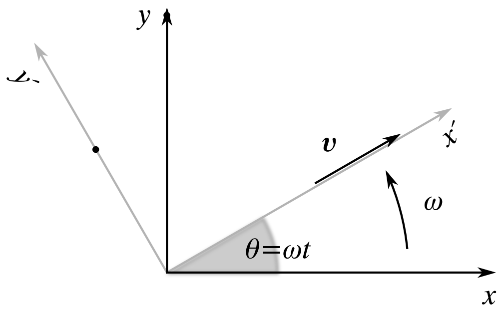
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x &= v \cos(\omega t) - \omega x_R \sin(\omega t) \\ u_y &= v \sin(\omega t) + \omega x_R \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})}_{-\omega^2 \boldsymbol{r}} + \cancelto{0}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x &= \cancelto{0}{\gamma \cos(\omega t)} - 2\omega v \sin(\omega t) - \omega^2 x_R \cos(\omega t) \\ a_y &= \cancelto{0}{\gamma \sin(\omega t)} + 2\omega v \cos(\omega t) - \omega^2 x_R \sin(\omega t) \end{cases}$$

αλλά $x_R = vt$ σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος άρα $\gamma = \ddot{x}_R = 0$.



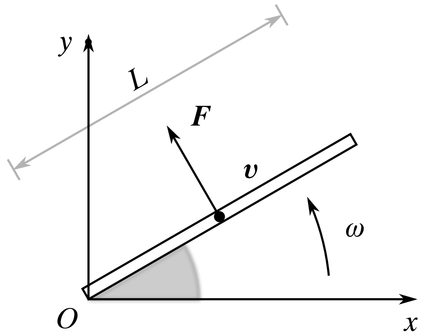
Σχήμα 3.16

Ισοδύναμα σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\hat{\boldsymbol{r}} + r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\underbrace{\hat{\boldsymbol{r}}}_{\hat{\boldsymbol{x}}'} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -r(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2\hat{\boldsymbol{r}} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} = -r\omega^2\hat{\boldsymbol{r}} + 2v\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\omega^2\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 2

Λύση: (1)



Σχήμα 3.17

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\dot{\theta} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega \ \ \text{σταθερή}
\end{aligned}
$$

Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι κάθετη στη ράβδο, ασκείται από τη ράβδο στο σφαιρίδιο, διότι δεν υπάρχει τριβή, επομένως $\boldsymbol{F} = F\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \qquad \text{και} \qquad m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 2m\omega\dot{r}}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \Rightarrow \boxed{r = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0 \Rightarrow v_0 = \omega A - \omega B = \omega(A-B) \qquad \text{και} \qquad r(t=0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$\Rightarrow A = -B \Rightarrow v_0 = 2A\omega \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{2\omega}}$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{v_0}{2\omega}\left(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}\right) = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t)$$

για $t = t_0$ στο σφαιρίδιο φτάνει στο άκρο L της ράβδου, επομένως

$$\boxed{L = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t_0)}$$

Λύση: (2)

$$m\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Η ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ του σφαιριδίου είναι κατά μήκος της ράβδου για τον περιστρεφόμενο παρατηρητή, το ίδιο και η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$.

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = \omega\dot{r}\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{r}} = \omega\dot{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{F} = F\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = -\omega^2 r\hat{\boldsymbol{r}}$$

από τις οποίες προκύπτουν

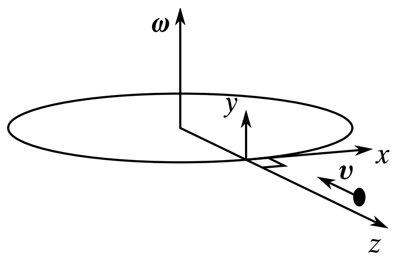
$$m\ddot{r} = m\omega^2 r \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \tag{3.5}$$
$$F - 2m\omega\dot{r} = 0 \Rightarrow F = 2m\omega\dot{r}$$

Από την (3.5) παίρνουμε

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

όπως προηγουμένως στη λύση 1. Τα $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ είναι αντίστοιχα η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση, όπως τα βλέπει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής.

Πρόβλημα 3



Σχήμα 3.18

$\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα σώματος που πέφτει τοπικά.

$$\boldsymbol{v} = -v\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\text{Επιτάχυνση Coriolis για τον κιν. παρατηρητή} = -2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = +2\omega v\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}} = 2\omega v\hat{\boldsymbol{x}}$$

επομένως η εξίσωση του Νεύτωνα για τον κινούμενο παρατηρητή είναι

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\omega v$$

Προσεγγιστικά η ταχύτητα $v = gt$, διότι το σώμα πέφτει με επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας g στον ισημερινό (φαινόμενο g)

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\omega g t \quad \text{με τη συνθήκη } \frac{\mathrm{d}x(t=0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega g t^2 \quad \text{(ολοκλήρωση)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

Για ελεύθερη πτώση από ύψος $h = (1/2)gt^2$.
Για πτώση από έναν ουρανοξύστη ύψους $100\ m$ η απόκλιση είναι $x \simeq 2,15\ cm$.

Δεύτερη ματιά στο ίδιο θέμα:

$$m\gamma = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{F} = -mg\hat{\boldsymbol{r}} \simeq -mg\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ταυτίζουμε την ακτινική διεύθυνση με τον άξονα z

$$\boldsymbol{r} \simeq (R+z)\hat{\boldsymbol{z}} + x\hat{\boldsymbol{x}} \simeq R\hat{\boldsymbol{z}} + (z\hat{\boldsymbol{z}} + x\hat{\boldsymbol{x}})$$
$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -\omega^2\boldsymbol{r} \simeq -\omega^2 \cancelto{0}{(R+z)}\ \hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \simeq -\omega^2 R\hat{\boldsymbol{z}}$$

Σχήμα 3.19

$$\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 0 & \omega & 0 \\ v_x & 0 & v_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\omega v_z - \hat{\boldsymbol{z}}\omega v_x$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -mg + 2m\omega v_x + m\omega^2 R$$
$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -2m\omega v_z$$
$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -m\left(g - \omega^2 R\right) = -mg_{\text{φαινόμενο}}, \quad \omega v_x \approx 0$$

όπου το ωv_x είναι αμελητέο ως προς το g_{φ}!!! (αποσύζευξη των εξισώσεων)

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g_{\varphi} \Rightarrow v_z = -g_{\varphi}t$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 2\omega g_{\varphi}t \Rightarrow v_x = \omega g_{\varphi}t^2$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega g_{\varphi}t^2 \Rightarrow x(t) - x(0) = \frac{1}{3}\omega g_{\varphi}t^3$$

Πρόβλημα 4

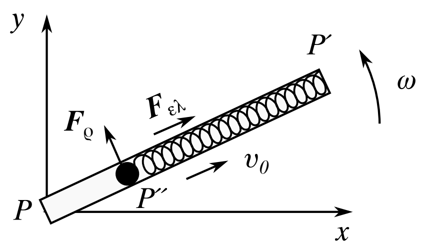
(α) Για τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l = k\left(\frac{2L}{3} - \frac{L}{2}\right) = 200\,\mathrm{Nt}$$

Για τον ακίνητο παρατηρητή ισχύει

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} = M\left(r'' - r\omega^2\right)\hat{\boldsymbol{r}} + 2M\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$v_0 = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{F}_{\rho} = F_{\rho}\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2M\omega v_0 = 100\,\mathrm{Nt}$$



Σχήμα 3.20

(β) Για παρατηρητή περιστρεφόμενο μαζί με τη ράβδο ισχύει

$$
\begin{aligned}
M\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{F} - 2M\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} - M\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\
\boldsymbol{F} &= F_{\varepsilon\lambda}\hat{\boldsymbol{r}} + F_{\rho}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\
\boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} &= -2M\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = -2M\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\boldsymbol{r}} = -2M\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\
\boldsymbol{F}_{\text{φυγόκεντρος}} &= -M\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = M\omega^2 r\hat{\boldsymbol{r}}
\end{aligned}
$$

Για τη χρονική στιγμή $t=0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
F_{\varepsilon\lambda} &= 200\,\mathrm{Nt}\\
F_{\text{Coriolis}} &= 2M\omega v_0 = 100\,\mathrm{Nt}\\
F_{\text{φυγόκεντρος}} &= \frac{100}{3}\,\mathrm{Nt}
\end{aligned}
$$

κι εφόσον η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$ δεν έχει $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ συνιστώσα:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{r}} &\Rightarrow F_{\rho} - 2M\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0\\
\Rightarrow F_{\rho} &= 2M\omega v_0 = 100\,\mathrm{Nt}
\end{aligned}
$$

(γ) Δύναμη ακτινική κατά μήκος της ράβδου

$$M\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = F_{\varepsilon\lambda} + M\omega^2 r$$

$$\text{επιτάχυνση μηδέν } \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + M\omega^2 r_0 = 0 \qquad \text{όπου } F_{\varepsilon\lambda} = k\left(\frac{L}{2} - r\right)$$

$$\Rightarrow k\left(\frac{L}{2} - r_0\right) + M\omega^2 r_0 = 0 \Rightarrow k\frac{L}{2} = \left(k - M\omega^2\right) r_0 \;\text{ για τη θέση ισορροπίας}$$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= \frac{k(L/2)}{k - M\omega^2} = r_{\text{Ισορροπίας}}\\
r_{\mathrm{I}} &= \frac{6}{11}\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(δ)

$$
\begin{aligned}
Mr'' &= k\left(\frac{L}{2} - r\right) + M\omega^2 r = -\left(k - M\omega^2\right) r + \frac{kL}{2} = -\left(k - M\omega^2\right) r + \left(k - M\omega^2\right) r_0\\
&= -\left(k - M\omega^2\right)(r - r_0)
\end{aligned}
$$

$$x = r - r_0 \qquad \Rightarrow Mx'' = -Dx \qquad \text{όπου } D = k - M\omega^2$$

$$x'' = -\frac{D}{M}x = -\omega_0^2 x$$

δηλαδή έχουμε ταλάντωση με συχνότητα

$$
\begin{aligned}
\omega_0^2 &= \frac{k - M\omega^2}{M} = \frac{k}{M} - \omega^2 > 0\\
\omega_0^2 &= (1200 - 100)\mathrm{sec}^{-2} = 1100\,\mathrm{sec}^{-2}\\
\omega_0 &= \sqrt{1100}\,\mathrm{sec}^{-1}
\end{aligned}
$$

γύρω από το σημείο ισορροπίας r_0.