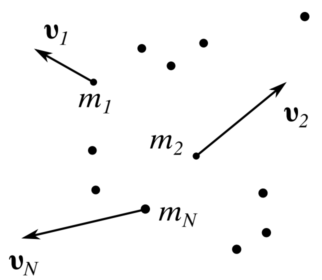
5 Συστήματα Σωματιδίων

5.1 Διατήρηση της Ορμής, Εφαρμογές

5.1.1 Ορμή

Ορμή συστήματος σωματιδίων – εσωτερικές δυνάμεις

Έχουμε ένα σύνολο N σωματιδίων με μάζες m_k, ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon}_k$ και ορμές $\boldsymbol{p}_k = m_k \boldsymbol{\upsilon}_k$.



Σχήμα 5.1

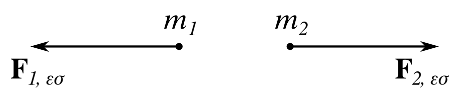
Η ολική ορμή του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{p}_{\text{ολ}} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_N = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k$$

Τα σωματίδια δέχονται εσωτερικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα σωματίδια του συστήματος και εξωτερικές δυνάμεις εκτός του συστήματος.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_k}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{k,\text{εσ}} + \boldsymbol{F}_{k,\text{εξ}}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\text{ολ}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_N}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{k,\text{εξ}} + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{k,\text{εσ}}$$

Οι εσωτερικές δυνάμεις συνολικά αλληλοαναιρούνται. Νόμος Δράσης – Αντίδρασης ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σωματίδια.



Απόδειξη. Παίρνουμε δύο σώματα:

$$\boldsymbol{F}_{2,\text{εσ}} = -\boldsymbol{F}_{1,\text{εσ}} \Rightarrow \boldsymbol{F}_{1,\text{εσ}} + \boldsymbol{F}_{2,\text{εσ}} = 0$$

□

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\text{ολ}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{k,\text{εξ}} = \boldsymbol{F}_{\text{εξ}}$$

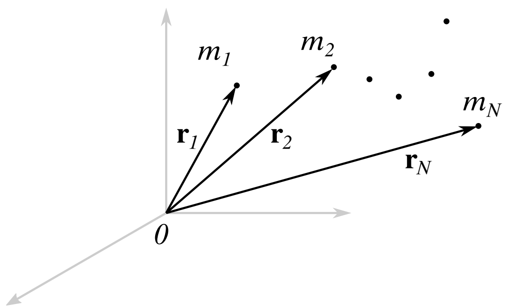
Η ολική ορμή του συστήματος αλλάζει από την επίδραση μόνο των εξωτερικών προς το σύστημα δυνάμεων.

Κέντρο Μάζας

Ορισμός του κέντρου μάζας:

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k, \qquad \boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{r}_k$$



Σχήμα 5.2

Ταχύτητα κέντρου μάζας:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{\text{KM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{v}_k$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k \Rightarrow \boldsymbol{p}_{\text{ολ}} = M\boldsymbol{v}_{\text{KM}}$$

$$\Rightarrow M\frac{\mathrm{d}v_{\text{KM}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{\text{εξ}}$$

δηλαδή το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν ένα σημειακό σώμα μάζας M υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων.

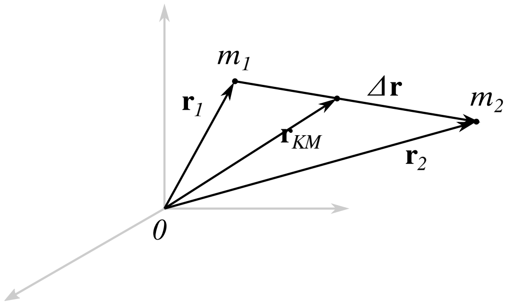
Εφαρμογή 1: Δύο σημειακά σώματα m_1, m_2

$$\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$$

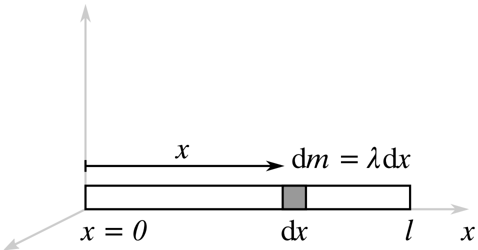
$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\left(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\right)$$

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}_1 + m_2\left(\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}\right)$$

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{M}\Delta\boldsymbol{r}$$



Σχήμα 5.3



Σχήμα 5.4

Εφαρμογή 2: Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M

Για συνεχή κατανομή μάζας χωρίζουμε το σώμα σε μικρά κομματάκια N το πλήθος και στοιχειώδης μάζας $\mathrm{d}m_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$ και παίρνουμε το N να τείνει στο άπειρο. Με λ συμβολίζουμε την πυκνότητα μάζας ανά μονάδα μήκους.

$$\lambda = \frac{M}{l}$$

$$x_{\text{KM}} = \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} x_k \mathrm{d}m_k}_{\lim N\to\infty} = \frac{1}{M}\int_{\text{ράβδος}} x\,\mathrm{d}m = \int_0^l x\frac{\lambda}{M}\mathrm{d}x$$

$$x_{\text{KM}} = \lambda \frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = \frac{\lambda}{M}\frac{l^2}{2} = \frac{M}{M}\frac{1}{l}\frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$

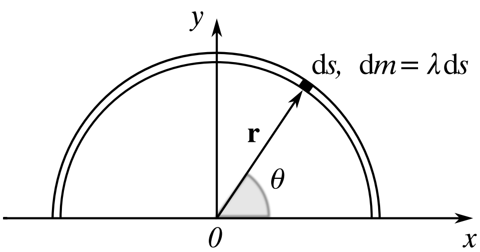
Γενικά έχουμε

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \mathrm{d}m_k = \frac{1}{M}\int_{\text{Σώμα}} \boldsymbol{r}\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V,$$

όπου $\mathrm{d}V$ ο στοιχειώδης όγκος και ρ η πυκνότητα στο σημείο $\boldsymbol{r}$.

Εφαρμογή 3: Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους l, μάζας m, σε σχήμα ημικυκλίου



Σχήμα 5.5

Έχουμε

$$\lambda = \frac{M}{l}, \qquad \pi R = l$$

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\int\limits_{\text{ράβδος}} \boldsymbol{r}\mathrm{d}m, \qquad \boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{r} = R\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + R\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}s = \lambda R \mathrm{d}\theta$$

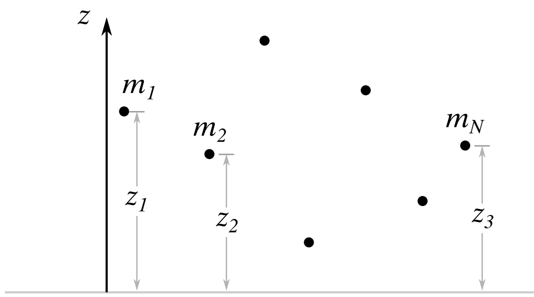
$$\Rightarrow x_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\int_0^\pi R\cos\theta\lambda R\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$$

$$\Rightarrow x_{\text{KM}} = 0$$

$$\begin{aligned} y_{\text{KM}} &= \frac{1}{M}\int_0^\pi R\sin\theta\lambda R\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda R^2}{M}\left(-(-1)-(-1)\right) = \frac{2\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{l}\frac{R^2}{M} \end{aligned}$$

$$y_{\text{KM}} = 2\frac{R^2}{l} = \frac{2}{l}\frac{l^2}{\pi^2} = \frac{2l}{\pi^2}$$

Εφαρμογή 4: Δυναμική ενέργεια σε ομογενές πεδίο βαρύτητας



Σχήμα 5.6

$$U = \sum_{k=1}^N m_k g z_k = \sum_{k=1}^N m_k z_k g = Mgz_{\text{KM}}$$

$$z_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^N m_k z_k$$

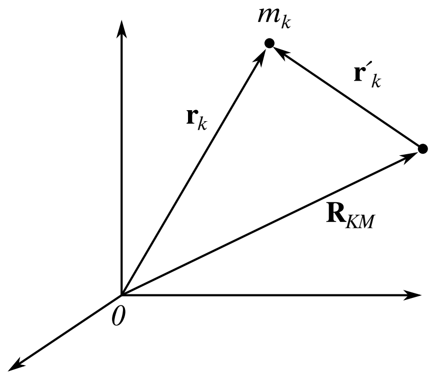
Η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη όταν το z_{KM} είναι ελάχιστο. Η δύναμη βαρύτητας για ένα στερεό σώμα είναι:

$$\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^N m_k\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{g}$$

5.1.2 Κίνηση ως προς το Κέντρο Μάζας

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \boldsymbol{r}'_k$$

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{R}_{\text{KM}} &= \sum_{k=1}^N m_k\boldsymbol{r}_k = \sum_{k=1}^N m_k\left(\boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \boldsymbol{r}'_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k\boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \sum_{k=1}^N m_k\boldsymbol{r}'_k = M\boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \sum_{k=1}^N m_k\boldsymbol{r}'_k \end{aligned}$$



Σχήμα 5.7

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}'_k = 0$$

Παραγωγίζουμε

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t} = 0$$

Ταχύτητα σωματιδίου ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{p}'_k = m_k \boldsymbol{u}_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{u}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}'_k = 0$$

ως προς το κέντρο μάζας η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν. Ακόμη ισχύει:

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_k$$

όπου

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}$$

Για την κινητική ενέργεια συστήματος σωματιδίων έχουμε

$$\begin{aligned} K_{\text{ολ}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_N v_N^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_k\right) \cdot \left(\boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_k\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_{\text{KM}} \cdot \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \frac{2}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k \end{aligned}$$

αλλά $\sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{u}_k = 0$

$$\Rightarrow K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} M v_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k u_k^2$$

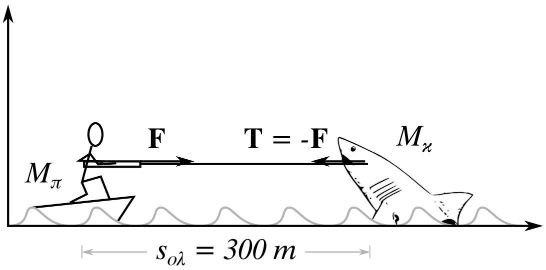
άρα η ολική ενέργεια γράφεται σαν το άθροισμα της ενέργειας του κέντρου μάζας και της ενέργειας του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας.

Πρόβλημα 1

Ψαράς σε ένα μικρό πλοίο καμακώνει έναν καρχαρία. Ο καρχαρίας είναι αρχικά ακίνητος και σε απόσταση 300 m από το πλοίο. Κατά τη διαδικασία που ο ψαράς τραβάει τον καρχαρία προς το μέρος του το πλοίο (που αρχικά ηρεμούσε) κινείται 45 m προς τον καρχαρία. Μάζα πλοίου $= 5400$ Kg.

(α) Πόση είναι η μάζα M_{κ} του καρχαρία; Υποθέστε ότι το νερό δεν ασκεί τριβές.

(β) Ποια είναι η σχέση της ταχύτητας πλοίου με την ταχύτητα του καρχαρία;



Σχήμα 5.8

Λύση:

(α) Οι δυνάμεις στο σύστημα πλοίο–καρχαρίας είναι εσωτερικές άρα η ορμή διατηρείται και το κέντρο μάζας είναι σε σταθερή θέση (ακίνητο).

$$x_{\text{KM}} = \frac{x_\text{κ} M_\text{κ}}{M_\text{π} + M_\text{κ}} = \text{σταθερό με το χρόνο}$$

Τα δύο σώματα συναντιώνται στο x_{KM}, επομένως

$$x_{\text{KM}} = 45\,\text{m}, \quad x_\text{κ} = 300\,\text{m}$$

$$\Rightarrow M_\text{κ} = M_\text{π} \frac{x_{\text{KM}}}{x_\text{κ} - x_{\text{KM}}} = 953\,\text{Kg}$$

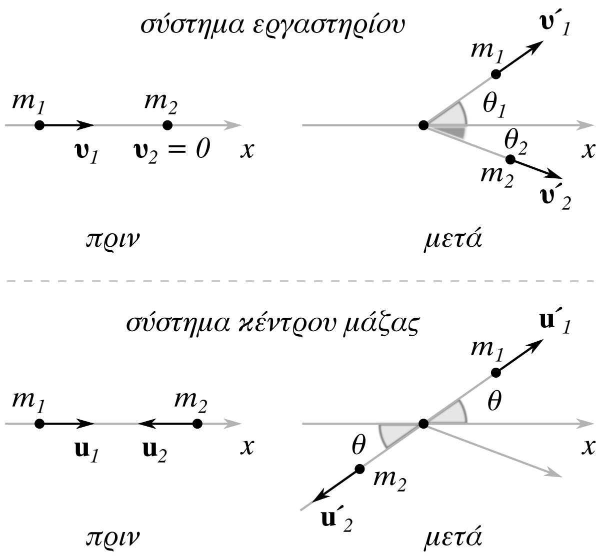
(β)

$$P(\text{αρχική}) = 0 \Rightarrow P(t) = 0$$

$$M_\text{π} v_\text{π} + M_\text{κ} v_\text{κ} = 0 \Rightarrow v_\text{κ} = -v_\text{π} \frac{M_\text{π}}{M_\text{κ}}$$

5.1.3 Ελαστική Κρούση

Σώμα μάζας m_1 κινείται οριζόντια χωρίς τριβές με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_1$ και συγκρούεται πλευρικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Η κρούση είναι τελείως ελαστική, δηλαδή διατηρείται η ενέργεια.
Περιγράψτε την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα του κέντρου μάζας.



Σχήμα 5.9

$$\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_1 = \frac{m_1}{m}v_1, \quad \text{όπου } m = m_1 + m_2$$
$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 = 0$$

$$\boldsymbol{p}_1' = m_1\boldsymbol{u}_1 = m_1\left(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{\text{KM}}\right) = \frac{m_1 m_2}{m}\boldsymbol{v}_1$$
$$\boldsymbol{p}_2' = m_2\boldsymbol{u}_2 = m_2\left(-\boldsymbol{v}_{\text{KM}}\right) = -\frac{m_1 m_2}{m}\boldsymbol{v}_1$$
$$\boldsymbol{p}_{\text{προ}}' = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = 0 = \boldsymbol{p}_{\text{μετά}}'$$

$$m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = 0 \qquad \text{και} \qquad m_1\boldsymbol{u}_1' + m_2\boldsymbol{u}_2' = 0$$

Στην ελαστική κρούση έχουμε διατήρηση της ορμής και διατήρηση της ενέργειας.

(α) $u_1 = u_1'$ και $u_2 = u_2'$.

Απόδειξη.

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2$$
$$m_1\boldsymbol{u}_1 = -m_2\boldsymbol{u}_2 \Rightarrow m_1|\boldsymbol{u}_1| = m_2|\boldsymbol{u}_2| \Rightarrow m_1u_1 = m_2u_2$$
$$\Rightarrow u_2 = \frac{m_1}{m_2}u_1 \qquad \text{και} \qquad u_2' = \frac{m_1}{m_2}u_1'$$
$$\Rightarrow m_1u_1^2 + m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}u_1^2 = m_1u_1'^2 + m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}u_1'^2$$
$$\Rightarrow u_1^2\cancel{\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)} = u_1'^2\cancel{\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)}$$
$$\Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 \Rightarrow u_1 = u_1'$$

□

(β) Σχέση μεταξύ των γωνιών θ_1 και θ:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{v_1'\sin\theta_1}{v_1'\cos\theta_1} = \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = \frac{u_{1y}'}{v_{1x}'}$$

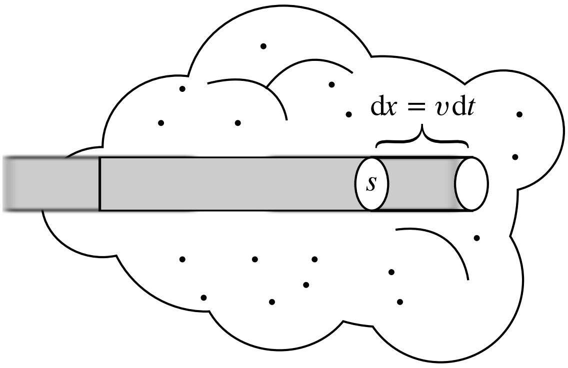
Ισχύει

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_1'$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1y}' &= u_{1y}', \qquad \text{διότι } \boldsymbol{v}_{\text{KM}} \| \hat{\boldsymbol{x}} \\ v_{1x}' &= v_{\text{KM}} + u_{1x}' = v_{\text{KM}} + u_1'\cos\theta \end{cases}$$
$$u_{1y}' = u_1'\sin\theta$$
$$\tan\theta_1 = \frac{u_1'\sin\theta}{v_{\text{KM}} + u_1'\cos\theta}, \qquad u_1' = u_1$$
$$\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_1\right)$$
$$\Rightarrow m_2\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = m_1\boldsymbol{u}_1 \Rightarrow \frac{v_{\text{KM}}}{u_1} = \frac{m_1}{m_2}$$
$$\Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta}$$

5.1.4 Συστήματα Μεταβλητής Μάζας

Πρόβλημα 2: Δορυφόρος σε διαπλανητική σκόνη

Υποθέτουμε το σύννεφο σκόνης ακίνητο και ότι ο δορυφόρος καθώς κινείται συγκρούεται με τους κόκκους της σκόνης και όλη η ποσότητα σκόνης που συναντάει κολλάει επάνω στην εμπρόσθια επιφάνειά του. Έστω ρ η πυκνότητα σκόνης ανά μονάδα όγκου, s η εμπρόσθια επιφάνεια του δορυφόρου και m_Δ η μάζα του δορυφόρου. Ζητάμε την ταχύτητα του δορυφόρου σε χρόνο t.



Σχήμα 5.10

Λύση:

Σε χρόνο $\mathrm{d}t$ ο δορυφόρος κινείται κατά $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ και η σκόνη στον όγκο $s\mathrm{d}x = sv\mathrm{d}t$ επικολλάται στο δορυφόρο. Επομένως έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}m_\Delta}{\mathrm{d}t} = \rho s \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho s v = cv$$

Το σύστημα δορυφόρος–σκόνη έχει σταθερή ορμή, μόνο εσωτερικές δυνάμεις

$$\boldsymbol{p}_{\text{ολ}} = m_\Delta \boldsymbol{v} + 0$$

όπου το σύνννεφο σκόνης είναι ακίνητο, άρα έχει ταχύτητα μηδέν

$$\boldsymbol{p}_{\text{ολ}} = \text{σταθερό} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\text{ολ}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow m_\Delta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m_\Delta}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m_\Delta}{\mathrm{d}t}\frac{v}{m_\Delta} = -c\frac{v^2}{m_\Delta(t)}$$

Διατήρηση ορμής ξανά:

$$m_{\Delta 0} v_0 = m_\Delta(t) v$$

$$\Rightarrow m_\Delta(t) = \frac{m_{\Delta 0} v_0}{v} \quad \text{όπου } m_{\Delta 0} = m_\Delta(t=0)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c\frac{v^3}{m_{\Delta 0} v_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -\frac{c}{m_{\Delta 0} v_0}\mathrm{d}t$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -\frac{c}{m_{\Delta 0} v_0} t \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right) = -\frac{ct}{m_{\Delta 0} v_0}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_0^2} + \frac{2c}{m_{\Delta 0} v_0} t$$

$$v^2 = \frac{v_0^2}{\frac{2cv_0}{m_{\Delta 0}} t + 1}$$

Το v^2 θα τείνει στο μηδέν όταν το t τείνει στο άπειρο.

Πρόβλημα 3: Πύραυλος εκτός πεδίου βαρύτητας

Πύραυλος εκπέμπει προς τα πίσω καυσαέρια με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ ως προς τον πύραυλο με σταθερό ρυθμό a, δηλαδή

$$\frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t} = -a, \quad a > 0$$

Βρείτε την ταχύτητα του πύραυλου για όσο χρονικό διάστημα δουλεύουν οι κινητήρες του.

Λύση:

Τη χρονική στιγμή t ο πύραυλος έχει μάζα m_π και ταχύτητα $\boldsymbol{v}$. Έχουμε $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ και $\boldsymbol{v}_0 = -v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ ως προς τον πύραυλο.
Το σύστημα είναι ο πύραυλος και όλο το καυσαέριο που έχει εκπέμψει. Η ολική ορμή διατηρείται.

$$\boldsymbol{p}_{\text{ολ}}(t) = m_\pi(t)\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{p}_{\text{καυσαερίων}}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\text{ολ}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_\pi \boldsymbol{v}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\text{καυσαερίων}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m_\pi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m_{\text{καυσαερίων}}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}m_\kappa}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t} = a$$

$$\Rightarrow m_\pi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_\pi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t}v_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_\pi \mathrm{d}v + \mathrm{d}m_\pi v_0 = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}v = -v_0\frac{dm_\pi}{m_\pi}$$

και ολοκληρώνουμε

$$v(t) - v(0) = -v_0 \ln\frac{m_\pi(t)}{m_\pi(0)}$$

$$m_\pi(t) = m_\pi(0) - at$$

$$\Rightarrow v(t) = v(0) + v_0 \ln\frac{m_\pi(0)}{m_\pi(t)}$$

Η ταχύτητα του πυραύλου αυξάνεται λογαριθμικά με το χρόνο.

Πρόβλημα 4: Πύραυλος εντός πεδίου βαρύτητας

Πύραυλος (ρουκέτα) με αρχική μάζα m_0 εκτονώνει αέρια προς τα κάτω με ρυθμό β και με ταχύτητα v_0 ως προς τον πύραυλο. Η τιμή του β ρυθμίζεται κατά βούληση.

(α) Να βρεθεί το β ως συνάρτηση του χρόνου, έτσι ώστε ο πύραυλος να παραμένει ακίνητος στον αέρα σε μικρό ύψος επάνω από το έδαφος.

(β) Εάν τα καύσιμα που εκτονώνονται έχουν σταθερή τιμή a, υπολογίστε την ταχύτητα ανόδου της ρουκέτας, $a > \beta$ του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση:

(α) Παράγουμε την εξίσωση κίνησης του πυραύλου (ρουκέτας) με έναν διαφορετικό τρόπο

$$\Delta\boldsymbol{p} = \left(m_\pi - \Delta m_\kappa\right)\left(\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}\right) + \Delta m_\kappa\left(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0\right) - m_\pi\boldsymbol{v}$$

$$\Delta\boldsymbol{p} = m_\pi\Delta\boldsymbol{v} + \Delta m_\kappa\boldsymbol{v}_0$$

Ο όρος $\Delta m_\kappa \Delta\boldsymbol{v}$ με το διπλό διαφόρικο είναι αμελητέος σε σχέση με τους άλλους όρους και τον αγνοούμε στο όριο $\Delta t \to 0$.

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m_\pi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m_\kappa}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_0$$

όπου

$$\beta = \frac{\mathrm{d}m_\kappa}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t} > 0$$

$$\boldsymbol{F} = -mg\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{v}_0 = -v_0\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$-m_\pi g = m_\pi \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \beta v_0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \text{πύραυλος ακίνητος}$$

$$\Rightarrow \beta v_0 = m_\pi g \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} v_0 = \frac{\mathrm{d}m_\pi}{\mathrm{d}t} g$$

$$\Rightarrow v_0 \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\beta g \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{v_0}\beta$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta} = -\frac{g}{v_0}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \beta(t) = \beta_0 \mathrm{e}^{-(g/v_0)t}$$

όπου

$$\beta_0 = \beta(t = 0)$$

(β)

$$-m_\pi g = m_\pi \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - a v_0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + a\frac{v_0}{m_\pi(t)}, \quad m_\pi(t) = m_0 - at$$

$$v(t) = -gt + av_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{m_0 - at'}, \qquad v(t = 0) = 0$$

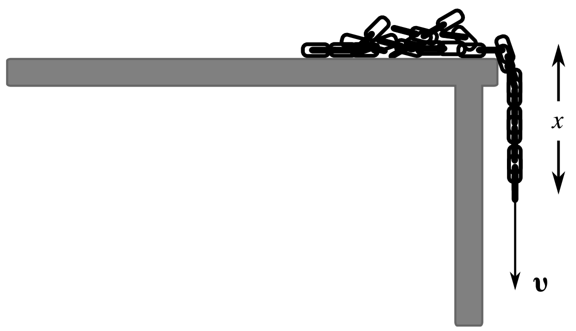
$$v(t) = -gt + v_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - at}$$

Πρόβλημα 5

Αλυσίδα μάζας m και μήκους l βρίσκεται σωριασμένη στο χείλος ενός τραπεζιού. Με μια μικρή ώθηση το ένα άκρο της αλυσίδας αρχίζει να πέφτει. Το κάθε τμήμα εγκαταλείπει το τραπέζι με ταχύτητα μηδέν, αλλά μόλις βρεθεί στο κενό αποκτά την ταχύτητα της αλυσίδας, που είναι ήδη σε κίνηση.

(α) Πόση είναι η ταχύτητα της αλυσίδας, όταν βρίσκεται στο κενό μήκος της ίσο με x;

(β) Όταν βρεθεί στο κενό ολόκληρη η αλυσίδα, τι ποσοστό από την αρχική δυναμική ενέργεια έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια;



Σχήμα 5.11

Λύση:

(α) Η γραμμική πυκνότητα αλυσίδας είναι $\mu = m/l$, ενώ για τη μάζα αλυσίδας στο κενό έχουμε $m(x) = \mu x$.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F(x), \qquad F(x) = m(x)g = \mu g x$$

$$p = m(x)v$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mu g x = \mu v^2 + \mu x v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow gx = v^2 + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$gx = v^2 + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x}$$

$$y = v^2 \Rightarrow gx = y + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με x και ορίζουμε νέα μεταβλητή την $z = x^2 y$

$$gx^2 = yx + \frac{x^2}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2xy + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2gx^2 \Rightarrow \mathrm{d}z = 2gx^2\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{3}gx^3$$

$$\Rightarrow x^2 y = \frac{2}{3}gx^3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}gx$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{3}gx$$

(β) Η αρχική ενέργεια είναι όλη δυναμική.

$$E_{\text{αρχ}} = mgl$$

$$E_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}m\frac{2}{3}gl + mg\frac{l}{2}$$

$$E_{\text{τελ}} = mgl\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow E_{\text{τελ}} < E_{\text{αρχ}}$$

Δεν διατηρείται η ενέργεια, ένα μέρος της χάνεται σε τριβές.

5.2 Διατήρηση της Στροφορμής, Εφαρμογές

5.2.1 Ροπή δύναμης – Στροφορμή Σωματιδίου

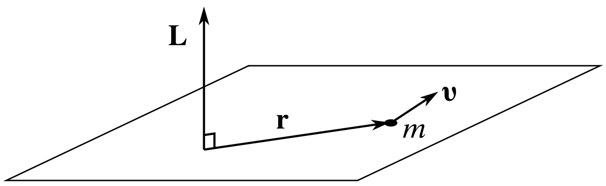
Για ένα σώμα μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ ορίζουμε το διάνυσμα της στροφορμής ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \qquad \text{όπου } \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

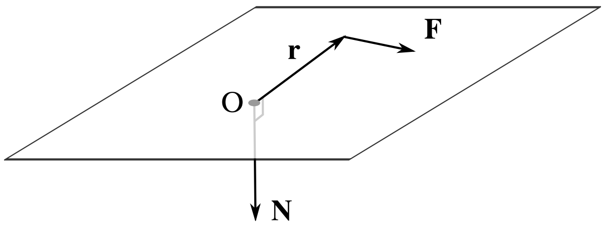
Η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο $\boldsymbol{r}$ και στην ορμή (ταχύτητα) $\boldsymbol{p}$ του σωματιδίου λόγω του εξωτερικού γινομένου.

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{p} = 0$$

$$\boldsymbol{L} \perp (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$



Σχήμα 5.12



Σχήμα 5.13

Η στροφορμή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{v}$.
Η *ροπή μιας δύναμης* ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο της δύναμης επί το διάνυσμα θέσης του σώματος (βλ. σχήμα 5.13):

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad\qquad \boldsymbol{N} \perp (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F})$$

Η ροπή της δύναμης είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$.

Μεταβολή Στροφορμής με το χρόνο:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \cancelto{0}{m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$$

Εάν η ροπή της δύναμης είναι μηδέν, τότε η στροφορμή διατηρείται (διανυσματικά), δηλαδή το διάνυσμα της στροφορμής είναι σταθερό.

Εάν η δύναμη οφείλεται σε ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων, και εάν υπολογίζουμε τη στροφορμή ως προς αυτό το σημείο

$$\boldsymbol{F} = F(r)\hat{\boldsymbol{r}} \Rightarrow \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \text{διότι} \qquad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

Η στροφορμή διατηρείται.

Η κίνηση γίνεται τότε σε ένα επίπεδο κάθετο στη στροφορμή $\boldsymbol{L}$ και αυτό το επίπεδο κίνησης παραμένει σταθερό στο χρόνο.

Παράδειγμα κεντρικών δυνάμεων οι δυνάμεις βαρύτητας, όπου το επίπεδο κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο παραμένει σταθερό εάν αμελήσουμε την επίδραση των άλλων πλανητών.

Παράδειγμα 1: Ευθύγραμμη κίνηση σώματος

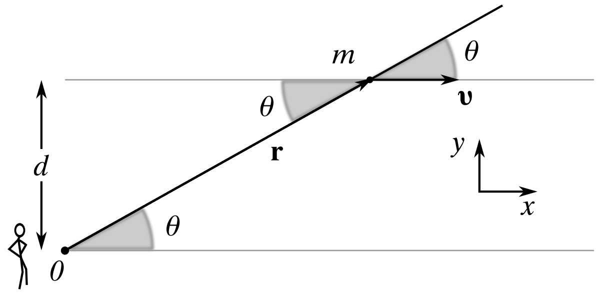
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

Τα $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ είναι στο επίπεδο του χαρτιού, επομένως το $\boldsymbol{L}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού.

$$\boldsymbol{L} = -m|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{v}| \sin\theta \hat{\boldsymbol{z}}$$

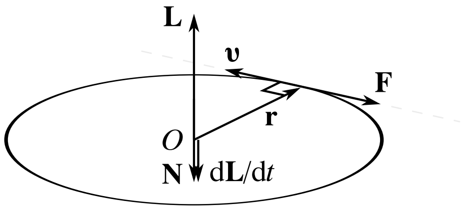
Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $|\boldsymbol{r}| = r$ και $|\boldsymbol{v}| = v$, έχουμε

$$r \sin\theta = d \Rightarrow \boldsymbol{L} = -mdv\hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 5.14

Παράδειγμα 2: Κυκλική κίνηση σώματος



Σχήμα 5.15

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

Κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{L} = mrv\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{N} = -rF\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad |\boldsymbol{r}| = r, \quad \text{σταθερό}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = mr\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} = -rF\hat{\boldsymbol{z}} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -F, \quad \text{νόμος του Νεύτωνα}$$

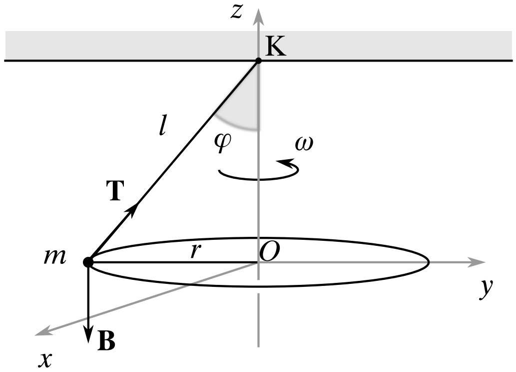
Πρόβλημα 6

Μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται μέσω νήματος μήκους l από ακλόνητο σημείο ανάρτησης Κ, και κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας r (της οποίας το κέντρο Ο βρίσκεται στην κατακόρυφο από το σημείο ανάρτησης Κ). Βρείτε:

(α) τη στροφορμή της μάζας ως προς τα σημεία Κ και Ο

(β) το ρυθμό μεταβολής του διανύσματος της στροφορμής ως προς τα σημεία Κ και Ο. Δώστε ερμηνεία.

Λύση:



Σχήμα 5.16

Έχουμε κυκλική κίνηση της μάζας. Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος και η τάση του νήματος.

$$\begin{aligned} T\sin\phi &= m\frac{v_0^2}{r} = m\omega^2 r, \quad v_0 = \omega r \\ T\cos\phi &= mg \end{aligned}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega^2 r}{g} \xrightarrow{r=l\sin\phi} \cos\phi = \frac{g}{\omega^2 l}$$

(α) Διάνυσμα θέσης ως προς το σημείο K:

$$\boldsymbol{r}_k = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} - l\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}} = r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}}$$

για $t = 0$ έχουμε $x = r,\ y = 0,\ z = z_0 = l\cos\phi$.

Στροφορμή ως προς το σημείο K:

$$\boldsymbol{L}_k = m\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{v}_k$$

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = -\omega r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \omega r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_k &= m\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ r\cos(\omega t) & r\sin(\omega t) & -z_0 \\ -\omega r\sin(\omega t) & \omega r\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= m\hat{\boldsymbol{x}}\left(z_0\omega r\cos(\omega t)\right) - m\hat{\boldsymbol{y}}\left(-z_0\omega r\sin(\omega t)\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\omega r^2\cos^2(\omega t) + \omega r^2\sin^2(\omega t)\right) \\ \Rightarrow \boldsymbol{L}_k &= ml\cos\phi\omega r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + ml\cos\phi\omega r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} + m\omega r^2\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{v}_k| = \omega r = v_0, \qquad \boldsymbol{L}_k = mlv_0\cos\phi\left(\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}\right) + mrv_0\hat{\boldsymbol{z}}$$

Στροφορμή ως προς το σημείο O :

$$\boldsymbol{L}_0 = m\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{r}_0 = r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{v}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_k$$

$$\boldsymbol{L}_0 = m\omega r^2\hat{\boldsymbol{z}} = mrv_0\hat{\boldsymbol{z}}$$

(β)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} &= mlv_0\cos\phi\left(-\omega\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \omega\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}\right) \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} &= ml\omega v_0\cos\phi\left(-\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}\right) \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_0}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

Ροπή δυνάμεων ως προς το σημείο K:

Για τη ροπή τάσης του νήματος έχουμε

$$\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{T} = 0$$

Η ροπή βάρους είναι

$$\boldsymbol{N}_B = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B} = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_B &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ r\cos(\omega t) & r\sin(\omega t) & -z_0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(-mgr\sin(\omega t)\right) - \hat{\boldsymbol{y}}\left(-mgr\cos(\omega t)\right) \\ &= -mgr\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + mgr\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\ \Rightarrow \boldsymbol{N}_B &= -ml\omega^2 r\cos\phi\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + ml\omega^2 r\cos\phi\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}_B$$

Για τη ροπή δυνάμεων ως προς το σημείο O έχουμε,

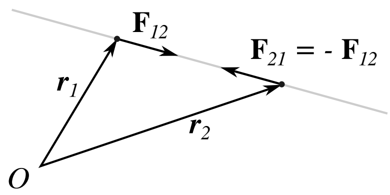
$$\text{Ροπή βάρους} = rB$$

$$\text{Ροπή τάσης νήματος} = -rT\sin(\frac{\pi}{2}+\phi) = -rT\cos\phi = -rB$$

επομένως η συνολική ροπή ως προς το O είναι μηδέν, και άρα

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_0}{\mathrm{d}t} = 0$$

5.2.2 Σύστημα Σωμάτων – Εσωτερικές Δυνάμεις, Στροφορμή Κέντρου Μάζας



Σχήμα 5.17

Για ένα σύστημα N σωμάτων η ολική ροπή είναι το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε σώμα (βλ. σχήμα 5.17)

$$\boldsymbol{N}_{\text{ολ}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k$$

Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το άθροισμα των εξωτερικών ως προς το σύστημα δυνάμεων και των εσωτερικών δυνάμεων από το ένα σωματίδιο στο άλλο.

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F}_{k,\text{εξ}} + \boldsymbol{F}_{k,\text{εσωτ.}}$$

$$\boldsymbol{F}_{k,\text{εσωτ.}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}$$

$$\boldsymbol{N}_{\text{ολ}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{k,\text{εξ}} + \sum_{k=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{kj}\right\}$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα:

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} \| (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \Rightarrow (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{N}_{\text{ολ}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{k,\text{εξ}} = \boldsymbol{N}_{\text{εξωτ. δυνάμεων}} \\ \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\text{ολ}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}_{\text{εξ}} \end{cases}$$

Σύστημα σωματιδίων σε σταθερό πεδίο βαρύτητας

$$\boldsymbol{N}_B = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k, \qquad \boldsymbol{F}_k = m_k \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{N}_B = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{g} = M \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{N}_B = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{g}$$

Επομένως η ροπή του βάρους ως προς το κέντρο μάζας είναι μηδέν.

Για τη στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας έχουμε

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k, \qquad M = \sum_{k=1}^{N} m_k$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{\text{ολ}} &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{L}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \boldsymbol{r}'_k\right) \times \left(\boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \boldsymbol{u}_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{u}_k + \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{u}_k \end{aligned}$$

Ισχύει

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{u}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}'_k = 0$$

επομένως

$$\boldsymbol{L}_{\text{ολ}} = M \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{u}_k$$

Η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος είναι

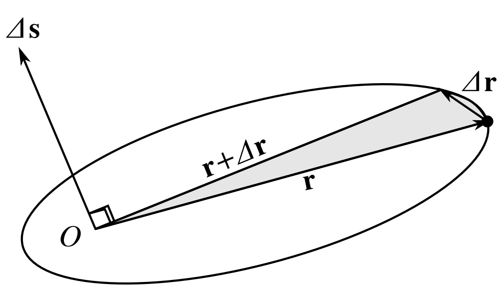
$$\boldsymbol{L}_{\text{KM}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{u}_k$$

Για τη στροφορμή του κέντρου μάζας ως προς το σημείο αναφοράς έχουμε

$$\boldsymbol{M} \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} \times \boldsymbol{p}_{\text{ολ}}$$

5.2.3 Εφαρμογές – Ασκήσεις

Εφαρμογή 1: Δεύτερος Νόμος του Kepler



Σχήμα 5.18

Το εμβαδόν του στοιχειώδους τριγώνου που σχηματίζεται είναι

$$\Delta s = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \Delta \boldsymbol{r}$$

Παρατήρηση: Για το εμβαδόν παραλληλογράμμου ισχύει

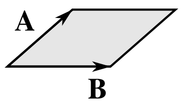
$$E = |\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r})| = |\boldsymbol{r} \times \Delta \boldsymbol{r}|$$

το οποίο προκύπτει από τη σχέση

$$E = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$$

Για το εμβαδόν τριγώνου αντίστοιχα ισχύει

$$\overset{\Delta}{\mathrm{OAB}} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$$



$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

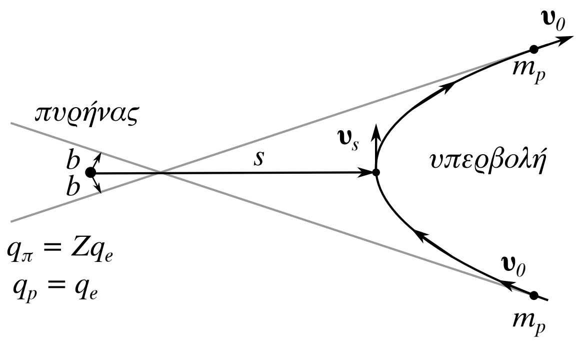
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2m}\boldsymbol{L}$$

για ένα σώμα μάζας m. Εάν το κέντρο Ο ασκεί δύναμη στη μάζα m κατά μήκος τους $\boldsymbol{r}$, κεντρική δύναμη, τότε η στροφορμή διατηρείται, άρα

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \text{σταθερό με το χρόνο}$$

άρα σε ίσα χρονικά διαστήματα η μάζα m που κινείται ως προς το κέντρο Ο σαρώνει ίσα εμβαδά. Παράδειγμα: Ήλιος – Γη.

Εφαρμογή 2: Σκέδαση πρωτονίου από βαρύ πυρήνα



Σχήμα 5.19

Υποθέτουμε τον πυρήνα ακίνητο με μεγάλη μάζα. Το πρωτόνιο σε μεγάλη (άπειρη) απόσταση αρχικά με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ έχει μηδενική δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης με τον πυρήνα, πλησιάζει σε ελάχιστη απόσταση s και ανακλάται. Οι δύο ασυμπτωτικές καμπύλες (ευθείες γραμμές) στις οποίες κινείται το πρωτόνιο είναι ασύμπτωτες ευθείες γραμμές μιας υπερβολής.

Από διατήρηση ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{1}{2}m_p v_s^2 + k\frac{q_\pi q_p}{s}$$

Από διατήρηση στροφορμής (δύναμη κεντρική)

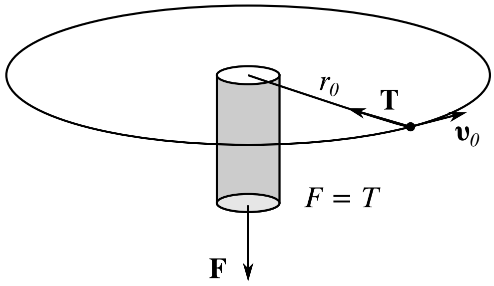
$$m_p v_0 b = m_p v_s s$$

όπου b η παράμετρος κρούσης, γνωστή ποσότητα. Η ορμή δεν διατηρείται. Απαλείφουμε το v_s και έχουμε

$$k\frac{zq_e^2}{s} = \frac{1}{2}m_p v_0^2\left(1 - \frac{b^2}{s^2}\right) \Rightarrow s = \ldots$$

Εφαρμογή 3: Σύστημα που συστέλλεται

Σώμα μάζας m κινείται κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο (όπως στο σχήμα). Πόσο έργο παράγεται εάν η ακτίνα ελαττωθεί από r_0 σε r_1; Υποθέτουμε ότι κάθε χρονική στιγμή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση.



Σχήμα 5.20

Λύση:

Στο σώμα ασκείται η δύναμη T από το νήμα, κάθετη στην ταχύτητα, κατά μήκος της ακτίνας. Η ροπή της τάσης του νήματος T είναι ίση με μηδέν, επομένως από διατήρηση της στροφορμής έχουμε

$$mv_0 r_0 = mvr, \qquad \text{γενικά για κάθε απόσταση}$$

Το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση, άρα η T έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$T = m\frac{v^2}{r} = \frac{m}{r}\frac{v_0^2 r_0^2}{r^2} = m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}$$

$$W_{\text{συστολής}} = \int_{r_0}^{r_1} \boldsymbol{T}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = mv_0^2 r_0^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^3}(-1)$$

$$\boldsymbol{T} = -T\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$W_{\text{συστολής}} = -mv_0^2 r_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right\} = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1\right)$$

Από μεταβολή κινητικής ενέργειας έχουμε

$$\Delta E_k = E_{k,(\text{μετά})} - E_{k,(\text{προ})} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1\right)$$

Εάν $r_0 > r_1$ τότε $\Delta E_k = W_{\text{συστολής}} > 0$. Καταβάλλεται έργο $W_{\text{συστολής}}$ για να ελαττώσουμε την ακτίνα, άρα το σύστημα δρα σαν να υπάρχει μια εξωτερική απωστική δύναμη που πρέπει να υπερνικήσουμε για να ελαττώσουμε την ακτίνα κίνησης.

Εφαρμογή 4

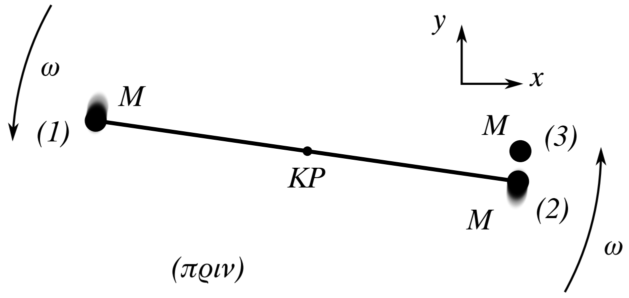
Δύο ίσες μάζες M συνδέονται μέσω αβαρούς ράβδου μήκους l. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από το κέντρο της ράβδου («ΚΡ») με γωνιακή ταχύτητα ω. Η μία από τις δύο μάζες συγκρούεται μετωπικά με μια τρίτη ακίνητη μάζα M και προσκολλώνται η μία στην άλλη.

(α) Προσδιορίστε το κέντρο μάζας («ΚΜ») του συνολικού συστήματος λίγο πριν την κρούση και την ταχύτητά του.

(β) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος των τριών μαζών ως προς το ΚΜ πριν την κρούση; Ποια μετά την κρούση;

(γ) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση;

(δ) Πόση είναι η αρχική και τελική κινητική ενέργεια;



Σχήμα 5.21

(α) Για τη θέση κέντρου μάζας ως προς το κέντρο της ράβδου έχουμε

$$x_{\text{KM}} = \frac{-M(l/2) + M(l/2) + M(l/2)}{M + M + M} = \frac{l}{6}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \frac{1}{3M}\left(M\boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{v}_2 + 0\right) = 0$$

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\omega l}{2}\hat{\boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{\omega l}{2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

(β)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\text{προ}} &= M\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 + 0\\ &= M\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{6}\right)\left(\omega\frac{l}{2}\right)(-\hat{\boldsymbol{x}}) \times (-\hat{\boldsymbol{y}}) + M\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)\left(\omega\frac{l}{2}\right)(\hat{\boldsymbol{x}}) \times (\hat{\boldsymbol{y}})\\ &= \frac{1}{2}M\omega l^2\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

και

$$\boldsymbol{L}_{\text{μετά}} = \boldsymbol{L}_{\text{προ}}$$

διότι οι δυνάμεις είναι εσωτερικές, άρα η συνολική στροφορμή διατηρείται.
(γ) Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή, $\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = 0$. Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\text{μετά}} &= M\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{6}\right)\left(\omega'\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{6}\right)\right)(-\hat{\boldsymbol{x}}) \times (-\hat{\boldsymbol{y}}) + 2M\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)\left(\omega'\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)\right)\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}}\\ &= M\frac{2l^2}{3}\omega'\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Ml^2\omega = \frac{2}{3}Ml^2\omega'$$

$$\omega' = \frac{3}{4}\omega$$

(δ)

$$\begin{aligned}K_{\text{προ}} &= \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = M\omega^2\frac{l^2}{4}\\ K_{\text{μετά}} &= \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}2Mv'^2\\ K_{\text{μετά}} &= \frac{1}{2}M\left(\frac{2l}{3}\omega'\right)^2 + \frac{1}{2}2M\left(\frac{l}{3}\omega'\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega'^2\\ K_{\text{μετά}} &= \frac{3}{16}Ml^2\omega^2\end{aligned}$$

$$\Delta K = K_{\text{μετά}} - K_{\text{προ}} = -\frac{1}{16}M\omega^2 l^2$$

Εφαρμογή 5

Σύστημα που συστέλλεται καθώς περιστρέφεται λόγω των εσωτερικών δυνάμεων βαρύτητας. M_k είναι η μάζα του ελκτικού κέντρου και m η μάζα του σώματος (πλανήτη) που έλκεται από το κέντρο και περιστρέφεται.

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{κιν}} + E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_k m}{r}\right)$$

Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι ακτινική

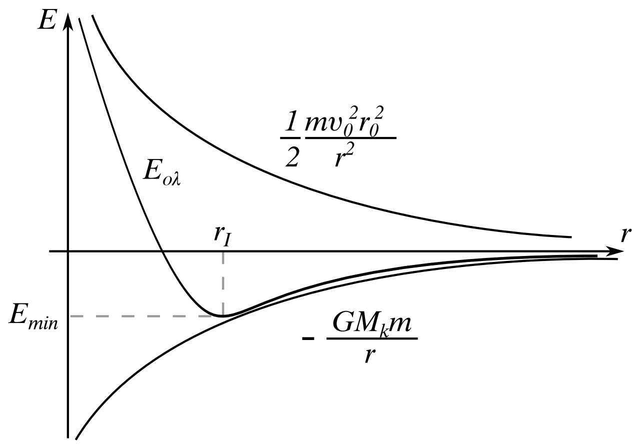
$$\boldsymbol{F} = -\frac{GM_k m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

άρα η στροφορμή διατηρείται.

$$mv_0 r_0 = mvr \Rightarrow v = \frac{v_0 r_0}{r}$$

Η δύναμη είναι ακτινική, κάθετη στην ταχύτητα στιγμιαία

$$E_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^2} - \frac{GM_k m}{r} = E(r)$$



Σχήμα 5.22

Η ενέργεια παρουσιάζει ελάχιστο όταν

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_I} = 0$$

Εάν $E''(r_I) > 0$, το σημείο είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = -\frac{mv_0^2 r_0^2}{r^3} + \frac{GM_k m}{r^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = \frac{m}{r^2}\left(GM_k - \frac{v_0^2 r_0^2}{r}\right)$$

$$\Rightarrow r_I = \frac{v_0^2 r_0^2}{GM_k}$$

Διατήρηση στροφορμής, θέση ισορροπίας

$$v_I r_I = v_0 r_0 \Rightarrow v_I = \frac{v_0 r_0}{r_I}$$

Στη θέση ισορροπίας έχουμε

$$r_I = \frac{v_I^2 r_I^2}{GM_k} \Rightarrow m\frac{GM_k}{r_I^2} = m\frac{v_I^2}{r_I}$$

επομένως η δύναμη βαρύτητας είναι ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση λόγω περιστροφής.

Εφαρμογή 6: Επίπεδη κίνηση

(α) Σε πολικές συντεταγμένες η ταχύτητα γράφεται:

$$\boldsymbol{v} = v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{\boldsymbol{r}}) \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \qquad v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega$$

(β) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου γράφεται:

$$K = \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \omega^2 r^2\right]$$

Λύση:

$$K = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}M\left(v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\cdot\left(v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}Mv_\theta^2, \qquad \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$$

(γ) Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$E_{\text{ολ}} = U(r) + \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2}$$

όπου L η στροφορμή του σωματιδίου και $U(r)$ η δυναμική ενέργεια, $r = |\boldsymbol{r}|$.

Λύση:

Η δύναμη $\boldsymbol{F} = -\nabla U = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι κεντρική, άρα η στροφορμή διατηρείται

$$\boldsymbol{L} = M\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = Mrv_\theta\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$L = Mrv_\theta = Mr^2\omega = \text{σταθερή} \Rightarrow v_\theta = \frac{L}{Mr}$$

$$\begin{aligned}E &= K + E_\Delta = U(r) + \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = U(r) + \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{Mr^2} \\ &= V(r) + \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\end{aligned}$$

όπου

$$V(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$$

είναι το ενεργό δυναμικό.

(δ)

$$\boldsymbol{F}_{\text{ολ}} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}} = F_{\text{ολ}}(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$F_{\text{ολ}}(r) = \frac{L^2}{Mr^3} - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

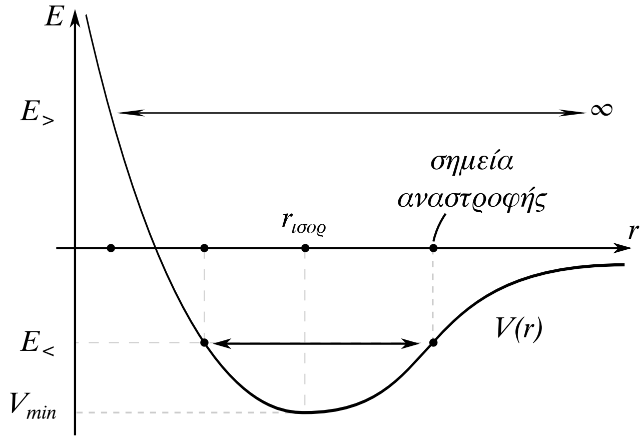
$$F_{\text{φυγοκ}} = \frac{L^2}{Mr^3} \qquad \text{απωστική δύναμη}$$

Για το πεδίο βαρύτητας ισχύει

$$U(r) = -\frac{GM_kM}{r}$$

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση του ενεργού δυναμικού $V(r)$ ως προς την ακτίνα r. Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις (ι) $E > 0$, το σωματίδιο κινείται από μία ελάχιστη απόσταση μέχρι το άπειρο και (ιι) $E < 0$, το σωματίδιο κινείται ανάμεσα στα δύο σημεία αναστροφής r_1, r_2 όπου $E = V(r_1, r_2)$ και η ακτινική ταχύτητα εκεί είναι μηδέν.
Το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού καθορίζει την θέση ισορροπίας

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_I} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_I = \frac{L^2}{GM_kM^2} \qquad \Rightarrow \qquad V_{min} = -\frac{M^3G^2M_k^2}{2L^2}$$



Σχήμα 5.23

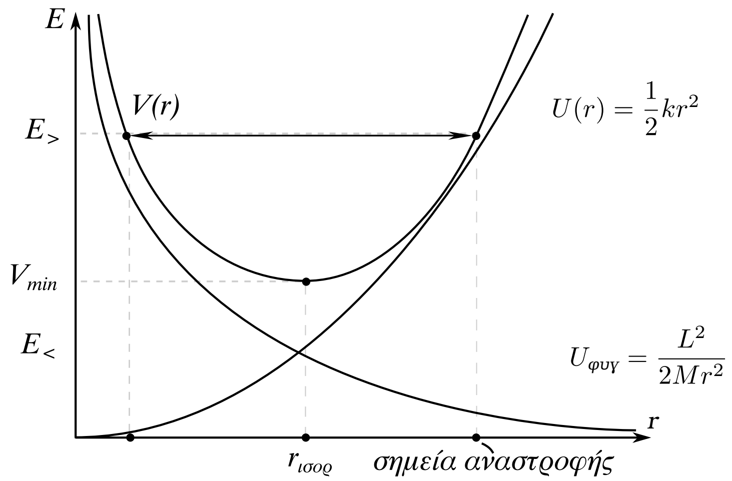
(ε) Τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτης

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -kr$$

Ελκτική δύναμη γραμμική

$$V(r) = U(r) + U_{\text{φυγοκ}}$$

(στ) Για τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε



Σχήμα 5.24

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_{I\sigma}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = kr - \frac{L^2}{Mr^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$\Rightarrow k r_{I\sigma} = \frac{L^2}{M r_{I\sigma}^3} \Rightarrow r_{I\sigma}^4 = \frac{L^2}{kM} = \frac{M^2 r_{I\sigma}^4 \omega^2}{kM}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{M} \qquad \text{στη θέση ισορροπίας}$$

$$F_{\text{ολ}} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -kr + \frac{L^2}{Mr^3}$$

που μηδενίζεται στη θέση ισορροπίας.

$$\underbrace{k r_{I\sigma}}_{\substack{\text{δύναμη εξωτερική}\\ \text{ακτινικά}}} = \frac{M^2 r_{I\sigma}^4 \omega^2}{M r_{I\sigma}^3} = \underbrace{M\omega^2 r_{I\sigma}}_{\substack{\text{Κεντρομόλος}\\ \text{επιτάχυνση}}}$$

5.3 Νόμοι του Kepler – Κίνηση πλανητών

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε την κίνηση ενός σώματος μάζας M, π.χ. η Γη, στο πεδίο βαρύτητας ενός άλλου ακίνητου σώματος, π.χ. ο Ήλιος. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$M\boldsymbol{a} = \frac{c}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{5.1}$$

όπου $\boldsymbol{r}$ η απόσταση των δύο σωμάτων και $c = -GMM_k$ για το πεδίο βαρύτητας του Ηλίου με μάζα M_k.

Επειδή η δύναμη είναι κεντρική, η στροφορμή διατηρείται, άρα η κίνηση γίνεται σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα της στροφορμής. Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) σε αυτό το επίπεδο που ορίζεται από την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ της μάζας M και το διάνυσμα της θέσης $\boldsymbol{r}$ ορίζουν πλήρως το σύστημα. Θέτουμε

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{r} \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες είναι (βλ. παράγραφο 1.9 σελ. 12)

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{5.2}$$

Από τη σχέση (5.1) αντικαθιστώντας την (5.2) έχουμε

$$M\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{c}{r^2} \tag{5.3}$$

και

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{ σταθερά στο χρόνο}$$

Για τη στροφορμή έχουμε

$$\boldsymbol{L} = M\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = Mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Το $\boldsymbol{L}$ είναι σταθερό διάνυσμα στο χρόνο και είναι $\boldsymbol{L} = L\hat{\boldsymbol{z}}$.

$$L = Mr^2\dot{\theta} = \text{ σταθερά}$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{L}{M}$$

Η εξίσωση (5.3) γίνεται

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{M^2r^3} = \frac{c}{Mr^2}$$

Λύνουμε ως προς τη συνάρτηση $w = 1/r$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{L}{Mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}(\frac{L}{Mr^2})^2 - \frac{2L^2}{M^2r^5}(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{2}{r^3}(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{L^2}{M^2 r^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\theta^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\theta^2} + w = -\frac{cM}{L^2} \;\Rightarrow\; w = A\cos\theta - \frac{cM}{L^2}$$

Προσδιορίζουμε το A ως συνάρτηση της ενέργειας

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{cM}{L^2} + A\cos\theta \tag{5.4}$$

$$E = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2 + \frac{c}{r} = \frac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{c}{r} = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{c}{r}$$
$$= \frac{1}{2}M\frac{L^2}{M^2 r^4}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{c}{r}$$

Αντικαθιστώντας από τη σχέση (5.4) το r και το $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ έχουμε

$$\Rightarrow A = \frac{cM}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{c^2 M}}$$

Ορίζουμε την εκκεντρότητα ως

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{c^2 M}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{s}\left(1 - \varepsilon\cos\theta\right) \tag{5.5}$$

όπου

$$\frac{1}{s} = -\frac{cM}{L^2} > 0, \qquad c < 0$$

Η εξίσωση (5.5) περιγράφει μια κωνική τομή.

(α) Κύκλος, $\varepsilon = 0$

$$\Rightarrow r = \text{σταθερό} = r_0, \qquad x^2 + y^2 = r_0^2$$

(β) Έλλειψη, $0 < \varepsilon < 1$. Η μία εστία της έλλειψης, δηλαδή ο Ήλιος, στην αρχή των συντεταγμένων (σχήμα 5.25).

$$r = \frac{s}{1 - \varepsilon\cos\theta} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

Ο μεγάλος ημιάξονας είναι $A'A/2 = a \Rightarrow A'A = 2a$

Γεωμετρική εξίσωση έλλειψης:

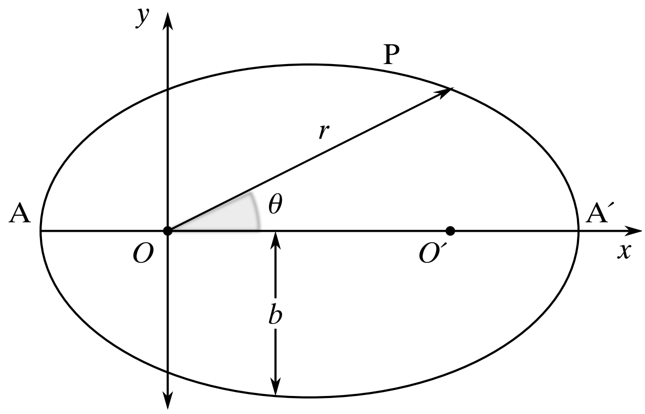
$$OP + O'P = \text{σταθερά} = 2a$$

Ο μικρός ημιάξονας είναι $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Το εμβαδόν έλλειψης ισούται με πab.

$$\theta = 0 \Rightarrow OA' = a(1+\varepsilon)$$
$$\theta = \pi \Rightarrow OA = a(1-\varepsilon)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x_0 = \varepsilon a = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$1 + \varepsilon > |1 - \varepsilon\cos\theta| > 0, \qquad r = \text{ πεπερασμένο}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{\max} & = a(1+\varepsilon) = OA' \\ r_{\min} & = a(1-\varepsilon) = OA \end{cases}$$



Σχήμα 5.25

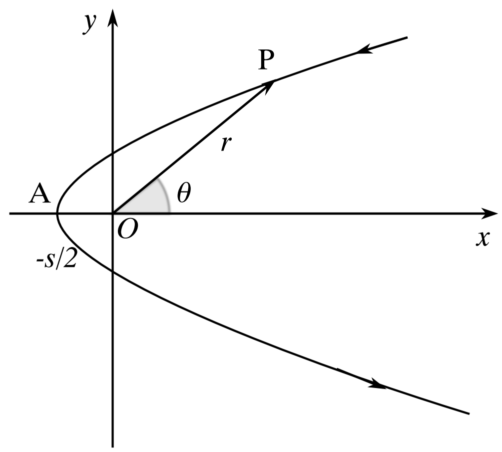
(γ) Παραβολή, $\varepsilon = 1$

$$r = \frac{s}{1 - \cos\theta}$$

Ο Ήλιος, εστία της κωνικής τομής, στην αρχή των συντεταγμένων (σχήμα 5.26)

$$r_{\min} = \frac{s}{2} \qquad \text{για } \theta = \pi$$

$$r_{\max} = \infty \qquad \text{για } \theta = 0 \ (\theta = 0^{+},\ \theta = 0^{-})$$



Σχήμα 5.26

$$OA = r_{\min} = \frac{s}{2}, \text{ εξίσωση παραβολής σε } (x, y) \text{ συντεταγμένες } \ y^2 = 2s\left(x + \frac{s}{2}\right)$$

(δ) Υπερβολή, $\varepsilon > 1$ (σχήμα 5.27)

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 0, \qquad \theta = \pi, \quad r \geq 0$$

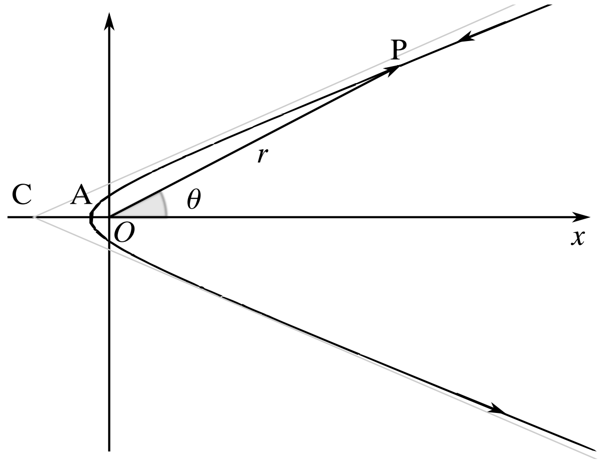
$$\theta = \pi \Rightarrow OA = \frac{s}{1 + \varepsilon}$$

$$r = \frac{s}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

$$r \to \infty \text{ για } \ \cos\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon}$$

Δύο τιμές $\theta_2 = -\theta_1$. Δύο ασυμπτωτικές με κλίση $\pm\theta_1$, $\theta_1 < \theta < \pi$.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) : $\qquad \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Σχήμα 5.27

όπου ορίζουμε

$$s = a(\varepsilon^2 - 1), \qquad x_0 = -\varepsilon a \qquad \text{και} \qquad b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$$

Σχέση μεταξύ εκκεντρότητας και ενέργειας

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{c}{r} = \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left[\frac{1}{2}\frac{L^2}{Mr^2} + \frac{c}{r}\right]_{=V_{\text{εν}}(r)} \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V_{\text{εν}}(r) = \frac{1}{2}M\left(\frac{L^2}{M^2r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + V_{\text{εν}}(r)\right) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{c^2M}}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{s}\left(1 - \varepsilon\cos\theta\right)$$

όπου E η ολική ενέργεια, δηλαδή κινητική και δυναμική ενέργεια.

(α) Για το ενεργό δυναμικό $V_{\text{εν}}(r)$ μπορούμε να ανατρέξουμε στο σχήμα της παραγράφου 5.2.3 , εφαρμογή 5 για το πεδίο βαρύτητας, όπου $c = -GM_kM < 0$.

(β) Στην κίνηση του σώματος μάζας M που περιγράφεται από το $V_{\text{εν}}(r)$ η στροφορμή παραμένει σταθερή, ακόμη και όταν το σώμα μπορεί να κινηθεί μέχρι το άπειρο.

(γ) Όταν το $c > 0$, παράγραφος 5.2.3, εφαρμογή 2, σκέδαση φορτίου από ομόσημο φορτίο με απωστική δύναμη η κίνηση είναι πάντα υπερβολή διότι $E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$.

(δ) $\varepsilon = 0 \Rightarrow E < 0$ και $\dfrac{2EL^2}{c^2M} + 1 = 0$

$$\Rightarrow E = -\frac{c^2M}{2L^2}, c = -GM_kM$$

$$L = Mvr \qquad \text{για την κυκλική κίνηση}$$

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{GM_kM}{r}$$

Για την κυκλική κίνηση δύναμη βαρύτητας = κεντρομόλος επιτάχυνση

$$\Rightarrow \frac{GM_kM}{r^2} = M\frac{v^2}{r} \Rightarrow Mv^2 = \frac{GM_kM}{r}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{GM_kM}{r} - \frac{GM_kM}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GM_kM}{r} < 0$$

Ακόμη

$$L^2 = M^2 v^2 r^2 = GM_k M^2 r \Rightarrow r = r_0 = \frac{L^2}{GM_k M^2}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{1}{2}\frac{G^2 M_k^2 M^3}{L^2} = -\frac{c^2 M}{2L^2}$$

Επομένως για $\varepsilon = 0$ έχουμε κίνηση με σταθερή ακτίνα $r_0 = L^2/GM_k M^2$ και αρνητική ενέργεια.

(ε) $E_{\min} < E < 0, \qquad E_{\min} = -\frac{1}{2}\frac{G^2 M_k^2 M^3}{L^2} \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1,$ έλλειψη

Υπολογισμός του $E_{\min}$:

$$\frac{\mathrm{d}V_{\varepsilon\nu}}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{Mr^3} + \frac{GM_k M}{r^2} = 0, \quad r \neq \infty$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{GM_k M^2}$$

$$\Rightarrow E_{\min} = 0 + \frac{L^2}{2Mr_0^2} - \frac{GM_k M}{r_0} = -\frac{1}{2}\frac{G^2 M_k^2 M^3}{L^2}$$

(στ) $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$ Κίνηση μέχρι το $r \to \infty$ με v_∞ οριακή ταχύτητα διάφορη του μηδενός και $E = (1/2)Mv_\infty^2 > 0$ για $r \to \infty$, στροφορμή $L = Mv_\infty H$ σταθερή, όπου H είναι η κάθετη απόσταση του κέντρου Ο από την ασύμπτωτη της κίνησης.

(ζ) Για $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$ είναι η οριακή τιμή οπου έχουμε κίνηση μέχρι το άπειρο και η υπερβολή γίνεται παραβολή. Η ταχύτητα τείνει στο μηδέν στο άπειρο αλλά η στροφορμή είναι σταθερή.

Νόμοι του Kepler

1. Όλοι οι πλανήτες διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές, με τον Ήλιο σε μια από τις εστίες της τροχιάς.
2. Το διάνυσμα θέσης, με αρχή τον Ήλιο και τέλος έναν πλανήτη, διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.
3. Τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς είναι ανάλογα προς τους κύβους των μεγάλων ημιαξόνων των αντίστοιχων ελλείψεων

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_k}a^3$$

Ηλιακό Σύστημα

Μονάδα μέτρησης των Αστρονομικών αποστάσεων είναι η Αστρονομική Μονάδα (ua, AU) μήκους

$$1ua = 1,495 \times 10^{11} m$$

ισούται με το μήκος του μεγάλου ημιάξονα περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Πίνακας με στοιχεία των Πλανητών:

Πλανήτης	**Ημιάξονας**	**Περίοδος (s)**	**Εκκεντρότητα**	**Κλίση**
Ερμής	$0,387$	$7,60 \times 10^6$	$0,2056$	$7^0 00'$
Αφροδίτη	$0,723$	$1,94 \times 10^7$	$0,0068$	$3^0 24'$
Γη	1	$3,16 \times 10^7$	$0,0167$	$--$
Άρης	$1,523$	$5,94 \times 10^7$	$0,0934$	$1^0 51'$
Δίας	$5,202$	$3,74 \times 10^8$	$0,0481$	$1^0 81'$
Κρόνος	$9,554$	$9,30 \times 10^8$	$0,0530$	$2^0 29'$
Ουρανός	$19,218$	$2,66 \times 10^9$	$0,0482$	$0^0 46'$
Ποσειδώνας	$30,109$	$5,20 \times 10^9$	$0,0054$	$1^0 46'$
Πλούτωνας	$39,60$	$7,82 \times 10^9$	$0,251$	$17^0 8'$
Κομήτης του Halley	$--$	$2,38 \times 10^9$	$0,967$	$162^0 30'$

Πίνακας 5.1

Μικρή εκκεντρότητα $\Rightarrow$ το σχήμα της τροχιάς πλησιάζει τον κύκλο.
Κλίση είναι η γωνία του διανύσματος στροφορμής του αντίστοιχου πλανήτη με το διάνυσμα στροφορμής της Γης.

Εφαρμογή 7

Ένας δορυφόρος έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα v_0 σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από τη Γη. Η Γη θεωρείται σφαιρική και έχει μάζα M. Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης ακτινικά συγκρούεται με τον δορυφόρο με ταχύτητα v_0 και ενσωματώνεται σε αυτόν δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα μάζας $m_\sigma = 2m$. α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή L των δυο σωμάτων ως προς το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή και βρείτε την τιμή της. β) Βρείτε την ολική ενέργεια $E_{o\lambda}$ που θα έχει το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται μετά τη σύγκρουση. γ) Αν η $E_{o\lambda}$ είναι αρνητική, το συσσωμάτωμα θα κινηθεί σε κλειστή τροχιά, που είναι κύκλος ή έλλειψη. Δείξτε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η τροχιά του συσσωματώματος θα είναι ελλειπτική. δ) Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής, βρείτε την ελάχιστη r_1 και τη μέγιστη r_2, απόσταση του συσσωματώματος από τη Γη, καθώς αυτό κινείται στην ελλειπτική του τροχιά. Εκφράστε τα αποτελέσματα συναρτήσει της ακτίνας r_0. ε) Για να ακολουθήσει παραβολική τροχιά το συσσωμάτωμα πόση θα πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα του βλήματος;

(α) Η δύναμη που ασκείται στα δύο σώματα, δορυφόρο και βλήμα, είναι η δύναμη της βαρύτητας από τη Γη δηλαδή μία κεντρική δύναμη άρα η ροπή της δύναμης είναι μηδέν και ισχύει $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\pi\varrho o}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\delta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\beta}}{\mathrm{d}t} = 0 + 0 = 0$ άρα τελικά η στροφορμή του συστήματος δορυφόρος - βλήμα διατηρείται.

$$\boldsymbol{L}_\delta = m r_0 v_0 \hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{L}_\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \boldsymbol{L}_{\pi\varrho o} = \boldsymbol{L}_\delta + \boldsymbol{L}_\beta = m r_0 v_0 \hat{\boldsymbol{z}}$$

(β) Διατήρηση ορμής κατά τη κρούση τω δύο σωμάτων δορυφόρος - βλήμα:

$$m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 = 2m\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}$$

Τα δύο διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = v_0\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}_2 = v_0\hat{\boldsymbol{r}}$ για τον δορυφόρο και το βλήμα αντίστοιχα είναι κάθετα μεταξύ τους άρα το διάνυσμα $2\boldsymbol{u}$ είναι στην υποτείνουσα του τριγώνου:

$$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 4u^2 \Rightarrow 2v_0^2 = 4u^2 \Rightarrow u = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

Η ολική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι:

$$E_{o\lambda,\mu} = K + U = \frac{1}{2}2mu^2 - \frac{GM2m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - 2\frac{GMm}{r_0}$$

(γ) Ο δορυφόρος εκτελούσε κυκλική τροχιά πριν την κρούση άρα απο τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2} \Rightarrow mv_0^2 = \frac{GMm}{r_0}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση για την $E_{o\lambda,\mu}$ βρίσκουμε

$$E_{o\lambda,\mu} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_0} - 2\frac{GMm}{r_0} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{r_0}$$

αρνητική ολική ενέργεια για το συσσωμάτωμα.
Το συσσωμάτωμα μάζας $m_\sigma = 2m$ φεύγει υπό γωνία $\phi = \frac{\pi}{4}$ ως προς την ακτίνα άρα αποκλείεται να κάνει κυκλική τροχιά.
Για επαλήθευση υπολογίζουμε την εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{o\lambda,\mu}L^2}{(GM2m)^2 2m}}$$

όπου

$$L^2 = (mr_0v_0)^2 = m^2r_0^2\frac{GM}{r_0} = GMm^2r_0$$

$$E_{o\lambda,\mu} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{r_0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}} < 1$$

Η κίνηση του συσσωματώματος είναι ελλειπτική.

(δ) Το συσσωμάτωμα απέχει την μικρότερη r_1 και την μεγαλύτερη r_2 απόσταση από την Γη σε αντιδιαμετρικές θέσεις επάνω στον μεγάλο άξονα της έλλειψης όπου η ταχύτητα του είναι αντίστοιχα u_1 και u_2. Τα διανύσματα της ταχύτητας εκεί είναι κάθετα στα διάνυσματα θέσης $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{r}_2 \perp \boldsymbol{u}_2$.
Από τον νόμο διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$L = mr_0v_0 = 2mr_1u_1 = 2mr_2u_2$$

Από την διατήρηση της Ενέργειας βρίσκουμε την εξίσωση που μας δίνει την απόσταση από τη Γη

$$E_{o\lambda,\mu} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{r_0} \quad \text{και} \quad E_{o\lambda,\mu} = \frac{1}{2}2mu_1^2 - \frac{GM2m}{r_1}$$

εκφράζοντας την ταχύτητα μέσω της στροφορμής βρίσκουμε

$$E_{o\lambda,\mu} = \frac{L^2m}{4m^2r_1^2} - \frac{GM2m}{r_1}$$
$$\Rightarrow \frac{m^2r_0^2v_0^2m}{4m^2r_1^2} - 2\frac{GMm}{r_1} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{r_0}$$

Θέτωντας $x = \frac{1}{r}$ έχουμε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου

$$\alpha = \frac{m^2r_0^2v_0^2}{4m} = \frac{1}{4}GMmr_0, \ \beta = -2GMm, \ \gamma = \frac{3}{2}\frac{GMm}{r_0}$$

με λύση

$$x_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$$

αντικαθιστώντας τα α, β, γ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \frac{5}{2}G^2M^2m^2$ στη λύση βρίσκουμε

$$x_{1,2} = \frac{4}{r_0} \pm \frac{\sqrt{10}}{r_0} \ \Rightarrow \ \frac{r_0}{r_{1,2}} = 4 \pm \sqrt{10}$$

Τελικά $\frac{r_1}{r_0} = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$ και $\frac{r_2}{r_0} = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$.

(ε) Για να ακολουθήσει το συσσωμάτωμα παραβολική τροχιά θα πρέπει $E_{o\lambda,\mu} = 0$ άρα

$$\frac{1}{2}2mu^2 = \frac{GM2m}{r_0} \ \Rightarrow \ u^2 = 2\frac{GM}{r_0}$$

Από τη σχέση για την αρχική ταχύτητα $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$ βρίσκουμε

$$u^2 = 2v_0^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2}v_0$$

Από την αρχική σχέση

$$v_1^2 + v_2^2 = 4u^2 \ \Rightarrow \ v_0^2 + v_2^2 = 8v_0^2 \ \Rightarrow \ v_2 = \sqrt{7}v_0$$

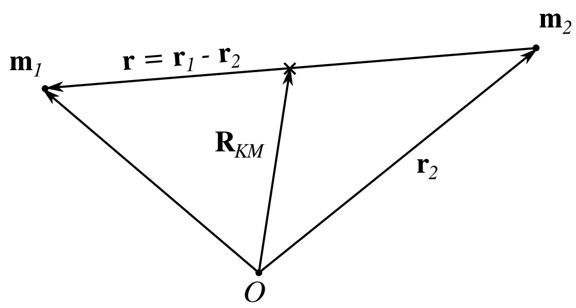
5.3.1 Το πρόβλημα των δύο σωμάτων, ανηγμένη μάζα

Κεντρική δύναμη

$$U = U(r), \qquad \boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}}$$
$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Νόμος του Νεύτωνα

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_{12} = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$
$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_{21} = -F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$



Σχήμα 5.28

$$m\ddot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} = m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = F(r)\hat{\boldsymbol{r}} - F(r)\hat{\boldsymbol{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \boldsymbol{v}_{\text{KM}}t + \boldsymbol{R}_{\text{OKM}}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m_1}F(r)\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{m_2}F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)F(r)\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mu}F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \text{ ανηγμένη μάζα}$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}(r)$$

Για το πεδίο βαρύτητας έχουμε

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Κίνηση ενός σώματος μάζας μ γύρω από το σώμα 2 που το θεωρούμε ακίνητο. Η ανηγμένη μάζα μ είναι μικρότερη από τα m_1 και m_2.

Στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας:

$$m_1\boldsymbol{r}_1' + m_2\boldsymbol{r}_2' = 0, \qquad m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = 0$$

$$\boldsymbol{L} = m_1\boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2' \times \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2') \times m_1\boldsymbol{u}_1$$

$$m_1\boldsymbol{u}_1 = \frac{m}{m}m_1\boldsymbol{u}_1 = \frac{m_1}{m}(m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_1) = \frac{m_1}{m}(-m_2\boldsymbol{u}_2 + m_2\boldsymbol{u}_1) = \frac{m_1m_2}{m}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2', \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$$

$$\boldsymbol{L} = \mu\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

Για τα διανύσματα $\boldsymbol{r}_1'$ και $\boldsymbol{r}_2'$ ισχύει ακόμη ότι:

$$\boldsymbol{r}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

Παρατήρηση: Στο σύστημα Γη - Ήλιος όπου $m_1 = M_{\Gamma\eta\varsigma}$ και $m_2 = M_{H\lambda\iota o\upsilon} \simeq 3\times10^5 M_{\Gamma\eta\varsigma}$ για τις αποστάσεις από το Κέντρο Μάζας του συστήματος έχουμε τη σχέση $r_1' \simeq 3\times10^5\ r_2'$. Εάν υποθέσουμε ότι η απόσταση r_1' είναι ίση με μία Αστρονομική Μονάδα, $r_1' \simeq 1,5\times10^8$ Km τότε για την απόσταση r_2' του Ήλιου από το Κέντρο Μάζας του συστήματος βρίσκουμε $r_2' \simeq 500$ Km μόνο, δηλαδή μικρότερη κατά πολύ από την ακτίνα του Ήλιου.

Ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας:

$$E = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U(r)$$

Απόδειξη.

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \begin{aligned} \mu\boldsymbol{u}^2 &= \mu\left(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\right)^2 = \mu\boldsymbol{u}_1^2 + \mu\boldsymbol{u}_2^2 - 2\mu\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 \\ &= m_1\boldsymbol{u}_1^2\frac{m_2}{m} + m_2\boldsymbol{u}_2^2\frac{m_1}{m} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{u}_1^2\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{u}_2^2\frac{m_2}{m} \\ &= m_1\boldsymbol{u}_1^2\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} + m_2\boldsymbol{u}_2^2\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} = m_1\boldsymbol{u}_1^2 + m_2\boldsymbol{u}_2^2 \end{aligned}$$

□