Πρόχειρες Σημειώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης
(ΣΑΤΜ, 2021–2022)

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ TAYLOR

Οι πιο απλές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι *πολυωνυμικές*, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
ή γενικότερα της μορφής
$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$
όπου x_0 και $a_0, a_1, \ldots, a_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα τις τιμές τους και γενικά να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Όμως η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν να γραφούν ως πολυώνυμα όπως πχ. η εκθετική συνάρτηση e^x, ή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ κλπ.. Το Θεώρημα Taylor και ειδικότερα ο *Τύπος του Taylor* είναι από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία της Μαθηματικής Ανάλυσης που δίνουν *πολυωνυμικές προσεγγίσεις* των μη πολυωνυμικών συναρτήσεων.

1.1. Πολυώνυμα Taylor

1. Στα επόμενα για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ με $k!$ (διαβάζεται "k ***παραγοντικό***") συμβολίζουμε το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το k, δηλαδή
$$k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$
Πχ. $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, κοκ. Κατά σύμβαση επίσης ορίζουμε $0! = 1$. Παρατηρείστε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 0$ ισχύει ότι
$$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

2. Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$, τότε για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ με $f^{(k)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο k-τάξης της f. Κατά σύμβαση επίσης θέτουμε $f^{(0)} = f$. Παρατηρείστε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 0$ η $f^{(k+1)}$ είναι η παράγωγος της $f^{(k)}$.

3. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Το πολυώνυμο
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1.1)$$
καλείται ***πολυώνυμο Taylor τάξης*** n ***της*** f ***με κέντρο το*** x_0. Λέμε εδώ *τάξης* και όχι *βαθμού* γιατί μπορεί να συμβεί $f^{(n)}(x_0) = 0$ και άρα ο βαθμός του $T_n(x)$

να είναι μικρότερος απο n. Βέβαια σε κάθε περίπτωση ο βαθμός του $T_n(x)$ είναι το πολύ n. Με άλλα λόγια το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0 είναι το πολυώνυμο $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ όπου $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ για κάθε $k = 0, \ldots, n$.

Πχ. για $n = 0$ παίρνουμε το σταθερό πολυώνυμο $T_0(x) = f(x_0)$, για $n = 1$ το πολυώνυμο

$$T_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για $n = 2$ το πολυώνυμο

$$T_2(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

κ.ο.κ.

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος "$\sum$" και τις συμβάσεις $f^{(0)}(x) = f(x)$ και $0! = 1$, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0 γράφεται σύντομα με τον τύπο

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $x_0 = 0$ παίρνει την πιο απλή μορφή

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{1.2}$$

1.2. Παραδείγματα

Όταν μια συνάρτηση είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη τότε ορίζονται τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης της f. Πολλές φορές το κέντρο x_0 είναι το μηδέν και τότε όπως είδαμε το πολυώνυμο Taylor τάξης n γράφεται

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Παράδειγμα 1.1. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο $x_0 = 0$ έχει τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1.3}$$

Πράγματι, $f^{(k)}(x) = e^x$ και άρα $f^{(k)}(0) = 1$, για κάθε $k \geq 0$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση είναι *άρτια* (δηλαδή $f(-x) = f(x)$) τότε στα πολυώνυμα Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x (αφού όπως αποδεικνύεται όλες οι παράγωγοι της f περιττής τάξης μηδενίζονται στο 0). Αντίστοιχα, αν η συνάρτηση είναι *περιττή* (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$) τότε στα πολυώνυμα Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ εμφανίζονται μόνο περιττές δυνάμεις του x. Χαρακτηριστικά είναι τα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.2. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \cos x$(=*συνημίτονο του* x), $x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια ($\cos(-x) = \cos x$) στα πολυώνυμα Taylor της $\cos x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x.

Έχουμε, $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$, $f''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$, $f^{(4)}(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ και άρα $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1 = f(0)$. Συνεπώς,

$$T_0(x) = T_1(x) = 1, \quad T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{1.4}$$

για κάθε $n \geq 0$.

Παράδειγμα 1.3. Αντίστοιχα, επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$(=*ημίτονο του* x), $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή στα πολυώνυμα Taylor της $\sin x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο περιττές δυνάμεις του x. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = T_2(x) = \frac{x}{1!}, \quad T_3(x) = T_4(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.5}$$

Παράδειγμα 1.4. Τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι τα εξής:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = \frac{x}{1}, \quad T_2(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad ...$$

και γενικά για $n \geq 1$, αποδεικνύεται ότι

$$T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{1.6}$$

1.3. Τα Θεωρήματα του Taylor

1.3.1. Πρώτο Θεώρημα Taylor. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1.7}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] \\ \lim_{x \to x_0} &\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Το πρώτο θεώρημα του Taylor γενικεύει την (1.7) για συναρτήσεις που είναι n-φορές παραγωγίσιμες και διατυπώνεται ως εξής.

Θεωρημα 1.1. *Έστω $n \geq 1$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \tag{1.8}$$

όπου T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0.

Για κάθε $x \in I$, η διαφορά του $T_n(x)$ από το $f(x)$ συμβολίζεται με $R_n(x)$, δηλαδή

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \tag{1.9}$$

και καλείται ***υπόλοιπο Taylor τάξης*** n ***της*** f ***με κέντρο το*** x_0. Με χρήση του παραπάνω συμβολισμού η (1.8) παίρνει την μορφή

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{1.10}$$

1.3.2. Δεύτερο Θεώρημα Taylor-Τύπος Taylor. Από την (1.8) έχουμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 τότε το $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ πλησιάζει το 0, δηλαδή το $T_n(x)$ με το $f(x)$ είναι περίπου ίσα όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει εδώ είναι το εξής:

Υπάρχει κάποιος τύπος που να μας λέει πόσο διαφέρει το $f(x)$ απο το $T_n(x)$ για οποιοδήποτε $x \in I$ ασχέτως αν το x είναι κοντά η μακριά από το x_0;

Μία αρκετά ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται με το επόμενο δεύτερο θεώρημα του Taylor.

Θεωρημα 1.2. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0, x \in I$ με $x_0 \neq x$. Υποθέτουμε τα εξής:*

(α) *Η $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τα x_0 και x.*
(β) *Η $f^{(n)}$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα τα x, x_0. Με άλλα λόγια η $f^{(n+1)}(x)$ ορίζεται για κάθε x στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x.*

Τότε υπάρχει ένας αριθμός ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιος ώστε

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{1.11}$$

όπου T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0.

Ο τύπος (1.11) καλείται ***Τύπος Taylor***. Επίσης, το Θεώρημα 1.2 καλείται και ***Θεώρημα Μέσης Τιμής ανώτερης τάξης*** αφού στην περίπτωση $n = 0$ είναι ουσιαστικά το κλασσικό Θεώρημα Μέσης Τιμής. Πράγματι, ο τύπος (1.11) γράφεται και ως εξής

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

που για $n = 0$ είναι το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής (θυμηθείτε ότι έχουμε ορίσει $T_0(x) = f(x_0)$):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

Ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 1.2, που χρησιμοποιείται συνήθως στην πράξη αντί του Θεωρήματος 1.2 είναι και το εξής:

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $x_0 \in I$ και έστω T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0. Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ένας αριθμός ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιος ώστε*

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

1.4. Λυμένες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) >$ δείξτε ότι το x_0 είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο της f, , δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < f(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $x \neq x_0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το x_0 δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Από το πρώτο θεώρημα Taylor, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Αντικαθιστώντας το $T_2(x)$ παίρνουμε

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} - f''(x_0) \right] = 0$$

και άρα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = f''(x_0) > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το πηλίκο $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2}$ είναι θετικό όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $x \neq x_0$, $f(x) > f(x_0)$. □

ΑΣΚΗΣΗ 1.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι κάθε κρίσιμο σημείο της f είναι αυστηρό ολικό ελάχιστο της f, δηλαδή $f(x_0) < f(x)$ για κάθε $x \neq x_0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ κρίσιμο σημείο της f και $x \neq x_0$. Έχουμε $f'(x_0) = 0$ (αφού το x_0 είναι κρίσιμο και f παραγωγίσιμη) και άρα το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το x_0 είναι το σταθερό πολυώνυμο $f(x_0)$, αφού

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0). \tag{1.12}$$

Τώρα, από τον τύπο του Taylor, παίρνουμε

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \tag{1.13}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των x και x_0. Επειδή η f'' από υπόθεση είναι θετική και $(x - x_0)^2 > 0$, έπεται ότι $\frac{f'(\xi)}{2}(x-x_0)^2 > 0$ και άρα $f(x)-f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$. $\square$

Άσκηση 1.3. *Έστω $n \geq 1$ και έστω*

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ (δείτε Παράδειγμα 1.1 παραπάνω). Δείξτε ότι

$$T_n(x) \leq e^x < T_n(x) + \frac{e}{(n+1)!} \tag{1.14}$$

για κάθε $x \in [0, 1]$.

Απόδειξη. Έστω $n \geq 1$ ακέραιος και $x \in [0, 1]$. Αν $x = 0$ έχουμε $T_n(0) = e^0 (= 1)$ και άρα η (1.14) ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $x \in (0, 1]$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι συνθήκες του πορίσματος 1.3 ικανοποιούνται (για $x_0 = 0$) και άρα υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.15}$$

Επειδή η $f(x) = e^x > 0$ και $0 < x \leq 1$ έχουμε ότι $\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} > 0$ και άρα από την (1.15) προκύπτει ότι

$$T_n(x) < e^x \tag{1.16}$$

Από την άλλη μεριά η $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 \leq x \leq 1$ έχουμε ότι

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}$$

και άρα από την (1.15) παίρνουμε ότι

$$e^x < T_n(x) + \frac{e}{(n+1)!}. \tag{1.17}$$

Από τις (1.16) και (1.17) προκύπτει τώρα άμεσα η (1.14). $\square$

Παρατήρηση 1.1. Απο την ανισότητα (1.14) για $n = 9$ και $x = 1$ μπορούμε με πράξεις να συμπεράνουμε ότι

$$2,718281 < e < 2,718282 \tag{1.18}$$

Άσκηση 1.4. *Έστω $n \geq 1$ και έστω*

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

το πολυώνυμο Taylor τάξης $2n$ της $f(x) = \cos x$ με κέντρο $x_0 = 0$ (δείτε Παράδειγμα 1.2 παραπάνω). Δείξτε ότι

$$|\cos x - T_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.19}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αποδειξη. Έστω $n \geq 1$ και έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $T_{2n}(0) = \cos 0$ η (1.19) τετριμμένα ισχύει για $x = 0$, οπότε υποθέτουμε για τα επόμενα ότι $x \neq 0$. Απο το Πόρισμα 1.3 έχουμε ότι υπάρχει ξ μεταξύ των x και $x_0 = 0$ τέτοιο ώστε

$$\cos x - T_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{1.20}$$

και άρα

$$|\cos x - T_{2n}(x)| = \left| \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| = \frac{\left| f^{(2n+1)}(\xi) \right|}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \tag{1.21}$$

Επειδή η παράγωγος της $f(x) = \cos x$ οποιασδήποτε τάξης είναι μία απο τις συναρτήσεις $\pm \cos x$, $\pm \sin x$, έπεται ότι

$$\left| f^{(2n+1)}(\xi) \right| \leq 1 \tag{1.22}$$

Από τις (1.21) και (1.22) έπεται άμεσα η (1.19). □

Κεφάλαιο 2

ΟΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΟΥΣ

2.1 Οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο, υπερβολικό ημίτονο και υπερβολική εφαπτομένη

Οι συναρτήσεις

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

καλούνται αντίστοιχα ***υπερβολικό συνημίτονο*** και ***υπερβολικό ημίτονο***. Επίσης η συνάρτηση

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

καλείται ***υπερβολική εφαπτομένη***.

Ο λόγος που οι παραπάνω συναρτήσεις πήραν αυτήν την ονομασία από την σχέση τους με την ισοσκελή υπερβολή[1] Η Πράγματι, είναι εύκολο με πράξεις να επαληθεύσουμε την ταυτότητα

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Συνεπώς για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \tag{2.4}$$

ανήκει στην ισοσκελή υπερβολή. Μάλιστα, όπως θα δούμε στην συνέχεια, για κάθε

$$\cosh t \geq 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

και άρα κάθε σημείο (x, y) που ικανοποιεί την (2.4), ειδικότερα ανήκει στον δεξί κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής. Αποδεικνύεται τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ο δεξιός κλάδος της ισοσκελούς υπερβολής αποτελείται ακριβώς από εκείναι τα σημεία (x, y) του επιπέδου που γράφονται στην μορφή (2.4). Αυτό το γεγονός έρχεται σε αναλογία με τα σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου του οποίου τα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2.6}$$

[1] Η *ισοσκελής υπερβολή* είναι η καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία (x, y) του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την σχέση $x^2 - y^2 = 1$. Η καμπύλη αυτή χωρίζεται σε δύο κλάδους, τον *αριστερό* $(x \leq -1)$ και τον δεξί $(x \geq 1)$.

2.2 Μερικές ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι *άρτια συνάρτηση*, δηλαδή

$$\cosh(-x) = \cosh x, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

Πράγματι,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

Επίσης,

$$\cosh x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

αφού αν θέσουμε $y = e^x$ τότε $y > 0$ και

$$\cosh x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2 + 1}{2y} \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \geq 0$$

Ακόμη, επειδή ο μέσος όρος δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα μεταξύ των αριθμών αυτών έχουμε ότι

$$e^{-x} < \cosh x < e^{x}, \ \forall x > 0 \tag{2.9}$$

και αντίστοιχα

$$e^{x} < \cosh x < e^{-x}, \ \forall x < 0 \tag{2.10}$$

Επίσης, επειδή

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

παρατηρούμε ότι $(\cosh x)' < 0$ για $x < 0$ και $(\cosh x)' > 0$ για $x > 0$. Άρα η $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $\cosh(0) = 1$ να είναι η ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty. \tag{2.11}$$

και άρα το σύνολο τιμών της $\cosh x$ (δηλαδή το σύνολο $\{\cosh x : x \in \mathbb{R}\}$) είναι το $[1, +\infty)$. Η καμπύλη που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $\cosh x$ μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και καλείται *αλυσσοειδής* γιατί είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα όταν την κρεμάσουμε οριζόντια απο τα δύο άκρα της.

Για την $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sinh(-x) = -\sinh x \tag{2.12}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty \text{ και } \lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty \tag{2.13}$$

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Για την $\tanh x$ έχουμε

$$\tanh(-x) = -\tanh x, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \text{ και } \lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1 \tag{2.15}$$

$$-1 < \tanh x < 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

Η $\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(-1,1)$, με τις ευθείες $y=-1$ και $y=1$ να αποτελούν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

Μερικές βασικές ταυτότητες που ικανοποιούν οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι οι παρακάτω:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{2.17}$$

$$\cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x \sinh y \tag{2.18}$$

$$\sinh(x\pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x \sinh y \tag{2.19}$$

$$\tanh(x\pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1\pm \tanh x \tanh y} \tag{2.20}$$

και άρα

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 y = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1 \tag{2.21}$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x \tag{2.22}$$

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x} \tag{2.23}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται απο τους τύπους

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{2.24}$$

2.2 Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Όπως αναφέραμε η συνάρτηση $\sinh x$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, ορίζεται η *αντίστροφη* της $\sinh x$, την οποία συμβολίζουμε με $\sinh^{-1} x$. Ισχύει ότι

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \ \forall x\in\mathbb{R} \tag{2.25}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πράγματι, έστω $x\in\mathbb{R}$ και έστω $\sinh^{-1} x = y$. Τότε

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Άρα, θέτοντας $w=e^y$, έχουμε

$$x = \frac{w-\frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2-1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2xw - 1 = 0$$

Απορρίπτοντας την αρνητική ρίζα (αφού $w=e^y>0$) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = x+\sqrt{x^2+1} &\Leftrightarrow e^y = x+\sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

Από την (2.25) με πράξεις καταλήγουμε ότι η παράγωγος της $\sinh^{-1} x$ δίνεται από τον τύπο

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ \forall x\in\mathbb{R} \tag{2.26}$$

Πράγματι, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left(\sinh^{-1} x\right)' &= \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$

Η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\tanh x : \mathbb{R} \to (-1,1)$ έχει αντίστροφη την

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in (-1,1) \tag{2.27}$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} &= \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \\
\Leftrightarrow e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}
$$

Από την (2.27) έπεται ότι

$$\left(\tanh^{-1} x\right)' = \frac{1}{1-x^2},\ \forall x \in (-1,1) \tag{2.28}$$

Παρατηρηση 2.1. Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$, επειδή δεν είναι γνησίως μονότονη δεν αντιστρέφεται. Όμως αντιστρέφεται κατά κλάδους, δηλαδή ξεχωριστά στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$ όπου είναι γνησίως μονότονη (όπως έχουμε πεί, η συνάρτηση $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$). Πχ. αν με $\cosh_+ x : [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ συμβολίσουμε τον περιορισμό της $\cosh x$ στο διάστημα $[0,+\infty)$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση, $\cosh_+^{-1} x$, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον τύπο

$$\cosh_+^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ \forall x \geq 1 \tag{2.29}$$

και ισχύει ότι

$$\left(\cosh_+^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \forall x > 1 \tag{2.30}$$

Αντίστοιχα, αν με $\cosh_- x : (-\infty,0] \to [1,+\infty)$ συμβολίσουμε τον περιορισμό της $\cosh x$ στο διάστημα $(-\infty,0]$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $\cosh_-^{-1} x$ δίνεται από τον τύπο

$$\cosh_-^{-1} x = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ \forall x \geq 1 \tag{2.31}$$

και ισχύει ότι

$$\left(\cosh_{-}^{-1} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},\ \forall x > 1 \tag{2.32}$$

Κεφάλαιο 3

ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ακριβέστερα των περιορισμών τους σε κατάλληλα διαστήματα του $\mathbb{R}$). Οι βασικότερες απο αυτές ονομάζονται *τόξο ημιτόνου, τόξο συνημιτόνου και τόξο εφαπτομένης* και υπολογίζουν την γωνία θ σε ακτίνια όταν δίνεται ο αντίστοιχος τριγωνομετρικός αριθμός της.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές παρουσιάζουν οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών οι οποίες υπολογίζονται με το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *(Θεώρημα Παραγώγου Αντίστροφης Συνάρτησης) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής. Έστω $a \in I$ και έστω $b = f(a)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και $f'(a) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b και ισχύει ότι $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

3.1 Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου.

Έστω $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1} που την συμβολίζουμε με $\arcsin x$, (διαβάζεται "τόξο ημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$, σύνολο τιμών το $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση $\arcsin x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1,1]$ το μοναδικό τόξο $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ με $\sin y = x$. Πχ. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Έστω $a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $b = \sin a$. Τότε $b \in (-1,1)$ και $\cos a > 0$. Επίσης, $\sin'(a) = \cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-b^2}$. Άρα, από το Θεώρημα 3.1, παίρνουμε

$$\arcsin'(b) = \frac{1}{\sin'(a)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

Συνεπώς,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1,1) \tag{3.1}$$

3.2 Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου x.

Έστω $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arccos x$, (διαβάζεται "τόξο συνημιτόνου x").

Η συνάρτηση $\arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $[0, \pi]$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Έστω $a \in (0, \pi)$ και $b = \cos a$. Τότε $b \in (-1, 1)$ και $\sin a > 0$. Επίσης $\cos'(a) = -\sin a = -\left(\sqrt{1 - \cos^2 a}\right) = -\sqrt{1 - b^2}$. Άρα, από το Θεώρημα 3.1, παίρνουμε

$$\arccos'(b) = \frac{1}{\cos'(a)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}$$

Συνεπώς,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{3.2}$$

3.3 Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης x.

Έστω $f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arctan x$, (διαβάζεται "τόξο εφαπτομένης x"). Συνεπώς, η συνάρτηση $\arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Η $\arctan x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το μοναδικό τόξο $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με εφαπτομένη x. Πχ. $\arctan 0 = 0$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Αν $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $b = \tan a$ τότε $\tan' a = 1 + \tan^2 a = 1 + b^2 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 3.1,

$$(\arctan)'(b) = \frac{1}{\tan' a} = \frac{1}{1 + b^2}$$

οπότε

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

3.4 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 3.1. *Έστω $y \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν είναι σωστές οι επόμενες συνεπαγωγές*

$$x = \sin y \Rightarrow \arcsin x = y$$

$$x = \cos y \Rightarrow \arccos x = y$$

$$x = \tan y \Rightarrow \arctan x = y$$

Λύση Καμμία απο τις παραπάνω συνεπαγωγές δεν είναι σωστή. Οι συνεπαγωγές

$$x = \sin y \Rightarrow \arcsin x = y \ \text{ και } \ x = \tan y \Rightarrow \arctan x = y$$

ισχύουν μόνο αν $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Πχ. $0 = \sin 2\pi = \tan(2\pi)$ ενώ $\arcsin 0 = \arctan 0 = 0$. Ομοίως η συνεπαγωγή $x = \cos y \Rightarrow \arccos x = y$ ισχύει μόνο αν $y \in [0, \pi]$.

Παρατηρηση 3.1. Οι αντίστροφες συνεπαγωγές

$$\arcsin x = y \Rightarrow x = \sin y$$

$$\arccos x = y \Rightarrow x = \cos y$$

έχουν νόημα αν $x \in [-1, 1]$ ενώ η

$$\arctan x = y \Rightarrow x = \tan y$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 3.2. *Υπολογίστε τον αριθμό* $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Λύση: Έστω $y = \arccos(3/5)$. Τότε $y \in [0, \pi]$ και $\cos y = 3/5$. Άρα $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = 4/5$. Οπότε $\sin\left(\arccos(3/5)\right) = \sin y = 4/5$.

Ασκηση 3.3. *Ομοίως για τον* $\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Λύση: Έστω $y = \arcsin(12/13)$. Τότε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sin y = 12/13$. Άρα $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = 5/13$. Οπότε

$$\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{5}{13}$$

Ασκηση 3.4. *Δείξτε ότι αν* $x \neq 0$ *τότε*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \textit{αν } x > 0$$

και

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \textit{αν } x < 0$$

Λύση: Θα δείξουμε την περίπτωση όπου $x > 0$ (Η περίπτωση $x < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα).

α΄ τρόπος : Θέτουμε

$$a = \arctan x, \qquad b = \arctan\frac{1}{x}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$a + b = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{2} - a$$

Έχουμε

$$a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \tan a = x, \quad \tan b = \frac{1}{x}$$

Άρα

$$\tan b = \frac{1}{\tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

και (επειδή $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{\pi}{2} - a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\frac{\pi}{2} - a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad \tan b = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

που σημαίνει ότι

$$b = \frac{\pi}{2} - a$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

<u>**β΄ τρόπος :**</u> Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}, \quad x > 0$$

είναι σταθερή και ίση με $\pi/2$. Θεωρούμε την παράγωγο της f. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

που σημαίνει ότι η $f(x), x > 0$ είναι σταθερή συνάρτηση. Επειδή

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $f(x) = f(1) = \pi/2$ δηλαδή $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Κεφάλαιο 4

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

4.1 Βασικοί ορισμοί

Κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{N}$ *και τιμές στο* $\mathbb{R}$ *θα καλείται ακολουθία πραγματικών αριθμών.* Αν $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τιμή της συνάρτησης a στο n θα συμβολίζεται με a_n αντί για $a(n)$, δηλαδή η μεταβλητή n μετατρέπεται σε δείκτη. Έτσι γράφουμε a_1 αντί για $a(1)$, a_2 αντί για $a(2)$ και γενικά a_n αντί για $a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο a_1 καλείται ο *πρώτος όρος*, ο a_2 *δεύτερος όρος* κ.ο.κ. Γενικά, ο a_n καλείται ο *n-οστός* (ή *γενικός*) όρος της ακολουθίας. Τον δείκτη n στον όρο a_n θα τον καλούμε πολλές φορές και *τάξη* του όρου. Δηλαδή το 1 είναι η τάξη του a_1, το 2 είναι η τάξη του a_2 κ.ο.κ. Μια ακολουθία $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ θα την συμβολίζουμε συνήθως με

$$(a_n) \quad \text{ή και με} \quad (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Πολλές φορές μια ακολουθία δίνεται απο ένα συγκεκριμένο τύπο πχ. λέμε η ακολουθία $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ και εννούμε την ακολουθία $(1, 1/2, 1/3, \dots)$, η λέμε η *σταθερή* ακολουθία $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ και εννοούμε την ακολουθία $(1, 1, 1, \dots)$. Άλλες φορές η ακολουθία δίνεται με *αναδρομικό* τύπο, δηλαδή μας δίνουν τον πρώτο ή και άλλους αν χρειάζεται όρους της ακολουθίας και ύστερα ένα τύπο που μας λέει πώς προκύπτει ο n-οστός όρος απο τους προηγούμενούς του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *ακολουθία Fibonacci* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ που είναι η ακολουθία με πρώτο και δεύτερο όρο το 1 όπου για κάθε $n \geq 3$ ο n-οστός όρος υπολογίζεται απο τον τύπο $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$. Τέλος ορίζονται και ακολουθίες για τις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε ούτε κλειστό ούτε αναδρομικό τύπο. Πχ. η ακολουθία (a_n) όπου ο a_n είναι το n-οστό δεκαδικό ψηφίο του αριθμού π.

Η έννοια της ακολουθίας και η έννοια του συνόλου μοιάζουν μεταξύ τους αλλά όμως δεν είναι ταυτόσημες. Πχ. η ακολουθία $(-1, 1, -1, 1 \dots)$ (όπου $a_n = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) έχει άπειρους όρους που όμως επαναλαμβάνονται και που όλοι μαζί αποτελούν το σύνολο $\{-1, 1\}$ που έχει μόνο δύο μόνο στοιχεία.

Παρατηρηση 4.1. Ένα άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέμε ότι *γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας* αν υπάρχει μια ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, δηλαδή το A είναι το σύνολο όλων των όρων της (a_n). Πχ. το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ είναι το σύνολο των όρων της ακολουθίας (a_n) με τύπο $a_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως και το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$, μπορούμε να το δούμε ως το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$. Αποδεικνύεται ότι ακόμη και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών μπορεί να γραφεί υπό μορφή ακολουθίας.

Κάθε άπειρο σύνολο μπορούμε να το γράψουμε με την μορφή ακολουθίας; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι *αρνητική*. Όπως αποδεικνύεται *το ίδιο το* $\mathbb{R}$ ***δεν*** *γράφεται υπο την μορφή ακολουθίας*. Δηλαδή δεν μπορούμε να βρούμε ακολουθία (a_n) τέτοια ώστε $\mathbb{R} = \{a_1, a_2, \dots\}$. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ που να παίρνει τιμές *όλους* τους πραγματικούς αριθμούς. Με άλλα λόγια επιλέγοντας ένα $a_1 \in \mathbb{R}$, μετά έναν άλλο $a_2 \in \mathbb{R}$, μετά έναν άλλο $a_3 \in \mathbb{R}$ κ.ο.κ., με όποιο τρόπο και να κάνουμε τις επιλογές αυτές, δεν πρόκειται να εξαντλήσουμε όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}$.

4.2 Σύγκλιση ακολουθίας

Ορισμος 4.1. *Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***συγκλίνει στο*** *a ή ότι το* ***όριο*** *της είναι ο a και θα γράφουμε*

$$a_n \to a \quad ή \quad \lim a_n = a$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Όταν μια ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ τότε θα καλείται ***συγκλίνουσα****.*

Με απλά λόγια θα λέγαμε ότι μία ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν οι όροι της πλησιάζουν όλο και πιο κοντά στον αριθμό αυτόν όσο η τάξη τους μεγαλώνει.

Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ το ανοικτό διάστημα $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ καλείται *ϵ-περιοχή* του a ή απλά περιοχή του a. Το ϵ καλείται *ακτίνα* της περιοχής. Επειδή

$$x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon$$

έχουμε ότι η περιοχή $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ αποτελείται από όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ που απέχουν από το a απόσταση μικρότερη του ϵ (θυμηθείτε ότι το απόλυτο της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει την απόσταση των αριθμών αυτών).

Με την παραπάνω ορολογία ο Ορισμός 4.1 λέει ότι *μια ακολουθία συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν οποιαδήποτε περιοχή του a περιέχει τελικά όλους τους όρους της ακολουθίας (δηλαδή από κάποια τάξη και μετά).*

Προταση 4.2. *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.*

Αποδειξη. Έστω ότι μια ακολουθία (a_n) είχε δύο όρια $a \neq a'$. Ας πούμε ότι $a < a'$. Επιλέγοντας κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$ (πχ. $\epsilon = \dfrac{a' - a}{10}$) έχουμε ότι οι περιοχές

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \quad \text{και} \quad (a' - \epsilon, a' + \epsilon)$$

των a και a' είναι ξένες μεταξύ τους δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία. Από την άλλη μεριά, αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \ \forall n \geq n_0$$

και ομοίως, αφού $a_n \to a'$, υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a' - \epsilon, a' + \epsilon) \ \forall n \geq n_0'$$

Αλλά τότε για $n = \max\{n_0, n_0'\}$ θα είχαμε ότι ο a_n θα περιεχόταν και στις δύο περιοχές, πράγμα αδύνατον αφού τις έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να είναι ξένες. $\square$

Το να είναι μια ακολουθία συγκλίνουσα είναι μια σημαντική ιδιότητα της ακολουθίας. Όπως δείχνει και το επόμενο παράδειγμα δεν είναι όλες οι ακολουθίες συγκλίνουσες.

Παραδειγμα 4.1. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν είναι συγκλίνουσα. Πράγματι, αν υπήρχε $a \in \mathbb{R}$ με $a_n \to a$ τότε (απο τον ορισμό της σύγκλισης) για $\epsilon = 1/2$ θα μπορούσαμε να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1/2$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ειδικότερα

$$|a_{n_0} - a| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2}$$

Αλλά τότε από την τριγωνική ανισότητα, θα είχαμε

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| \leq |a_{n_0+1} - a| + |a - a_{n_0}| < 1 \tag{4.1}$$

Όμως αν ο n_0 ήταν άρτιος τότε $a_{n_0} = 1$ και $a_{n_0+1} = -1$ ενώ αν ο n_0 ήταν περιττός τότε $a_{n_0} = -1$ και $a_{n_0+1} = 1$. Άρα,

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| = 2$$

πού έρχεται σε αντίφαση με την (4.1)

Παρατηρηση 4.2. Το παραπάνω παράδειγμα ουσιαστικά στηρίζεται στην εξής παρατήρηση: Αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα τότε οι όροι της όσο μεγαλώνει η τάξη τους έρχονται ολοένα και κοντά στο όριο της ακολουθίας και κατά συνέπεια θα πρέπει να έρχονται ολοένα πιο κοντά και μεταξύ τους.

4.3 Απόκλιση ακολουθίας στο $\pm\infty$

Ορισμος 4.3. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***αποκλίνει στο*** *$+\infty$ ή ότι* ***το όριο της είναι το*** *$+\infty$ και θα γράφουμε*

$$a_n \to +\infty \quad ή \quad \lim a_n = +\infty$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Αντίστοιχα έχουμε και τον ορισμό της σύγκλισης στο $-\infty$:

Ορισμος 4.4. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***αποκλίνει στο*** *$-\infty$ ή ότι* ***το όριο της είναι το*** *$-\infty$ και θα γράφουμε*

$$a_n \to -\infty \quad ή \quad \lim a_n = -\infty$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < -M$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Παραδειγμα 4.2. Η ακολουθία $a_n = n$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Αποδειξη. Πράγματι, έστω $M > 0$. Αν $M \in \mathbb{N}$ θέτουμε $n_0 = M + 1$. Γενικά, ότι και να είναι ο M (φυσικός ή όχι) επιλέγουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$n_0 > M$$

(πχ. $n_0 = [M] + 1$, όπου $[M]$ το ακέραιο μέρος του M) Τότε

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n = n \geq n_0 > M$$

δηλαδή $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$. Άρα για οποιοδήποτε $M \in \mathbb{R}$ βρήκαμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$ και συνεπώς $a_n \to +\infty$. □

Μια χρήσιμη πρόταση είναι και η εξής:

Πρόταση 4.5. *Αν* $a_n \neq 0$ *και* $a_n \to +\infty$ *(ή* $a_n \to -\infty$*) τότε* $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $M = 1/\epsilon$. Αφού $a_n \to +\infty$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < \dfrac{1}{a_n} < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\dfrac{1}{a_n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. □

Παράδειγμα 4.3. $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $a_n = n$. Από το Παράδειγμα 4.2, έχουμε ότι $a_n \to +\infty$ και άρα από την Πρόταση 4.5, $\dfrac{1}{n} \to 0$. □

4.4 Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός 4.6. *Έστω* (a_n) *ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(1) Η (a_n) *λέγεται* ***άνω φραγμένη*** *αν υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $a_n \leq M$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*. Κάθε αριθμός* $M \in \mathbb{R}$ *με αυτή την ιδιότητα θα καλείται* ***άνω φράγμα*** *της* (a_n).

(2) Η (a_n) *λέγεται* ***κάτω φραγμένη*** *αν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $m \leq a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και κάθε αριθμός* m *με αυτή την ιδιότητα θα καλείται* ***κάτω φράγμα*** *της* (a_n).

(3) Η (a_n) *θα λέγεται* ***φραγμένη*** *αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.*

Παρατήρηση 4.3. Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ *δεν είναι* άνω φράγμα της (a_n) αν *υπάρχει* κάποιος όρος της (a_n) γνήσια μεγαλύτερος του, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $M < a_n$. Ομοίως, ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ *δεν είναι* κάτω φράγμα της (a_n) αν *υπάρχει* κάποιος όρος της (a_n) γνήσια μικρότερος του, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $a_n < m$.

Παραδείγματα 4.1. (1) Η ακολουθία (a_n) με $a_n = n$ είναι κάτω φραγμένη, αφού ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της. Η (a_n) όμως δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $M < n = a_n$.

(2) Η ακολουθία $a_n = 1/n$ είναι φραγμένη. Πχ. ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της και ο $M = 1$ είναι ένα άνω φράγμα της.

Πρόταση 4.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $a_n \to a$. Για $\epsilon = 1$ υπάρχει n_0 με $|a_n - a| < 1 \Leftrightarrow a_n \in (a-1, a+1)$ για όλα τα $n \geq n_0$. Θέτουμε $m = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$ και $M = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$ (αν $n_0 = 1$ θέτουμε $m = a-1$ και $M = a+1$). Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι $m \leq a_n \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατηρείστε ότι αν ένας αριθμός είναι άνω φράγμα μιας ακολουθίας (a_n) τότε και κάθε μεγαλύτερός του είναι πάλι άνω φράγμα της (a_n). Αντίστοιχα αν ένας αριθμός είναι κάτω φράγμα της (a_n) τότε και κάθε μικρότερός του είναι πάλι κάτω φράγμα της (a_n). Άρα για μια άνω φραγμένη ακολουθία έχει νόημα να ψάξουμε για το ελάχιστο (δηλ. το μικρότερο) άνω φράγμα της και αντίστοιχα για μια κάτω φραγμένη για το μέγιστο (δηλ. το μεγαλύτερο) κάτω φράγμα της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8. *Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(1) Αν η (a_n) είναι άνω φραγμένη, τότε το ελάχιστο άνω φράγμα της (a_n) καλείται supremum της (a_n) και συμβολίζεται με $\sup a_n$.

(2) Αν η (a_n) είναι κάτω φραγμένη, τότε το μέγιστο κάτω φράγμα της (a_n) καλείται infimum της (a_n) και συμβολίζεται με $\inf a_n$.

(3) Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε θέτουμε $\sup a_n = +\infty$ και αν δεν είναι κάτω φραγμένη τότε θέτουμε $\inf a_n = -\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $\sup \dfrac{1}{n} = 1$ και $\inf \dfrac{1}{n} = 0$. Επίσης $\sup n = +\infty$ και $\inf n = 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.4. Αν η (a_n) έχει μέγιστο όρο τότε το $\sup a_n$ είναι αυτός ο όρος. Πχ. η $a_n = 1/n$ έχει μέγιστο όρο τον $a_1 = 1$ και άρα $\sup a_n = 1$. Γενικά όμως σε μια ακολουθία μπορεί να μην υπάρχει ο μέγιστος όρος. Πχ. η $a_n = -\dfrac{1}{n}$ δεν έχει μέγιστο όρο αλλά έχει supremum το 0. Αντίστοιχα, αν η (a_n) έχει ελάχιστο όρο τότε το $\inf a_n$ είναι αυτός ο όρος. Γενικά όμως σε μια ακολουθία μπορεί να μην υπάρχει ο ελάχιστος όρος. Πχ. η $a_n = \dfrac{1}{n}$ δεν έχει ελάχιστο όρο αλλά έχει infimum το 0.

Αποδεικνύεται ότι *κάθε άνω φραγμένη ακολουθία έχει supremum και αντίστοιχα κάθε κάτω φραγμένη έχει infimum.* Το γεγονός αυτό προκύπτει από μια θεμελιώδους σημασίας ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, την λεγόμενη **Ιδιότητα της Πληρότητας του** $\mathbb{R}$: *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο*[1] *υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.*

4.5 Μονότονες ακολουθίες

Μια σημαντική κλάση ακολουθιών είναι οι μονότονες ακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.9. *Μια ακολουθία (a_n) θα λέγεται **αύξουσα** αν $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots$, δηλαδή $a_n \le a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα θα καλείται **γνησίως αύξουσα** αν $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, δηλαδή $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντίστοιχα, η (a_n) θα λέγεται **φθίνουσα** αν $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots$ ($a_{n+1} \le a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και **γνησίως φθίνουσα** αν $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ (ή $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα τότε καλείται **μονότονη**. Ειδικότερα αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε καλείται **γνησίως μονότονη**.*

[1]Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ καλείται *άνω φραγμένο* αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a \le M$ για όλα τα $a \in A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.2. Η $a_n = 1/n$ είναι γνησίως φθίνουσα, η $a_n = n$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ένα απο τα πλέον σημαντικά θεωρήματα στην σύγκλιση ακολουθιών είναι το παρακάτω:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.10. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Ειδικότερα*

(1) Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο supremum της.

(2) Κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο infimum της.

Με χρήση του Θεωρήματος 4.10 μπορούμε να ορίσουμε πραγματικούς αριθμούς ως όρια μονότονων ακολουθιών. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται και ο αριθμός e. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με τύπο

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδεικνύεται ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και άρα από το Θεώρημα 4.10 η (a_n) συγκλίνει (στο supremum της).

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.11. *Το όριο της γνησίως αύξουσας και φραγμένης ακολουθίας* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *καλείται* ***αριθμός Euler*** *και συμβολίζεται με* e. *Συνεπώς,*

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. *Αν μία ακολουθία* (a_n) *είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε αποκλίνει στο* $+\infty$. *Αντίστοιχα, αν μία ακολουθία είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε αποκλίνει στο* $-\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω (a_n) αύξουσα και όχι άνω φραγμένη. Έστω επίσης $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το M δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) και άρα θα υπάρχει ένας όρος έστω a_{n_0} της (a_n) που θα είναι γνήσια μεγαλύτερος του M. Έχουμε λοιπόν

$$a_{n_0} > M \tag{4.2}$$

Απο την άλλη μεριά αφού η (a_n) είναι αύξουσα έπεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$a_n \geq a_{n_0} \tag{4.3}$$

Από τις (4.2) και (4.3) παίρνουμε ότι $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Δείξαμε συνεπώς ότι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $a_n \to +\infty$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε αποκλίνει στο $-\infty$. □

4.6 Αλγεβρικές πράξεις ακολουθιών και όρια

Αν δίνεται μια ακολουθία (a_n) και ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε ορίζεται η ακολουθία $b_n = \lambda a_n$. Ισχύει η εξής πρόταση.

Πρόταση 4.13. *Αν $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda a_n \to \lambda a$.*

Επίσης, αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε ορίζεται η ακολουθία $\frac{1}{a_n}$. Σχετικά, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.14. *Έστω $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a \neq 0$ τότε $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.*

Αν δίνονται δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) τότε ορίζονται οι ακολουθίες

$$\gamma_n = a_n + b_n \ \text{ και } \ \delta_n = a_n b_n$$

που αντίστοιχα καλούνται *άθροισμα* και *γινόμενο* των (a_n) και (b_n). Αποδεικνύεται η εξής πρόταση:

Πρόταση 4.15. *Έστω $a_n \to a$ και $b_n \to b$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε $a_n + b_n \to a + b$ και $a_n b_n \to ab$.*

Πόρισμα 4.16. *Αν $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$, τότε $a_n^k \to a^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Επίσης αποδεικνύεται και η εξής.

Πρόταση 4.17. *Έστω $a_n \geq 0$ και $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Τότε $a \geq 0$ και $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

4.7 Όρια και διάταξη

Πρόταση 4.18. *Έστω $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$.*

(1) Αν $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \geq 0$.

(2) Αν $a_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \leq 0$.

Θεώρημα 4.19. *(Θεώρημα των σοσυγκλινουσών ακολουθιών) Έστω $(a_n), (b_n), (c_n)$ ακολουθίες με $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim a_n = \lim c_n = \ell \in \mathbb{R}$ τότε και $\lim b_n = \ell$.*

4.8 Κάποια χρήσιμα όρια

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα εξής:

(1) Έστω $\lambda \in (-1, 1)$. Τότε $\lambda^n \to 0$.
(2) Έστω $a > 0$. Τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$.
(3) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Τα παραπάνω όρια αποδεικνύονται στοιχειωδώς αλλά αρκετά δύσκολα. Μπορούμε όμως να τα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τον κανόνα Hospital και την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.20. *Έστω* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *και έστω η ακολουθία* $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε και* $\lim a_n = L$.

Πχ. για να δείξουμε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l'Hospital παίρνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Επειδή $a_n = n^{1/n} = f(n)$ έχουμε ότι $\lim a_n = 1$.

Κεφάλαιο 5

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γενικά με τον όρο *σειρά* εννοούμε ένα άπειρο άθροισμα πραγματικών αριθμών. Τυπικά βέβαια αυτό δεν γίνεται αφού εξ ορισμού η πράξη της πρόσθεσης είναι μια πράξη που μπορεί να ορισθεί μόνο για πεπερασμένο πλήθος προσθεταίων. Όμως το πρόβλημα αυτό μπορεί να παρακαμφθεί μέσω της έννοιας του ορίου.

Για παράδειγμα όταν γράφουμε $0,333...$ αυτό που εννοούμε είναι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας $\left(\frac{3}{10^n}\right)$:

$$0,333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Επειδή η ακολουθία (s_n) των (πεπερασμένων) αθροισμάτων

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n}$$

αποδεικνύεται ότι συγκλίνει στον αριθμό $1/3$ είναι φυσιολογικό να πούμε ότι $0,333... = 1/3$.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των σειρών πραγματικών αριθμών.

5.1 Βασικές έννοιες και παραδείγματα

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

ονομάζεται ***n-μερικό άθροισμα της σειράς*** και η ακολουθία (s_n) που προκύπτει απο αυτά καλείται ***ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς***.

Η παραπάνω σειρά γράφεται και με το σύμβολο "$\sum$" του αθροίσματος ως

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται και το n- μερικό άθροισμα ως

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Ορισμος 5.1. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά και* $s \in \mathbb{R}$ *ή* $s = \pm\infty$. *Γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ή} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s$$

αν

$$\lim s_n = s$$

Ο s *καλείται το* ***όριο*** *(ή το* ***άθροισμα****) της σειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Όπως και στις ακολουθίες μια σειρά θα καλείται ***συγκλίνουσα*** όταν το όριό της είναι πραγματικός αριθμός. Αν μια σειρά δεν είναι συγκλίνουσα τότε θα καλείται ***αποκλίνουσα***. Άρα αποκλίνουσα σημαίνει ότι είτε το όριο της σειράς δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$. Στην περίπτωση όπου το όριό της είναι $\pm\infty$, θα λέμε ότι η σειρά ***αποκλίνει*** στο $\pm\infty$.

Παρατηρηση 5.1. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει απο το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ (αυτό βέβαια σημαίνει ότι η ακολουθία (a_n) ξεκινά με πρώτο όρο τον a_0). Στην περίπτωση αυτή για τη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{ή} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

και τα μερικά αθροίσματα είναι η ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...

Μερικά βασικά παραδείγματα σειρών είναι τα ακόλουθα:

1) Η ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

όπου $a \neq 0, x$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αποδεικνύεται (δείτε Παράδειγμα 5.4 παρακάτω) ότι η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $x \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

Πχ. αν $a = 3/10$ και $x = 1/10$ έχουμε την σειρά

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Αποδεικνύεται (δείτε Παράδειγμα 5.13 παρακάτω) ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

3) Οι p-***αρμονικές σειρές***, δηλαδή οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται (δείτε Παράδειγμα 5.14 παρακάτω) ότι η p-αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$. Ειδικότερα για $p = 2$ αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

4) Οι ***εναλλάσσουσες σειρές*** δηλαδή σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *εναλλάσσουσα αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Αποδεικνύεται ότι

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

5) Οι ***τηλεσκοπικές σειρές***: Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ καλείται *τηλεσκοπική* όταν μπορούμε να γράψουμε τους όρους της ως διαφορά διαδοχικών όρων μιας άλλης ακολουθίας, δηλαδή αν υπάρχει ακολουθία (b_n) τέτοια ώστε

$$a_n = b_n - b_{n+1} \ \text{ ή } a_n = b_{n+1} - b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρείστε ότι όταν $a_n = b_n - b_{n+1}$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δίνονται από τον τύπο

$$s_n = b_1 - b_{n+1} \tag{5.1}$$

Πράγματι,

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Αντίστοιχα, αν $a_n = b_{n+1} - b_1$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δίνονται από τον τύπο

$$s_n = b_{n+1} - b_1 \tag{5.2}$$

Από τις σχέσεις (5.1) και (5.2) προκύπτει ότι η τηλεσκοπική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν η ακολουθία (b_n) είναι συγκλίνουσα.

Παραδειγμα 5.1. Η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$
συγκλίνει στο 1.

Αποδειξη. Η παραπάνω σειρά είναι τηλεσκοπική διότι
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
και άρα
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
Συνεπώς
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim \frac{1}{n+1} = 1$$
□

6) ***Σειρές που συγκλίνουν στο*** π ***και στον*** e: Αποδεικνύεται[1] ότι
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$
και συνεπώς ο αριθμός π γράφεται με τη μορφή σειράς ως
$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$
Αντίστοιχα για τον αριθμό e αποδεικνύεται ότι
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$
Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε κάποια βασικά κριτήρια σύγκλισης. Στα επόμενα θα λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* όταν είναι συγκλίνουσα δηλαδή όταν συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό $s \in \mathbb{R}$ (που όπως έχουμε αναφέρει αυτό σημαίνει ότι το όριο της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι το s).

Το πρώτο πράγμα που βλέπουμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι οι όροι της, δηλαδή η ακολουθία (a_n). Παρατηρείστε ότι
$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

[1]Η απόδειξη γίνεται με χρήση δυναμοσειρών και συγκεκριμένα με το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\arctan x$ που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

για κάθε $n \geq 2$. Άρα αν $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής.

Πρόταση 5.2. *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$. Με άλλα λόγια, αν η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.*

Παρατήρηση 5.2. Προσοχή! Μπορεί να συμβεί $a_n \to 0$ αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να μην συγκλίνει. Πχ. $1/n \to 0$ αλλά όπως θα δούμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα 5.2. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ δεν συγκλίνει.

Πράγματι, έχουμε $a_n = (-1)^n$ και (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των ακολουθιών) η ακολουθία $(-1)^n$ δεν συγκλίνει σε κανένα $a \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.3. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ δεν συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$$

αφού $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1$.

Παράδειγμα 5.4. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η γεωμετρική σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \ldots$ (όπου $a \neq 0$) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$.

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ συγκλίνει τότε απο την Πρόταση 5.2 θα πρέπει $\lim(ax^n) = a \lim x^n = 0$. Επειδή $a \neq 0$ αυτό σημαίνει ότι $\lim x^n = 0$. Άρα για $\epsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x^n - 0| = |x|^n < 1$ για κάθε $n \geq 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|x| \geq 1$ αφού τότε $|x|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $x \in (-1, 1)$. Όπως γνωρίζουμε

$$s_n = a + ax + \cdots + ax^n = a\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim s_n = \lim\left(a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = a\frac{1 - \lim x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1-x}$$

5.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους.

Οι πρώτες σειρές που μελετάμε είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην υποπαράγραφο αυτή θα δούμε τρία βασικά κριτήρια σύγκλισης τέτοιων σειρών.

Είναι εύκολο κατραχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Όπως έχουμε δεί στο Κεφάλαιο των ακολουθιών, μια αύξουσα ακολουθία είτε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε αποκλίνει στο $+\infty$ και άρα, είτε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ είτε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Έχουμε συνεπώς την εξής πρόταση.

Πρόταση 5.3. *Το άθροισμα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους υπάρχει και είναι είτε πεπερασμένο ή το $+\infty$.*

5.2.1 Κριτήριο Σύγκρισης και Οριακό Κριτήριο.

Τα πρώτα βασικά κριτήρια σύγκλισης σειρών με μη αρνητικούς όρους είναι τα επόμενα δύο:

Πρόταση 5.4. ***(Κριτήριο Σύγκρισης)*** *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με μη αρνητικούς όρους. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

για όλα τα $n \geq n_0$.

(1) *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*
(2) *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Πρόταση 5.5. ***(Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης)*** *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Αν*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \quad \text{με} \quad 0 < L < +\infty$$

τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 5.5. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Παραδειγμα 5.6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $0 < \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή (όπως θα δούμε παρακάτω) η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Παραδειγμα 5.7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Παραδειγμα 5.8. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Παραδειγμα 5.9. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7} = \frac{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim \frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

5.2.2 Το Κριτήριο Λόγου. Το κριτήριο Λόγου προκύπτει από την σύγκριση μιας σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ και στηρίζεται στην εξής απλή παρατήρηση: Αν $a_n > 0$ και $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda$ τότε για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \backsimeq \lambda$, που σημαίνει ότι η (a_n) για μεγάλα n, θα μοιάζει με την γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ. Επειδή όπως έχουμε δεί η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει αν $|\lambda| < 1$ είναι αναμενόμενο ότι στην περίπτωση αυτή και η "παρόμοια" σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα πρέπει να συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι όντως αυτό συμβαίνει και πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Πρόταση 5.6. *(**Κριτήριο Λόγου**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

(1) *Αν $\lambda > 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*
(2) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Παρατήρηση 5.3. Το κριτήριο λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

αλλά, όπως θα δούμε, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παράδειγμα 5.10. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Παραδειγμα 5.11. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

5.2.3 Το Κριτήριο Ρίζας. Το κριτήριο Ρίζας στηρίζεται στην ίδια λογική με το κριτήριο Λόγου και προκύπτει πάλι από την σύγκριση μιας σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$. Αυτή την φορά εξετάζουμε το $\lim \sqrt[n]{a_n}$. Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \lambda$ τότε για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $\sqrt[n]{a_n} \backsimeq \lambda \Leftrightarrow a_n \backsimeq \lambda^n$, που σημαίνει ότι η (a_n) για μεγάλα n, θα μοιάζει με την γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ.

Προταση 5.7. ***(Το κριτήριο Ρίζας)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

(1) *Αν $\lambda > 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*
(2) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Παρατηρηση 5.4. Όπως και το κριτήριο λόγου, το κριτήριο ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε έχουμε

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = 1$$

και ομοίως

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim \sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδειγμα 5.12. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n} = \lim \frac{3n}{5n+4} = \lim \frac{3}{5+4/n} = 3/5 < 1.$$

5.2.4 Το Κριτήριο Συμπύκνωσης.

Πρόταση 5.8. ***(Κριτήριο Συμπύκνωσης)*** *Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ συγκλίνει.*

Η απόδειξη του κριτηρίου συμπύκνωσης του Cauchy βασίζεται στην επόμενη ανισότητα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \le 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Για να πάρουμε μια ιδέα για το πως αποδεικνύονται αυτές οι ανισότητες παρατηρούμε ότι επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \\ &\le a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}\end{aligned}$$

και αντίστοιχα,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \\ &= a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots \\ &\le a_1 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_2 + a_3 + a_3) + \dots \\ &\le (a_1 + a_1) + (a_2 + a_2) + (a_3 + a_3) + \dots \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.13. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο συμπύκνωσης μπορούμε να δώσουμε και μια απόδειξη της μη σύγκλισης της αρμονικής σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = +\infty$$

Παράδειγμα 5.14. Αν $p > 1$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αφού

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

και $\displaystyle\frac{1}{2^{p-1}} < 1$.

Παραδειγμα 5.15. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n+1)}$ αποκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln(n+1)}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών[2] και

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^{n+1})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot (n+1)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

5.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Αν $a_n > 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ καλείται *εναλλάσσουσα.*

Προταση 5.9. *(Κριτήριο Leibniz) Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική (δηλ. $a_n \to 0$) ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ συγκλίνει.*

Παραδειγμα 5.16. Η *εναλλάσσουσα αρμονική* σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

συγκλίνει, αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

Παραδειγμα 5.17. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots$ συγκλίνει, αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

5.4 Σειρές με γενικούς όρους

Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***συγκλίνει απολύτως*** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η εξής πρόταση.

Προταση 5.10. *Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Παρατηρηση 5.5. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 5.10 το κριτήριο του λόγου και το κριτήριο ρίζας γενικεύονται ως εξής.

Προταση 5.11. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$$

(1) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει (που σημαίνει είτε δεν έχει όριο είτε αποκλίνει στο $\pm\infty$).*

---

[2] Η συνάρτηση $h(x) = x \cdot \ln(x+1)$, $x \geq 1$ είναι θετική και αύξουσα ως γινόμενο των θετικών και αυξουσών συναρτήσεων $h_1(x) = x$, $x \geq 1$ και $h_2(x) = \ln(x+1)$, $x \geq 1$. Άρα η $f(x) = \dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{1}{x \cdot \ln(x+1)}$ είναι θετική και φθίνουσα.

(2) *Αν* $\lambda < 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.12. ***(Γενικό κριτήριο Ρίζας)*** *Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και έστω ότι*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

(1) *Αν* $\lambda > 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *δεν συγκλίνει (που σημαίνει είτε δεν έχει όριο είτε αποκλίνει στο* $\pm\infty$*).*
(2) *Αν* $\lambda < 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.18. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το γενικό κριτήριο λόγου η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.

Κεφάλαιο 6

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

6.1 Βασικές έννοιες

Οι απλούστερες συναρτήσεις στα μαθηματικά είναι οι πολυωνυμικές, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ή γενικότερα της μορφής $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ όπου n μη αρνητικός ακέραιος και $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις παραγωγίζονται όρο προς όρο και η παράγωγός τους είναι πάλι πολυωνυμική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n)' &= (a_0)' + (a_1(x - x_0))' + \cdots + (a_n(x - x_0)^n)' \\ &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}\end{aligned}$$

Όμως σημαντικές συναρτήσεις, όπως η εκθετική συνάρτηση e^x , $x \in \mathbb{R}$, η λογαριθμική $\ln x$, $x \in \mathbb{R}$, οι τριγωνομετρικές $\sin x$, $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ κλπ, δεν είναι πολυωνυμικές. Παρόλα αυτά, όπως θα δούμε, οι συναρτήσεις αυτές γράφονται ως σειρές που θα λέγαμε ότι έχουν την μορφή πολυωνύμου απείρου βαθμού. Πιο συγκεκριμμένα, είχαμε δεί ότι στις συναρτήσεις αυτές αντιστοιχούμε τα πολυώνυμα Taylor. Πχ. στην εκθετική συνάρτηση τα πολυώνυμα Taylor είχαν την μορφή

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Με χρήση του τύπου του Taylor, αποδεικνύεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{6.1}$$

Η σχέση (6.1) σημαίνει ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα $x \in \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(T_n(x))$ συγκλίνει στο e^x. Επειδή τα $T_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, η (6.1) γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Γενικά, μια παράσταση της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

όπου (a_n) μια δεδομένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται *δυναμοσειρά*. Το σημείο x_0 καλείται *κέντρο* της δυναμοσειράς και οι αριθμοί a_n, $n \in \mathbb{N}$

καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Αν το κέντρο είναι το $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Παραδειγμα 6.1. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$

Παραδειγμα 6.2. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1/n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$

Παραδειγμα 6.3. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_0 = 0$ και $a_n = (-1)^n/n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Παραδειγμα 6.4. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2!}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{4!}$, $a_5 = 0, \ldots, a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$, $a_{2k+1} = 0, \ldots$.

Παραδειγμα 6.5. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές τους όρους της ακολουθίας $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{2!}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{5!}$, $\ldots, a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \ldots$.

6.2 Ακτίνα Σύγκλισης

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που εμφανίζονται με τις δυναμοσειρές είναι για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά έχει νόημα.

Ορισμος 6.1. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ μια δυναμοσειρά και $x_1 \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η δυναμοσειρά* συγκλίνει *για $x = x_1$ αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

Παρατηρούμε εύκολα ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0$ στο a_0. Το θέμα είναι αν συγκλίνει και για άλλα $x \in \mathbb{R}$. Το επόμενο θεώρημα λέει ότι αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει και για άλλα x εκτός του κέντρου της, τότε θα υπάρχει αναγκαστικά και ένα ανοικτό διάστημα I συμμετρικό ως προς το κέντρο της με την ιδιότητα η δυναμοσειρά να συγκλίνει για όλα τα εσωτερικά σημεία του I.

Θεωρημα 6.2. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Τότε υπάρχει μια σταθερά $R \geq 0$ (πεπερασμένη ή άπειρη), η οποία καλείται* ***ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς*** *με τις εξής ιδιότητες:*

(1) Αν $R = 0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.

(2) Αν $R = +\infty$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(3) Αν $0 < R < +\infty$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει, ενώ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| > R$ η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Παρατηρηση 6.1. (1) Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση $0 < R < +\infty$ το Θεώρημα 6.2 δεν αποφαίνεται αν η δυναμοσειρά συγκλίνει ή όχι στα σημεία $x = x_0 - R$ και $x = x_0 + R$. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται για κάθε δυναμοσειρά ξεχωριστά.

(2) Αποδεικνύεται ότι η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς εξαρτάται μόνο από την ακολουθία (a_n) των συντελεστών της δυναμοσειράς και όχι από το κέντρο της x_0. Με άλλα λόγια για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Παραδειγμα 6.6. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και έστω $0 < x_1 < x_2$. Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά να αποκλίνει στο x_1 και να συγκλίνει στο x_2 ?

Αποδειξη. Όχι! Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1 > 0$ τότε αποκλίνει για όλα τα $x > x_1$. Πράγματι, έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $x < -R$ ή $x > R$ (στα άκρα $-R$ και $+R$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι). Αφού λοιπόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1$ και $x_1 > 0$, αναγκαστικά θα έχουμε $x_1 \geq R$. Άρα αν $x_2 > x_1$, τότε και $x_2 > R$ και συνεπώς η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x_2. $\square$

Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά, θέτοντας $b_n = a_n(x-x_0)^n$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Από τα Κριτήρια Λόγου ή Ρίζας έπεται το επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα 6.3. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Αν*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varrho \text{ ή } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho \tag{6.2}$$

τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\varrho$ (με τις συμβάσεις $R = +\infty$ αν $\varrho = 0$ και $R = 0$ αν $\varrho = +\infty$).

Παρατηρηση 6.2. Είναι γνωστή πρόταση στην θεωρία ακολουθιών ότι αν το όριο $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει τότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι δεν υπάρχει περίπτωση να καταλήξουμε σε διαφορετικά R.

Παραδειγμα 6.7. Βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{31} + \dots \tag{6.3}$$

Αποδειξη. Έχουμε $a_n = \dfrac{1}{n!}$ και άρα

$$\varrho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

και συνεπώς $R = +\infty$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. □

Παραδειγμα 6.8. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει;

Αποδειξη. Έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ με $a_n = \dfrac{2^n}{n}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς δίνεται απο τον τύπο $R = 1/\rho$, όπου

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2$$

και άρα $R = 1/2$.

Συνεπώς η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει για $x < -\dfrac{1}{2}$ και $x > \dfrac{1}{2}$. Μένει να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία $x = -\dfrac{1}{2}$ και $x = \dfrac{1}{2}$.

Για $x = -\dfrac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν (Κριτήριο Leibnitz) συγκλίνει.

Για $x = \dfrac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει παντού αλλού. □

Παρατηρηση 6.3. Μερικές φορές το Θεώρημα 6.3 δεν μπορεί να εφαρμοσθεί άμεσα. Π.χ. αν θεωρήσουμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

τότε για τους συντελεστές της παρατηρούμε ότι $a_n = 0$ αν n περιττός και $a_n = 1$ αν n άρτιος. Κατά συνέπεια η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ είναι η ίδια ακολουθία με την (a_n)

η οποία δεν συγκλίνει. Την περίπτωση αυτή μπορούμε όμως να την αντιμετωπίσουμε ως εξής: Θέτουμε $t = x^2$ και έτσι η δυναμοσειρά $1 + x^2 + x^4 + \dots$ γράφεται

$$1 + t + t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Εδώ οι συντελεστές είναι η σταθερή ακολουθία (a_n) όπου όλοι οι όροι είναι ίσοι με την μονάδα. Άρα $\varrho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ οπότε και η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ είναι $R = 1$. Είναι τώρα εύκολο να ελέγξουμε ότι η αρχική μας δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $\sqrt{1} = 1$. Πράγματι, έστω $|x| < 1$. Τότε $|t| = |x^2| < 1$ οπότε η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ συγκλίνει. Ομοίως αν $|x| > 1$ τότε $|t| > 1$ και άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ δεν συγκλίνει.

6.3 Παραγώγιση δυναμοσειράς

Η παραγώγιση μιας δυναμοσειράς γίνεται όρο προς όρο. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε τα εξής.

Θεωρημα 6.4. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (x_0-R, x_0+R)$ και ισχύει ότι*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

Επιπλέον η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ είναι η ίδια με της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Με άλλα λόγια

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)'$$

Επίσης βλέπουμε ότι η παράγωγος μιας δυναμοσειράς είναι πάλι δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Άρα πάλι εφαρμόζοντας το ίδιο θεώρημα για την $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n-1}$ θα έχουμε ότι $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n-2}$. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι $f'(x_0) = a_1$ και $f''(x_0) = \dfrac{a_2}{2}$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή παίρνουμε το εξής.

Πορισμα 6.5. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο (x_0-R, x_0+R) και*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{6.4}$$

για όλα τα $n = 0, 1, \dots$.

Παραδειγμα 6.9. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

(1) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης.
(2) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(3) Δείξτε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1,1)$.

(4) Δείξτε ότι $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, για κάθε $x \in (-1,1)$.

(5) Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$.

Απόδειξη. (1) Έχουμε $\varrho = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1/\varrho = 1$.

(2) Επειδή $R = 1$ και $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1,1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-1,1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(3) Είναι $f'(x) = \displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1,1)$.

(4) Επειδή

$$\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)' = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x}$$

οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + c$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Επειδή $f(0) = 0 = \ln\left(\frac{1}{1-0}\right)$ έχουμε $c = 0$, δηλαδή

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

(5) Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = f(1/2)$. Επειδή $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ για κάθε $x \in (-1,1)$, έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \ln 2$. □

Παράδειγμα 6.10. Με βάση το ανάπτυγμα $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$ αναπτύξτε σε δυναμοσειρά (με κέντρο το $x_0 = 0$) την συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

$x \in (-1,1)$. Στην συνέχεια βρείτε το άθροισμα $1+2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}\right)^2+4\left(\frac{3}{4}\right)^3+\dots$ και την $g^{(2021)}(0)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+\dots,$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Ειδικότερα για $x = 3/4$,

$$1+2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}\right)^2+4\left(\frac{3}{4}\right)^3+\dots = \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 16.$$

Επίσης από την (6.4) έχουμε

$$n+1 = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow g^{(n)}(0) = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$$

Οπότε

$$g^{(2021)}(0) = 2022!$$

□

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ τότε η δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x-x_0)^3 + \dots$$

αποδεικνύεται ότι έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Τώρα από το Θεώρημα 6.4, προκύπτει άμεσα ότι $F'(x) = f(x)$, με άλλα λόγια η $F(x)$ είναι μια *αρχική* (*αντιπαράγωγος*) της f. Από το ΘΜΤ έχουμε ότι όλες οι αρχικές συναρτήσεις της f θα είναι της μορφής $F(x)+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και άρα $F(x)$ είναι η μοναδική αρχική της $f(x)$ με την ιδιότητα $F(x_0) = 0$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε το επόμενο αντίστροφο του θεωρήματος 6.4.

Θεώρημα 6.6. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η δυναμοσειρά*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x-x_0)^3 + \dots$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ και είναι η μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) $F'(x) = f(x)$ και (β) $F(x_0) = 0$.

Παράδειγμα 6.11. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το $t_0 = 0$ την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in (-1,1)$ και μετά κάντε το ίδιο για την $F(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$.

Αποδειξη. Έστω $x \in (-1, 1)$. Τότε $-x \in (-1, 1)$ και άρα

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Επειδή $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ και $F(0) = \ln 1 = 0$, από το Θεώρημα 6.6, έπεται ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

□

Παραδειγμα 6.12. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το $t_0 = 0$ την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-1, 1)$ και μετά κάντε το ίδιο για την $F(x) = \arctan x$, $x \in (-1, 1)$.

Αποδειξη. Έστω $x \in (-1, 1)$. Τότε $x^2 \in (-1, 1)$ και άρα

$$f(t) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Αφού $F'(x) = (\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$ και $F(0) = \arctan 0 = 0$, έχουμε

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. □

Παρατηρηση 6.4. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ συγκλίνει και για $x = 1$. Πράγματι αν θέσουμε $x = 1$ τότε παίρνουμε την σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \tag{6.5}$$

που επειδή είναι εναλλάσσουσα και η $a_n = \frac{1}{2n+1}$ φθίνουσα και μηδενική, από το κριτήριο Leibniz έπεται ότι συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα της σειράς (6.5) είναι το $\arctan 1 = \pi/4$ και άρα

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \tag{6.6}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\ln(x+1)$, $x \in (-1, 1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ισχύει και στο σημείο $x = 1$ δηλαδή

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \tag{6.7}$$

6.4 Απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις και Σειρές Taylor

Από το Πόρισμα 6.5 έχουμε ότι κάθε συνάρτηση που γράφεται ως δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ είναι μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αντίστροφα τώρα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ (όπου $R > 0$) που είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη. Μήπως μπορούμε να γράψουμε την f υπό μορφή δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$; Γενικά αυτό δεν γίνεται και μάλιστα όπως αποδεικνύεται, οι συναρτήσεις που γράφονται ως δυναμοσειρά αποτελούν ένα πολύ μικρό μέρος των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Στην περίπτωση όμως που μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση f γράφεται ως δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, από το Πόρισμα 6.5 έπεται ότι η δυναμοσειρά αυτή είναι μοναδική αφού οι συντελεστές της δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Με άλλα λόγια η μόνη δυναμοσειρά που είναι υποψήφια για να αναπαραστήσει την f είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \tag{6.8}$$

Η δυναμοσειρά (6.8) καλείται ***σειρά Taylor της*** f ***με κέντρο το*** x_0. Αν το $x_0 = 0$ τότε η σειρά Taylor της f γράφεται πιο απλά,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \tag{6.9}$$

που συνήθως καλείται ***σειρά Maclaurin της*** f.

Παρατηρείστε ότι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (6.8) είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το x_0:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Η επόμενη πρόταση δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να γράφεται μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση ως δυναμοσειρά.

Πρόταση 6.7. *Έστω $R > 0$ και $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ (όπου $R > 0$) απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor και $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ το υπόλοιπο Taylor της f τάξης n με κέντρο το x_0. Τότε για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \Leftrightarrow \lim_n R_n(x) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n &\Leftrightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &\Leftrightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (f(x) - T_n(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0. \end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor προκύπτει το εξής θεώρημα.

Θεωρημα 6.8. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{6.10}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{6.11}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{6.12}$$

6.5 Δυναμοσειρές και πράξεις

Προταση 6.9. *Έστω $R > 0$ και έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ για όλα τα $|x - x_0| < R$. Έστω επίσης $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και*

$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

Τότε

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)(x-x_0)^n$$

για κάθε $|x - x_0| < R$.

Παραδειγμα 6.13. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις $\cosh x$ και $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Από το Θεώρημα 6.8 έχουμε

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{6.13}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και άρα

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \tag{6.14}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι

$$\sin hx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\square$

Κεφάλαιο 7

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και έστω

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

η περιοχή του επιπέδου κάτω από το γράφημα της f και πάνω από το διάστημα $[a,b]$. Το εμβαδόν του S καλείται ολοκλήρωμα Riemann (ή απλά ολοκλήρωμα) της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\ dx$. Το ολοκλήρωμα ορίζεται μέσω προσεγγίσεων που καλούνται *αθροίσματα Riemann.*

7.1 Βασικοί Ορισμοί-Αθροίσματα Riemann

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ που περιέχει τα a, b καλείται ***διαμέριση*** του $[a,b]$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ με

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

συμβολίζουμε το μήκος του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$. Η ***λεπτότητα*** της P ορίζεται να είναι το μέγιστο από τα μήκη Δx_i και συμβολίζεται με $\lambda(P)$, δηλαδή

$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

Δεδομένης μιας διαμέρισης $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ μια πεπερασμένη ακολουθία $T = (t_1, \ldots, t_n)$ τέτοια ώστε $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ θα καλείται ***επιλογή ενδιάμεσων σημείων της*** P.

Ορισμός 7.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$ και $T = (t_1, \ldots, t_n)$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Το άθροισμα*

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

*καλείται **άθροισμα Riemann της** f και συμβολίζεται με $R(f,P,T)$.*

Ορισμός 7.2. *Μία συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ καλείται **ολοκληρώσιμη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός I με την εξής ιδιότητα : Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|R(f,P,T) - I| < \epsilon$$

για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a,b]$ με $\lambda(P) < \delta$ και για οποιαδήποτε επιλογή T ενδιάμεσων σημείων της P.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε ο αριθμός I με την παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός και καλείται **ολοκλήρωμα Riemann** ή απλά **ολοκλήρωμα** της f. Συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

7.2 Ειδικά αθροίσματα Riemann

Από τον Ορισμό 7.2 έχουμε ότι αν (P_n) είναι μια ακολουθία διαμερίσεων με $\lambda(P_n) \to 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} R(f, P_n, T_n) = \int_a^b f(x)\ dx$$

για οποιαδήποτε επιλογή T_n ενδιάμεσων σημείων της P_n.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι *ισομήκεις* διαμερίσεις του $[a, b]$, δηλαδή οι διαμερίσεις της μορφής $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ όπου

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$$

για κάθε $i = 0, \dots, n$. Στην περίπτωση αυτή, αν θέσουμε $T_n = (x_i : i = 1, \dots, n)$ ως επιλογή ενδιάμεσων σημείων την P_n, τότε το άθροισμα Riemann, $R(f, P_n, T_n)$ παίρνει την μορφή

$$R(f, P_n, T_n) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)}{n}$$

Επειδή $\lambda(P_n) = \dfrac{b-a}{n} \to 0$, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 7.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε*

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)}{n} \tag{7.1}$$

Ειδικότερα, αν $[a, b] = [0, 1]$ παίρνουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 7.4. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε*

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})}{n} \tag{7.2}$$

Παράδειγμα 7.1. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^k$, όπου $k \in \mathbb{N}$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνεχής). Από τον τύπο (7.2) εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^1 x^k\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

Μάλιστα όπως θα δούμε παρακάτω $\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

7.3 Δύο βασικές κλάσεις ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

Αποδεικνύεται το εξής.

Θεωρημα 7.5. *(α) Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.*

(β) Κάθε μονότονη συνάρτηση (ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι) είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατηρηση 7.1. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση Dirichlet, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα αθροίσματα Riemann δεν συγκλίνουν καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει στο 0. [1]

7.4 Βασικές Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Οι βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος είναι οι παρακάτω:

Προταση 7.6. *(Προσθετικότητα) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c.b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Προταση 7.7. *(Μονοτονία) Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε*

$$\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$$

Προταση 7.8. *(Γραμμικότητα) Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx$$

[1]Παρατηρείστε ότι αν P μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[0,1]$, τότε $R(f,P,T) = 0$, αν η T αποτελείται από αρρήτους, ενώ $R(f,P,T) = 1$ αν η T αποτελείται από ρητούς.

7.5 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις και οι συνέπειές του.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού συνδέει την παραγώγιση με την ολοκλήρωση και λέει ότι αυτές οι δύο έννοιες είναι αντίστροφες μεταξύ τους. Το διατυπώνουμε εδώ για συνεχείς μόνο συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.9. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$ (αν $x = a$ θέτουμε $F(a) = \int_a^a f(t)\ dt = 0$). Τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Το Θεώρημα 7.9 αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων:

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.10. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια αντιπαράγωγος της f. Τότε*

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα 7.9 έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ είναι μια αντιπαράγωγος της f. Αν τώρα $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f τότε $G = F + c$ για κάποια σταθερά c (Πράγματι, $G' = F' = f \Rightarrow G' - F' = 0 \Rightarrow (G - F)' = 0 \Rightarrow G - F = c \Rightarrow G = F + c$). Άρα $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F(b) = F(b) - F(a) = (G(b) - c) - (G(a) - c) = G(b) - G(a)$. □

Το Πόρισμα 7.10 αναδιατυπώνεται και ως εξής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.11. *Έστω $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_a^b G'(x)\ dx = G(b) - G(a)$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ 7.1. Έστω $G : [a, b] \to \mathbb{R}$. Για οποιδήποτε $x, y \in [a, b]$ την διαφορά

$$G(y) - G(x)$$

θα την συμβολίζουμε με

$$[G(x)]_x^y \ \text{ ή } \ G(x)|_x^y$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Γενικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^k\ dx = \left[\frac{x^k}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Ένα άλλο πόρισμα του Θεωρήματος 7.9 είναι το εξής.

Πορισμα 7.12. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε* $G(x) = \int_x^b f(t)\ dt$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Τότε* $G'(x) = -f(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$.

Αποδειξη. Από την προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε $\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^b f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt$ και άρα $F(x) + G(x) = c$ όπου $c = \int_a^b f(t)\ dt$. Συνεπώς $G(x) = c - F(x) \Rightarrow G'(x) = (c - F(x))' = -F'(x) = -f(x)$. □

Για τα επόμενα είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμος 7.13. *Αν* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση τότε για κάθε* $c \in [a,b]$ *ορίζουμε*

$$\int_c^c f(x)\ dx = 0$$

Επίσης για κάθε c, d *στο* $[a,b]$ *με* $c > d$ *ορίζουμε*

$$\int_c^d f(x)\ dx = -\int_d^c f(x)\ dx$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.12 και τον Ορισμό 7.13 έχουμε την εξής γενίκευση του Θεωρήματος 7.9.

Θεωρημα 7.14. *Έστω* I *διάστημα του* $\mathbb{R}$ *και* $f : I \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Έστω* $c \in I$ *και* $F(x) = \int_c^x f(t)\ dt$ *για κάθε* $x \in I$. *Τότε* $F'(x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in I$. *Συνεπώς καθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα του* $\mathbb{R}$ *έχει αντιπαράγωγο.*

Αποδειξη. Αν $x \geq c$ τότε από το Θεώρημα 7.9 έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$. Αν $x < c$, από τον Ορισμό 7.13 έχουμε $F(x) = -\int_x^c f(t)\ dt = G(x)$, όπου $G(x) = \int_x^c f(t)\ dt$. Άρα, από το Πόρισμα 7.12, $F'(x) = (-G(x))' = -G'(x) = -(-f(x)) = f(x)$. □

Παρατηρηση 7.2. Παρατηρείστε ότι σύμφωνα με τον Ορισμό 6.8 αν $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια αντιπαράγωγος της f και τότε για οποιαδήποτε $c, d \in I$ ισχύει ότι

$$\int_c^d f(x)\ dx = G(d) - G(c) \tag{7.3}$$

Πχ. αν $c > d$ έχουμε $\displaystyle\int_c^d f(x)\, dx = -\int_d^c f(x)\, dx = -\left[G(x)\right]_d^c = -\left(G(d) - G(c)\right) = G(d) - G(c)$.

7.6 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

7.6.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η πρώτη μέθοδος Ολοκλήρωσης είναι το ανάλογο του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων: $(fg)' = f'g + fg'$ και καλείται *Ολοκλήρωση κατά παράγοντες*.

Θεωρημα 7.15. *Έστω* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{7.4}$$

Αποδειξη. Επειδή

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

έχουμε ότι

$$f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το Πόρισμα 7.11,

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\ dx &= \int_a^b (f(x)g(x))'\ dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx.\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 7.5.

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\ dx = \int_1^e (x)' \ln x\ dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\ dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x}\ dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\ dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = [x(\ln x - 1)]_1^e\end{aligned}$$

Παραδειγμα 7.6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \frac{\pi}{2}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin x)'\ dx &= [\cos x \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \sin x\ dx \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \sin x\ dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x\ dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 x\right)\ dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\end{aligned}$$

Άρα θέτοντας $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ έχουμε ότι $I = \pi - I \Leftrightarrow 2I = \pi \Leftrightarrow I = \dfrac{\pi}{2}$.

7.6.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση. Η δεύτερη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι το αντίστοιχο του κανόνα παραγώγισης της σύνθεσης δύο συναρτήσεων (κανόνας αλυσίδας): $(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x)$ και καλείται *ολοκλήρωση με αντικατάσταση* (ή *ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής*).

Θεωρημα 7.16. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $\phi : [a,b] \to I$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\ dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ dt \tag{7.5}$$

Αποδειξη. Έστω $F : I \to \mathbb{R}$ μια αντιπαράγωγος της f. Τότε από το Πόρισμα 7.11,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt = F\left(g(b)\right) - F\left(g(a)\right) \tag{7.6}$$

Από την άλλη μεριά, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\ dx &= \int_a^b F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\ dx \\ &= \int_a^b (F \circ \phi)'(x)\ dx \\ &= F \circ \phi\ (b) - F \circ \phi\ (a) \\ &= F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \\ &= F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Από (7.6) και (7.7) έπεται το συμπέρασμα. □

Στην πράξη για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.16, θέτουμε

“$t = \phi(x)$” και “$dt = \phi'(x)\ dx$”

Παραδειγμα 7.7.

$$\int_a^b f(x) f'(x)\ dx \overset{t=f(x),\ dt=f'(x)\ dx}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_a^b$$

Πχ.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\ dx &= \int_a^b \cos x \sin x\ dx \\ &= \int_a^b \sin x (\sin x)'\ dx \\ &\overset{t=\sin x,\ dt=\cos x\ dx}{=} \int_{\sin a}^{\sin b} t\ dt = \frac{\sin^2 b - \sin^2 a}{2} \end{aligned}$$

Παραδειγμα 7.8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx \overset{t=f(x),\ dt=f'(x)\ dx}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{dt}{t}\ dt = [\ln t]_{f(a)}^{f(b)} = \ln f(b) - \ln f(a)$$

Πχ.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \tan x\ dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\int_0^{\pi/3} \frac{(\cos x)'}{\cos x}\ dx \\ &\overset{t=\cos x}{=} -\int_1^{1/2} \frac{dt}{t} = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t} = [\ln t]_{1/2}^1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.9.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x\ dx = \int_1^e (x)' \arctan x\ dx &= [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 x(\arctan x)'\ dx\\ &= [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}\ dx\\ &\overset{(u=x^2+1)}{=} [x\arctan x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\ du\\ &= [x\arctan x]_0^1 - [\ln u]_1^2\\ &= [x\arctan x]_0^1 - \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1\\ &= \left[x\arctan x - \ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln 2\end{aligned}$$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση (7.5), χρησιμοποιείται και από αριστερά προς τα δεξιά ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^b f(x)\ dx$. Αν $\phi : [c,d] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη με $\phi(c) = a$ και $\phi(d) = b$ τότε ο τύπος (7.5) γράφεται ισοδύναμα

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt \tag{7.8}$$

Στην πράξη, θέτουμε

$$x = \phi(t) \text{ και } dx = \phi'(t)\ dt$$

και γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt$$

Το δύσκολο εδώ είναι να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση $\phi : [c,d] \to [a,b]$ με $\phi(c) = a$ και $\phi(d) = b$.

Παράδειγμα 7.10. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$. Τι απεικονίζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα αυτό;

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sin t$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\ (\sin t)'\ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \frac{\pi}{2}$$

όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 7.6. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ που είναι το ημικύκλιο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και άρα απεικονίζει το μισό του εμβαδού του κύκλου με ακτίνα 1. □

7.7 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Αν $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, (όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$) με το σύμβολο $\int f(x)\ dx$ θα εννοούμε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f. Επειδή, δυο αντιπαράγωγοι της f διαφέρουν κατά σταθερά, έχουμε ότι αν F μια αντιπαράγωγος της f τότε

$$\int f(x)\ dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Στα επόμενα για απλότητα θα γράφουμε

$$\int f(x)\ dx = F(x)$$

όπου F μια αντιπαράγωγος της f. Άρα γράφοντας

$$\int f(x)\ dx = F(x)$$

απλά θα εννοούμε ότι

$$F'(x) = f(x)$$

Πχ.

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| \text{ (διότι } \ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \neq 0)$$

Το σύμβολο $\int f(x)\ dx$ καλείται *αόριστο ολοκλήρωμα* (ή *γενικό ολοκλήρωμα* ή απλά *ολοκλήρωμα*) της f.

Η γραμμικότητα του ολοκληρώματος διατυπώνεται για αόριστα ολοκληρώματα ως εξής

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\ \ dx = \lambda \int f(x)\ dx + \mu \int g(x)\ dx$$

Επίσης οι μέθοδοι ολοκλήρωσης παίρνουν την μορφή

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

και

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx \overset{t=\phi(x),\ dt=\phi'(x)dx}{=} \int f(t)\ dt$$

ή

$$\int f(x)\ dx \overset{x=\phi(t),\ dx=\phi'(t)\ dt}{=} \int f((\phi(t))\phi'(t)\ dt$$

Παραδειγμα 7.11.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5} &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\arctan t = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση $t = \dfrac{x+1}{2}$ και $dt = \dfrac{dx}{2}$)

Ασκηση 7.1. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $t = x+2$ και $dt = dx$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{t-2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t^2+1$ και άρα $du = 2tdt \Rightarrow tdt = du/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \frac{1}{2}(\ln(x+2)^2) = \ln|x+2|.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \ln|x+2| + \frac{\arctan(x+2)}{2}.$$

7.8 Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 7.2. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,dx.$

Λύση: Έχουμε

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άσκηση 7.3. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$.

Λύση: Κάνουμε την αντικατάσταση $t = e^x$ και $dt = e^x dx = t dx$, οπότε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\,dt = \int \frac{t}{t(t^2+1)}\,dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt$$
$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt$$
$$= \arctan t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt.$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$$

έχουμε

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = t$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Άσκηση 7.4. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Λύση: Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\sin x\,dx &= \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x\,dx \\
&\overset{t=\cos x,\ dt=\sin x dx}{=} \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{(1+t)\cdot(1-t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1+t}\,dt + \int \frac{1}{1-t}\,dt\Big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\ln|1+t| - \ln|1-t|\big) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+t|}{|1-t|} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|.
\end{aligned}
$$

Ένας άλλος πιο συνήθης τρόπος που εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων για να τα μετατρέψουμε σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων είναι με την χρήση της αντικατάστασης

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$x = 2\arctan t$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Επίσης από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.5. *Βρείτε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx.$

Λύση : Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.6. *Αφού βρείτε σταθερές* $A, B, C \in \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε*

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{7.9}$$

να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx.$

Λύση: Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C στην (7.9) εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (7.9) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}\\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Οπότε

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\ dx = -\int \frac{1}{x+1}\ dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\ dx \tag{7.10}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\ dx = \ln|x+1|.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x+9}{x^2+9}\ dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\ dx\\ &\overset{t=x/3, dx=3dt}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3t+9}{t^2+1}\ 3\ dt\\ &= \int \frac{t+3}{t^2+1}\ dt\\ &= \int \frac{t}{t^2+1}\ dt + \int \frac{3}{t^2+1}\ dt\\ &\overset{u=t^2+1, du=2t\ dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{t^2+1}\ dt\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + 3\arctan t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\arctan t\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\end{aligned}$$

Ασκηση 7.7. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

Λύση: Θέτοντας $x = t^2$, $dx = 2tdt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx &= 2\int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} t\ dt \\ &= 2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}\ dt \\ &= 2\int \arctan t(\arctan t)'\ dt \\ &= \int \left((\arctan t)^2\right)'\ du \\ &= (\arctan t)^2 = (\arctan x)^2.\end{aligned}$$

Ασκηση 7.8. *(α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \cosh^2 x\ dx$.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1+x^2}\ dx$.

Λύση: (α) Θέτουμε

$$I = \int \cosh^2 x\ dx$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}I = \int \cosh x \cosh x\ dx = \int \cosh x(\sinh x)'\ dx &= \cosh x \sinh x - \int (\cosh x)' \sinh x\ dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int \sinh^2 x\ dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int (\cosh^2 x - 1)\ dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int \cosh^2 x\ dx + x \\ &= \cosh x \sinh x - I + x\end{aligned}$$

και άρα

$$I = \int \cosh^2 x\ dx = \frac{1}{2}(\cosh x \sinh x + x)$$

(β) Θέτοντας $x = \sinh t$ και $dx = (\sinh t)' dt = \cosh t \; dt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} \; dx = \int \sqrt{1+\sin^2 t} \cosh t \; dt &= \int \cosh^2 t \; dt \\ &= \frac{1}{2}(\cosh t \sinh t + t) \end{aligned}$$

όπου

$$t = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

(δείτε το Κεφάλαιο με τις Υπερβολικές Τριγωνομετρικές συναρτήσεις).

Κεφάλαιο 8

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

8.1 Βασικές έννοιες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

Ο *διανυσματικός χώρος* $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των *σημείων (ή διανυσμάτων)* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, (όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Ορισμος 8.1. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την **νόρμα)** του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες της νόρμας:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Ορισμος 8.2. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

*καλείται **απόσταση** των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.*

Από τις ιδιότητες της νόρμας προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

και
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|$$
για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμος 8.3. *Έστω* $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *και* $\delta > 0$. *Το σύνολο*
$$B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta\}$$
καλείται ***ανοικτή μπάλα του*** $\mathbb{R}^n$ ***κέντρου*** $\mathbf{x}_0$ ***και ακτίνας*** δ.

Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* του δ. Οι ανοικτές μπάλες $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και *(βασικές ανοικτές) περιοχές* του $\mathbf{x}_0$.

8.2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές.***) Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$, όπου $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη (όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση) στα σημεία του χώρου.

(II) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \big(t, t^2, \ldots, t^m\big)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή
$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$
όπου $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$.

Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Πχ. η $f(t) = (\cos t, sint)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t σαν χρόνο συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να απεικονίζουν την θέση ενός κινητού στον χώρο την ξρονική στιγμή t.

(III) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$ (αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται και *διανυσματικά πεδία*).

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να περιγράψουν ένα πεδίο βαρύτητας, ή ένα πεδίο ταχύτητας ρευστού.

Αν $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε το *γράφημα* της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$Gr(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in X \text{ και } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}. \tag{8.1}$$

Ειδικότερα αν $m = 1$ δηλαδή η f είναι βαθμωτή, γράφοντας το $\mathbf{x}$ ως $(x_1, \ldots, x_n)$ και θέτοντας $x_{n+1} = y$ το γράφημα παίρνει και την μορφή:

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (x_1, \ldots, x_n) \in X \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\} \tag{8.2}$$

οπότε αν επιπλέον $X = \mathbb{R}^n$,

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \tag{8.3}$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ έχει γράφημα το σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ που αποτελεί μια διδιάστατη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (είναι το λεγόμενο *παραβολοειδές* που προκύπτει από την περιστροφή της $y = x^2$ γύρω απο τον άξονα των x). Γενικά το γράφημα μιας βαθμωτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αποτελεί μια "n-διάστατη επιφάνεια" του $\mathbb{R}^{n+1}$.

8.3 Μερικές παράγωγοι πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμος 8.4. *(Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός καλείται **μερική παράγωγος ως προς** x **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0, y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ομοίως το όριο

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός καλείται **μερική παράγωγος ως προς** y **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0,y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Παραδειγμα 8.1. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2$. Για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_x(x,y)=3x^2+2xy+y^2$ και $f_y(x,y)=3y^2+x^2+2xy$.

Παραδειγμα 8.2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=|x|+|y|$. Τότε οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

(β) Έχουμε

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{|y|^2}}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{|y|}{y}$$

Όπως και στο (α) και τα δύο αυτά όρια δεν υπάρχουν.

Ορισμος 8.5. *(Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ υπάρχουν σε κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Τα όρια*

$$f_{xx}(x_0,y_0)=(f_x)_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_x(x,y_0)-f_x(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f_{xy}(x_0,y_0)=(f_x)_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$f_{yx}(x_0,y_0)=(f_y)_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_{yy}(x_0,y_0)=(f_y)_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_y(x_0,y)-f_y(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

αν υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί καλούνται ***μερικές παράγωγοι της*** f ***στο*** (x_0,y_0) ***δεύτερης τάξης****. Ειδικότερα οι $f_{xy}(x_0,y_0)$ και $f_{yx}(x_0,y_0)$ καλούνται* **μεικτές** *μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0,y_0) δεύτερης τάξης.*

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\quad f_{xy}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\quad f_{yy}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Παραδειγμα 8.3. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2$. Για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x,y)=3x^2+2xy+y^2$, $f_y(x,y)=3y^2+x^2+2xy$ και

$$f_{xx}(x,y)(=(f_x)_x(x,y))=6x+2y,\quad f_{xy}(x,y)(=(f_x)_y(x,y))=2x+2y,$$
$$f_{yx}(x,y)(=(f_y)_x(x,y))=2x+2y\quad f_{yy}(x,y)(=(f_y)_y(x,y))=6y+2x.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεωρημα 8.6. *(Schwarz) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς. Τότε οι μεικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της f είναι ίσες.*

8.4 Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμος 8.7. *Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.*

*(1) Λέμε ότι η f έχει στο (x_0,y_0) **τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ για όλα τα $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$.*

*(2) Λέμε ότι η f έχει στο (x_0,y_0) **τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ για όλα τα $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$.*

*(3) Λέμε ότι η f έχει στο το $\mathbf{x}_0$ **τοπικό ακρότατο** αν η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.*

Παρατηρηση 8.1. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x_0,y_0)\in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\delta>0$ υπάρχουν σημεία $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in B_\delta(x_0,y_0)$ τέτοια ώστε

$$f(x_1,y_1)<f(x_0,y_0)<f(x_2,y_2)$$

Ορισμος 8.8. *Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Λέμε ότι το (x_0,y_0) είναι **κρίσιμο** (ή **στάσιμο**) σημείο της f αν $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.*

Παρατηρηση 8.2. Ο τύπος του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας $z=f(x,y)$ (δηλαδή της γραφικής παράστασης της f) στο (x_0,y_0) είναι

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Άρα αν το (x_0,y_0) είναι κρίσιμο σημείο τότε έχουμε ότι $z=f(x_0,y_0)$ δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0,y_0) είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.9. ***(Σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων)*** *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν. Αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο της f τότε το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8.3. Το αντίστροφο της Πρότασης 8.9 δεν ισχύει. Πχ. αν $f(x, y) = x^3 + y^3$ τότε το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.10. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι τοπικό ακρότατο καλείται* ***σαγματικό*** *σημείο της f.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8.4. Απο τις Παρατηρήσεις 8.1 και 8.2, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0, y_0) (το οποίο όπως είδαμε είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο, λόγω του ότι το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f) *δεν αφήνει το γράφημα της f από την μία μεριά του.* Γενικά το γράφημα της f γύρω απο ένα σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας αλόγου εξ ου και το όνομα. Κατά μια έννοια τα σαγματικά σημεία πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών είναι όπως τα σημεία *καμπής* πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

8.5 Το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μια επέκταση ενός γνωστού κριτηρίου (***κριτήριο δεύτερης παραγώγου***) για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Θυμίζουμε ότι το κριτήριο αυτό έλεγε το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.11. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $x_0 \in I$ κρίσιμο σημείο της f (δηλ. $f'(x_0) = 0$) και τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει.*

(1) Αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $f''(x_0) > 0$. Επειδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f'(x_0) = 0$ και άρα

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Άρα

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ και } x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_0 + \delta)$ και άρα το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(2) Προκύπτει απο το (1) θέτοντας $g = -f$. □

Κλασσικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν το παραπάνω κριτήριο είναι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$. Πράγματι, η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και $f''(0) = 2 > 0$, η g έχει ολικό μέγιστο στο 0 και $g''(0) = -2 < 0$. Αν $f''(x_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν αποφαίνεται. Πχ. η $h(x) = x^3$ δεν έχει τοπικά ακρότατα (ως γνησίως αύξουσα) και η $\sigma(x) = x^4$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και για τις δύο συναρτήσεις έχουμε $h''(0) = \sigma''(0) = 0$.

Το παραπάνω κριτήριο γενικεύεται και για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Πρίν διατυπώσουμε το αντίστοιχο κριτήριο δίνουμε τον εξής ορισμό που επεκτείνει την έννοια της δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.12. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στο (x_0, y_0). Ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) είναι ο πίνακας*

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

τον οποίο θα συμβολίζουμε με $f''(x_0, y_0)$.

Στα επόμενα 2θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 αν οι συναρτήσεις των μερικών παραγώγων της έως και δεύτερης τάξης ορίζονται και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι αν η f είναι κλάσης C^2, τότε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα ο πίνακας $f''(x_0, y_0)$ θα είναι συμμετρικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.13. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ κρίσιμο σημείο της f (δηλαδή $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$). Έστω*

$$f''(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) και έστω

$$\Delta(x_0, y_0) = \det f''(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \tag{8.5}$$

η ορίζουσά του. Υποθέτουμε ότι

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0.$$

1. *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).*
2. *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).*
3. *Αν $\Delta(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 8.1. (α) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να αποφανθεί αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μελετούμε και να εξάγουμε πληροφορία για το εν λόγω σημείο (δείτε σχετικά τα Παραδείγματα 8.6, 8.7 παρακάτω).

(β) Επίσης υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x,y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ και άρα η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0,0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0,0)$.

Παραδειγμα 8.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο πιθανά ακρότατα, τα $(0,0)$ και $(-1,-1)$. Για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1,-1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1,-1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Παραδειγμα 8.5. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x \\ f_y(x,y) &= 6xy - 6y \\ f_{xx}(x,y) &= 6x - 6 \\ f_{yy}(x,y) &= 6x - 6 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6y \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$$
$$f_y(x,y) = 6xy - 6y = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x-1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \tag{8.6}$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία

$$(0,0) \quad \text{καί} \quad (2,0).$$

Ομοίως για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1,1) \quad \text{και} \quad (1,-1).$$

Συνολικά έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (6x-6)\cdot(6x-6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ και άρα στο $(0,0)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2,0) = 6 > 0$ και άρα στο $(0,2)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1,1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1,-1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.

Παραδειγμα 8.6. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^4$.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3, \quad f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3,$$
$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 12(x-y)^2,\; f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 12(x-y)^2$$

και

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12(x-y)^2$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3 = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3 = 0$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{8.7}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x-y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε απο την (8.7) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$. Έχουμε $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$ και άρα $\Delta(0,0) = 0$. Συνεπώς απο το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα σε *κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία τέτοια ώστε η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι αυστηρά μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του $f(0,0)$. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Παραδειγμα 8.7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\
f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\
f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\
f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4
\end{aligned}$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\
f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 0
\end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2-4)\cdot(12y^2-4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$, είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε $x = y \neq 0$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι *σε κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που στο ένα η τιμή της f είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο τοπικά ελάχιστα.